



## OTIMIZAÇÃO DE VIGAS RETANGULARES DE CONCRETO ARMADO

### Reinforced concrete rectangular beams optimization

Aline Alves Spazzapan (1); Leandro Waidemam (2); Tatiane Cazarin da Silva (3)

(1) Engenheira Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão - PR, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Construção Civil, Campo Mourão - PR, Brasil.

(3) Dra. Profa., Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Matemática, Campo Mourão - PR, Brasil.

Email para Correspondência: waidemam@utfpr.edu.br; (P) Leandro Waidemam

**Resumo:** Na concepção de um projeto, o engenheiro de estruturas utiliza seu conhecimento e experiência para melhor atender aos aspectos de segurança, funcionalidade e economia. Essa etapa nem sempre é feita da maneira mais econômica, visto que existem várias soluções que satisfazem as condições exigidas pelas normas que regem a prática da engenharia. Nesse contexto, tem-se a otimização, ou programação matemática, que se destaca na matemática como uma área na qual são estudados problemas, muitas vezes práticos, com o intuito de minimizar ou maximizar uma função por meio da definição de variáveis e restrições associadas, identificadas dentro de um conjunto viável. A construção de modelos permite, então, a identificação numérica de melhores índices de performance, que possam auxiliar na tomada de decisões por meio da definição de uma solução ótima, atendendo suas restrições. Diante do exposto, este trabalho tem como objetivo apresentar um algoritmo que determina a seção otimizada de vigas retangulares de concreto armado, estabelecendo o menor custo possível e seguindo as especificações estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2014. De forma a alcançar os objetivos propostos, é apresentada a modelagem do problema atendendo as restrições estabelecidas pela referida norma. Para a implementação computacional do algoritmo de minimização matemática aplicado ao modelo, foi utilizado o *software* MATLAB e a função *fmincon*, presente em sua biblioteca auxiliar de otimização. Nesta função foi utilizado o Método dos Pontos Interiores como método iterativo para determinação da solução ótima do problema restrito. De forma a realizar análises e estabelecer comparativos, dois algoritmos foram implementados contemplando o estabelecido pela ABNT NBR 6118:2014, com e sem verificação de flecha. Os resultados obtidos mostram-se significativos no contexto da otimização do custo dos problemas modelados, e permitem concluir que as restrições de flecha são mais significativas em dimensionamentos de vigas submetidas a esforços reduzidos.

*Palavras chaves:* Otimização estrutural; concreto armado; vigas retangulares.



**Abstract:** In designing a project, a structural engineer uses his knowledge and professional expertise to attend safety, functionality and economy aspects. This stage is not always done in the most economical way, since there are several solutions that satisfy the conditions required by the norms that govern the practice of engineering. In this context, optimization, or mathematical programming, that stands out in mathematics as an area that studies problems, often practical problems, which the objective is minimize or maximize one function by means of determination of variables and associated restriction inside a viable numerical set. The mathematical models construction allows the numerical identification of the best performance index that helps in decision-making process, by means of optimal solution definition that satisfies the required restrictions. In this context, this paper presents a computational algorithm which determines the optimal cross-section of reinforced concrete rectangular beams, finding the lowest possible cost and attending the ABNT NBR 6118:2014 requirements. In order to reach the proposed objective, we present the problem modeling taking to account the cited ABNT standard. For the computational implementation of the mathematical minimization algorithm applied to the model, we use the MATLAB software and fmincon function present in its optimization toolbox. In this function, we use the Interior Point Method as interactive method to determinate the optimal solution of the restricted problem. In order to carry out analyzes and comparative, two computational algorithms where implemented taking to account the ABNT NBR 6118:2014 requirements, with and without the deflection verification. The results are significant in the context of cost optimization of modeling problems, and allow us to conclude that the deflection constraints are more significant in the design of beams subjected to reduced loads.

**Keywords:** *Structural optimization; reinforced concrete, rectangular beams.*

## 1 INTRODUÇÃO

Os sistemas estruturais são constituídos através da disposição racional e adequada de diversos elementos estruturais. Estes têm como função receber e transmitir as solicitações na estrutura, sofrendo deformações como consequência. Dentre os diversos tipos de elementos estruturais, destacam-se as vigas, os pilares, os pórticos, dentre outros. (Sáles et al, 2009)

Giongo (2007) estima que o custo da estrutura, sem considerar as fundações, representa 20% a 25% do custo total de uma obra finalizada. O elevado percentual apresentado ressalta a importância do engenheiro projetista para um dimensionamento apropriado de cada um dos elementos estruturais. No entanto, o dimensionamento das estruturas de concreto armado nem sempre é realizado buscando-se a solução que apresenta o menor custo possível. Na prática, a estrutura é pré-dimensionada e, caso atenda aos requisitos estabelecidos por norma, será a solução adotada (Júnior e Oliveira, 2014).

Vianna (2013) afirma que o trabalho de pré-dimensionamento é feito, em geral, baseado na experiência e intuição dos projetistas. Apesar da qualidade dos profissionais e do fato de que pequenos erros cometidos nesta fase são ajustados na fase de dimensionamento, este processo geralmente não conduz à estrutura mais econômica.

Neste contexto, este trabalho visa apresentar um algoritmo que determina, através dos métodos de otimização matemática, a seção otimizada de vigas retangulares de concreto armado, estabelecendo o menor custo possível e seguindo as especificações estabelecidas pela NBR 6118 (ABNT, 2014).

A seguir, são apresentadas a construção da função objetivo do problema, as restrições de equilíbrio estático e demais restrições impostas pela norma citada a fim de definir o problema de otimização matemática a ser resolvido.

## 2 FUNÇÃO CUSTO

O custo de uma viga retangular de concreto armado pode ser determinado considerando-se os gastos com material e mão de obra para implementação das armaduras longitudinais, concretagem e fôrmas utilizadas. Soares (1997), Vianna (2003) e Nina (2006) estabelecem o custo por unidade de comprimento de tais elementos representado pela Eq. (1):

$$F(b_w, h, A_s, A'_s) = (b_w \cdot h) \cdot C_c + (A_s + A'_s) \cdot \rho_s \cdot C_s + (b_w + 2 \cdot h) \cdot C_F \quad (1)$$

sendo  $F$  a função custo, por unidade de comprimento;  $C_c$  o custo do concreto, por unidade de volume;  $C_s$  o custo do aço, por unidade de massa;  $C_F$  o custo da fôrma, por unidade de área;  $b_w$  a largura da seção transversal;  $h$  a altura da seção transversal;  $\rho_s$  a massa específica do aço; e  $A_s$  e  $A'_s$  as áreas de armadura tracionada e comprimida, respectivamente.

Na Eq. (1) a altura  $h$  pode ainda ser substituída pela soma da altura útil ( $d$ ) da seção e do cobrimento da armadura ( $d'$ ) e, para se obter o custo total do elemento, a Eq. (1) deve ser multiplicada pelo comprimento do elemento.

### 3 CONDIÇÕES DE RESTRIÇÃO

#### 3.1 Restrições de equilíbrio

De acordo com Carvalho e Figueiredo Filho (2014), o cálculo da armadura necessária para resistir a um momento fletor é um dos pontos mais importantes no cálculo das peças de concreto armado. O dimensionamento é feito no estado limite último de ruína, estabelecendo que na seção mais solicitada sejam alcançadas as deformações específicas limites dos materiais. “(...) O estado limite último pode ocorrer tanto pela ruptura do concreto comprimido quanto pela deformação excessiva da armadura tracionada” (Carvalho e Figueiredo Filho, 2014, p. 111).

O equilíbrio de forças em uma seção de viga genérica está representado na Figura 1.

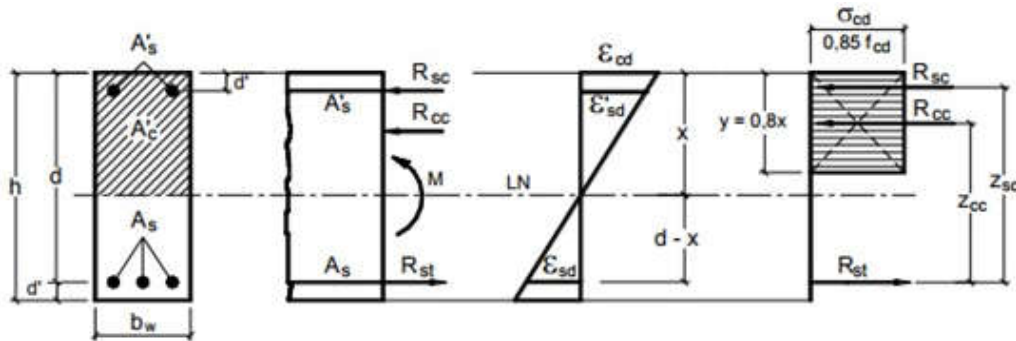


Figura 1. Seção retangular com armadura dupla.

Fonte: Adaptado de Carvalho e Figueiredo Filho (2014).

Escrevendo-se as equações de equilíbrio estático, tem-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{cc} + R_{sc} - R_{st} = 0 \quad (2)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_d = R_{cc} \cdot (d - 0,4 \cdot x) + R_{sc} \cdot (d - d')$$

em que,  $R_{cc}$  é a resultante de compressão proporcionada pelo concreto comprimido;  $R_{sc}$  é a resultante de compressão proporcionada pela armadura comprimida;  $R_{st}$  é a resultante de tração proporcionada pela armadura tracionada;  $M_d$  é o momento fletor solicitante de cálculo que age na seção;  $x$  é a altura da linha neutra; sendo a somatória de momentos calculada em relação ao ponto em que passa a força resultante da armadura tracionada.

As resultantes no concreto ( $R_{cc}$ ) e nas armaduras ( $R_{sc}$  e  $R_{st}$ ), segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2014), são respectivamente:

$$R_{cc} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot 0,8 \cdot x \cdot b_w \quad (4)$$

$$R_{sc} = A'_s \cdot \sigma'_{sd} \quad (5)$$

$$R_{st} = A_s \cdot \sigma_{sd} \quad (6)$$

Nas Eq. (4), (5) e (6),  $f_{cd}$  é a resistência de cálculo à compressão do concreto,  $\sigma'_{sd}$  a tensão de cálculo na armadura comprimida e  $\sigma_{sd}$  a tensão de cálculo na armadura tracionada.

Substituindo-se as Eq. (4), (5) e (6) nas Eq. (2) e (3), obtém-se:

$$0,68 \cdot b_w \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} - A_s \cdot \sigma_{sd} = 0 \quad (7)$$

$$M_d = 0,68 \cdot b_w \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 \cdot x) + A'_s \cdot \sigma'_{sd} \cdot (d - d')$$

### 3.2 Condições de ductilidade

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), a capacidade de rotação dos elementos de estruturas é função da posição da linha neutra no Estado Limite Último (ELU). Quanto menor a relação  $\beta_x = x/d$ , tanto maior será essa capacidade.

A fim de proporcionar a adequada ductilidade em vigas, a posição da linha neutra no ELU, de acordo com a norma citada, deve obedecer aos seguintes limites de acordo com a resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ):

- a)  $\frac{x}{d} \leq 0,45$ , para concretos com  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ;
- b)  $\frac{x}{d} \leq 0,35$ , para concretos com  $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$

### 3.3 Dimensões limites

A NBR 6118 (ABNT, 2014) prescreve valores limites mínimos para as dimensões de elementos estruturais de concreto com o intuito de evitar um desempenho inaceitável para os elementos estruturais e propiciar condições de execução adequadas.

A norma citada determina que a seção transversal das vigas não pode apresentar largura menor que 12 cm, com ressalva de casos excepcionais.

As vigas isostáticas devem apresentar relação  $\ell/h \geq 2$ , enquanto que as vigas contínuas devem apresentar  $\ell/h \geq 3$ , em que  $\ell$  é o comprimento do vão teórico (ou o dobro do comprimento teórico no caso de balanço) e  $h$  é a altura total da viga. Caso contrário, de acordo com a norma citada, a viga deve ser tratada como viga-parede.

### 3.4 Valores limites para armaduras longitudinais de vigas

A armadura mínima de tração, de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014) é atendida se forem respeitadas as taxas mínimas de armadura conforme a seguinte equação:

$$A_{s,\min} = \rho_{\min} \cdot A_c \quad (9)$$

Na Eq. (9)  $A_{s,min}$  a armadura mínima de tração,  $\rho_{min}$  a taxa mínima de armadura, em porcentagem (Figura 2) e  $A_c$  a área de concreto dada por  $A_c = b_w (d + d')$ .

| Forma da seção | Valores de $\rho_{min}^a$ ( $A_{s,min}/A_c$ )<br>% |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                | 20   | 25    | 30    | 35    | 40    | 45    | 50    | 55    | 60    | 65    | 70    | 75    | 80    | 85    | 90    |
| Retangular     | 0,150  | 0,150 | 0,150 | 0,164 | 0,179 | 0,194 | 0,208 | 0,211 | 0,219 | 0,226 | 0,233 | 0,239 | 0,245 | 0,251 | 0,256 |

<sup>a</sup> Os valores de  $\rho_{min}$  estabelecidos nesta Tabela pressupõem o uso de aço CA-50,  $d/h = 0,8$  e  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ . Caso esses fatores sejam diferentes,  $\rho_{min}$  deve ser recalculado.

Figura 2. Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas.

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014)

### 3.5 Armaduras de tração e compressão

A NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda que a soma das armaduras de tração e compressão ( $A_s + A'_s$ ) não pode ser maior que 4% da área de concreto ( $A_c$ ), calculada na região fora da zona de emendas, devendo ser garantidas as condições de ductilidade requerida pela norma.

### 3.6 Estado-Limite de deformação

#### 3.6.1 Momento fletor na seção crítica ( $M_a$ ) e momento de fissuração ( $M_r$ )

Conforme Carvalho e Figueiredo Filho (2010), podem ocorrer duas situações na avaliação de flechas em vigas de concreto armado. No primeiro caso tem-se  $M_a < M_r$  ou seja, o momento fletor na seção crítica é inferior ao momento de fissuração. Desta forma, não haverá fissurações na viga (Estádio I) e a inércia da seção será a própria inércia da seção bruta de concreto.

Na segunda possibilidade, pode-se ter  $M_a \geq M_r$  e, assim, a viga estará fissurada (Estádio II). Tal fissuração afetará diretamente a inércia da seção transversal. Desse modo, para não introduzir a variação de inércia na peça de concreto armado, é necessário utilizar uma inércia que contemple tal situação de maneira aproximada. (Carvalho e Figueiredo Filho, 2010).

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), nos estados limites de serviço, as estruturas trabalham parcialmente nos estádios I e II. O momento de fissuração define a separação entre esses dois comportamentos.



A norma citada estabelece que o momento de fissuração pode ser calculado pela seguinte expressão aproximada:

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \quad (10)$$

sendo  $\alpha$  o fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta igual a 1,2 para seções T ou duplo T, 1,3 para seções I ou T invertido e 1,5 para seções retangulares;  $y_t$  a distância do centro de gravidade da seção transversal à fibra mais tracionada;  $I_c$  o momento de inércia da seção bruta de concreto; e,  $f_{ct}$  a resistência à tração direta do concreto.

### 3.6.2 Flecha imediata

Merlin (2006) define o cálculo da flecha imediata ( $a$ ) para as vigas de concreto armado comumente utilizadas em projetos de engenharia. O cálculo se dá em função do momento de cálculo, do comprimento do vão e da rigidez à flexão equivalente da viga ( $EI_{eq}$ ) e pode ser realizado utilizando-se as expressões apresentadas na Figura 3.

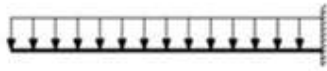
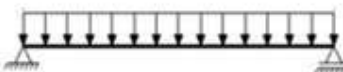
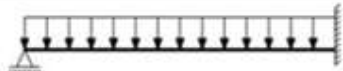

| Vinculação e carregamento   | $a_t$  |
|---|--|
|  | $\frac{M_d \cdot l^2}{4 \cdot EI_{eq}}$          |
|  | $\frac{5 \cdot M_d \cdot l^2}{48 \cdot EI_{eq}}$ |
|  | $\frac{M_d \cdot l^2}{23,08 \cdot EI_{eq}}$      |
|  | $\frac{M_d \cdot l^2}{16 \cdot EI_{eq}}$         |

Figura 3. Deslocamentos elásticos em vigas.

Fonte: Adaptado de Merlin (2006).

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), a expressão para cálculo de rigidez à flexão equivalente, é dada pela Eq. (11).

$$(EI)_{eq,t_0} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (11)$$

em que,  $I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto;  $I_{II}$  é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II, calculado com  $\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}}$ ;  $M_a$  é o momento fletor na seção crítica do vão considerado, ou seja, o momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços, para a combinação de ações considerada nessa avaliação;  $M_r$  é o momento de fissuração do elemento estrutural, cujo valor deve ser reduzido à metade no caso de utilização de barras lisas;  $E_{cs}$  é o módulo de elasticidade secante do concreto;  $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço.

O momento de inércia da seção fissurada é calculado conforme a Eq. a seguir:

$$I_{II} = \frac{b \cdot x_2^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_2)^2 + \alpha_e \cdot A_s' \cdot (x_2 - d')^2 \quad (12)$$

Igualando o momento estático em relação à linha neutra à zero ( $Q_{LN} = 0$ ), resulta-se na expressão que define o cálculo da altura da linha neutra em serviço ( $x_2$ ):

$$\frac{b \cdot x_2^2}{2} - \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_2) + \alpha_e \cdot A_s' \cdot (x_2 - d') = 0 \quad (13)$$

### 3.6.3 Flecha diferida no tempo

A flecha adicional diferida, decorrente das cargas de longa duração em função da fluência, de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), pode ser calculada de maneira aproximada pela multiplicação da flecha imediata pelo fator  $\alpha_f$ , dado pela expressão:

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 \rho'} \quad (14)$$

em que a taxa de armadura comprimida é definida como:

$$\rho' = \frac{A_s'}{b_w \cdot d} \quad (15)$$

sendo, a variação do coeficiente em função do tempo definida como:

$$\Delta \xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (16)$$

com  $\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) \cdot t^{0,32}$  para  $t \leq 70$  meses ou  $\xi(t) = 2$  para  $t > 70$  meses. Nessas expressões,  $t$  representa o tempo em meses em que se deseja obter o valor da flecha diferida e  $t_0$  representa a idade, em meses, relativa à data de aplicação de carga de longa duração.



Segundo a referida norma, a flecha total é obtida multiplicando-se a flecha imediata por  $(1 + \alpha_f)$ .

### 3.7 Deslocamentos limites

Para verificação em serviço do estado limite de deformações excessivas da estrutura, a NBR 6118 (ABNT, 2014) determina para aceitabilidade sensorial visual, o deslocamento limite de  $\ell/250$ , sendo que todos os valores-limites de deslocamentos supõem elementos de vão  $\ell$  suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem. No caso de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço.

## 4 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA MATEMÁTICO

Definidas a função objetivo do problema, Eq. (1), as restrições de equilíbrio estático Eq. (7) e (8), e demais restrições impostas pela NBR 6118 (ABNT, 2014), itens 3.2 ao 3.6, o problema de otimização matemática pode ser assim definido:

Minimizar

$$F(b_w, d, A_s, A'_s, x) = (b_w \cdot (d + d') \cdot C_c + (A_s + A'_s) \cdot \rho_s \cdot C_s + (b_w + 2 \cdot (d + d')) \cdot C_F) \cdot \ell \quad (17)$$

Sujeito a

$$0,68 \cdot b_w \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} - A_s \cdot \sigma_{sd} = 0 \quad (18)$$

$$M_d = 0,68 \cdot b_w \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 \cdot x) + A'_s \cdot \sigma'_{sd} \cdot (d - d') \quad (19)$$

$$\frac{x}{d} \leq 0,45 \quad (20)$$

$$b_w \geq 12 \text{ cm} \quad (21)$$

$$\frac{\ell}{h} \geq 2 \quad (22)$$

$$A_s \geq \rho_{\min} \cdot A_c \quad (23)$$

$$A_s + A'_s \leq 4\% \cdot A_c \quad (24)$$

## 5 METODOLOGIA

Para a solução do problema apresentado foram desenvolvidos dois algoritmos distintos. Ambos foram desenvolvidos no *software* MATLAB com o auxílio da rotina “fmincon” presente em sua biblioteca de otimização. Vale ressaltar que, como opção de método de otimização na rotina, foi definido o método dos pontos interiores.



No primeiro algoritmo, o problema de otimização matemática é solucionado sem considerar a verificação de flecha imposta pela NBR 6118 (ABNT, 2014). As variáveis  $b_w$ ,  $d$ ,  $A_s$  e  $A'_s$  fornecidas pela rotina definem, então, a seção transversal ótima da viga em análise.

No segundo algoritmo, após obtidas as variáveis do problema de otimização matemática, a verificação do deslocamento limite é realizada, conforme descrito no item 3.6. Assim, são definidos o momento resistente da seção, a rigidez à flexão equivalente e a flecha total da viga.

A flecha calculada é então comparada ao deslocamento limite imposto pela norma. Caso seja satisfeita a verificação, a seção ótima é definida pelas variáveis fornecidas pela rotina. Em caso negativo, deve-se realizar uma nova tentativa de otimização. Neste caso, a rotina fixa a largura da seção transversal como sendo a obtida anteriormente e é realizado um incremento de 1 cm na altura útil da seção transversal obtida no passo anterior. O novo problema de otimização é semelhante ao primeiro, com a diferença de que apenas as variáveis  $x$ ,  $A_s$  e  $A'_s$  devem ser otimizadas. Ao final de cada incremento na altura útil da seção deve-se realizar a verificação da flecha. O processo iterativo deverá ser concluído quando a restrição de deslocamento máximo for satisfeita ou quando a função objetivo deixar de diminuir em direções viáveis, respeitando as tolerâncias e atendendo as restrições.

Vale ressaltar que, para a definição da função objetivo, os custos individuais de aço, concreto e fôrmas, foram estabelecidos a partir da tabela do SINAPI - Sistema nacional de pesquisa de custos e índices da construção civil, região de Curitiba, com data referência técnica de 17 de março de 2018.

Para o custo do aço, foi utilizado o item “aço para armação de pilar ou viga de uma estrutura convencional de concreto armado em um edifício de múltiplos pavimentos utilizando aço CA-50, incluindo montagem” de diâmetros variando de 8,0 mm à 16,0 mm, obtendo assim um custo médio de R\$ 5,47/kg.

Para gastos com concreto, considerou-se R\$ 286,94/m<sup>3</sup>, sendo utilizado o item “concretagem de vigas e lajes com  $f_{ck}$  de 20 MPa, para lajes maciças ou nervuradas com uso de bomba em edificação com área média de lajes maior que 20 m<sup>2</sup>, incluindo lançamento, adensamento e acabamento”.

Os custos em relação às fôrmas são de R\$83,97/m<sup>2</sup>, definido pelo item “incluindo montagem e desmontagem de fôrma de viga, escoramento com pontalete de madeira, pé-direito simples, em madeira serrada, com 4 utilizações”.

## 6 RESULTADOS

Os resultados apresentados foram obtidos a partir de simulações numéricas realizadas em uma viga biapoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído em todo o seu comprimento. Os parâmetros de entrada comuns a todas as análises estão definidos na Tabela 1.

**Tabela 1. Parâmetros de entrada**

| Parâmetro   | Valor atribuído        |
|-------------|------------------------|
| $\ell$      | 4 m                    |
| $f_{ck}$    | 20 MPa                 |
| $E_s$       | 210000 MPa             |
| Tipo de aço | CA-50                  |
| $\rho_s$    | 7850 kg/m <sup>3</sup> |
| $f_{yk}$    | 500 MPa                |
| $d'$        | 3 cm                   |

Fonte: Os autores (2018).

Uma primeira análise foi realizada de forma a obter a seção otimizada da viga sem verificar as condições de restrição de flecha. Para tal, foram estabelecidos diversos momentos solicitantes de cálculo e, para cada um deles, foram definidas as variáveis de projeto bem como o custo da seção otimizada. Os resultados obtidos para  $M_d \leq 500 \text{ kN} \cdot \text{m}$  foram organizados na Tabela 2.

**Tabela 2. Otimização sem verificação de flecha**

| Md<br>(kN.m) | Base<br>(cm) | Altura<br>útil (cm) | Altura<br>(cm) | Armadura (cm <sup>2</sup> ) |       |       | $\rho$<br>(%) | Custo<br>(R\$/m) |
|--------------|--------------|---------------------|----------------|-----------------------------|-------|-------|---------------|------------------|
|              |              |                     |                | Tração                      | Comp. | Total |               |                  |
| 100          | 12,00        | 37,47               | 40,47          | 7,16                        | 2,64  | 9,81  | 2,02          | 134,06           |
| 150          | 12,00        | 45,25               | 48,25          | 8,83                        | 3,37  | 12,20 | 2,11          | 160,11           |
| 200          | 12,00        | 51,80               | 54,80          | 10,24                       | 3,99  | 14,22 | 2,16          | 182,08           |
| 250          | 12,14        | 57,57               | 60,57          | 11,49                       | 4,46  | 15,95 | 2,17          | 201,50           |
| 300          | 12,00        | 62,78               | 65,78          | 12,59                       | 5,02  | 17,61 | 2,23          | 218,81           |
| 350          | 12,00        | 67,58               | 70,58          | 13,62                       | 5,47  | 19,09 | 2,25          | 234,88           |
| 400          | 12,00        | 72,04               | 75,04          | 14,58                       | 5,89  | 20,47 | 2,27          | 249,83           |
| 450          | 12,00        | 76,24               | 79,24          | 15,48                       | 6,28  | 21,76 | 2,29          | 263,87           |
| 500          | 12,00        | 80,20               | 83,20          | 16,33                       | 6,65  | 22,98 | 2,30          | 277,13           |

Fonte: Os autores (2018).

A fim de validar os resultados apresentados na Tabela 2, foram dimensionadas as armaduras de tração e compressão a partir de alturas de seção transversal pré-estabelecidas, mantendo-se a largura da viga constante em 12,0 cm. As alturas foram estabelecidas a partir de incrementos de 5 cm. Após dimensionadas, para cada caso foi calculado o custo por metro da viga. Na Figura 4 são ilustradas as curvas de custo *versus* altura de seção transversal para os momentos fletores de cálculo em questão.

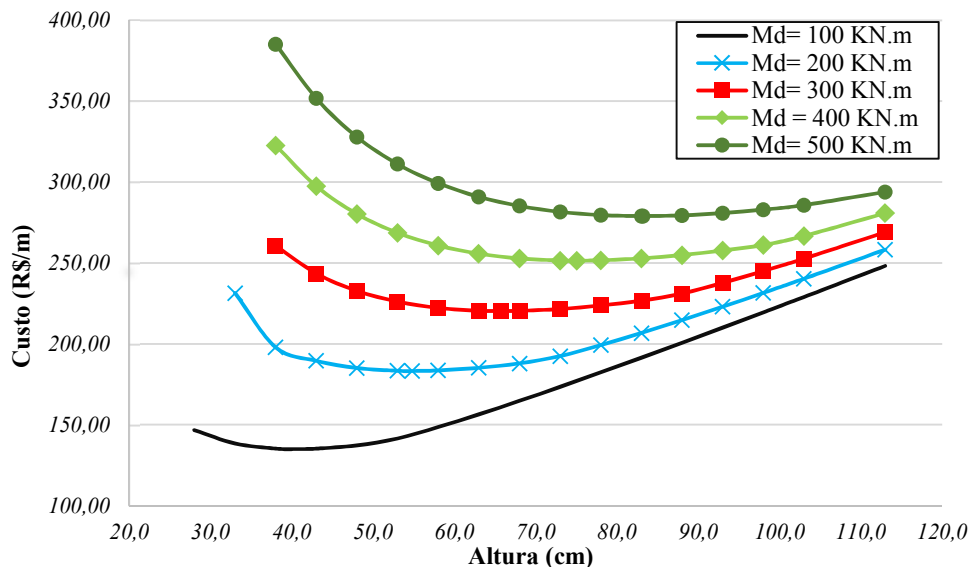


Figura 4. Validação de resultados.

Fonte: Os autores (2018).

A análise da Figura 4 permite concluir que há somente uma seção transversal que define o custo mínimo do elemento estrutural. Outras soluções são viáveis sob o ponto de vista das condições de equilíbrio e restrições de norma. No entanto, todas elas implicam em um maior custo de fabricação.

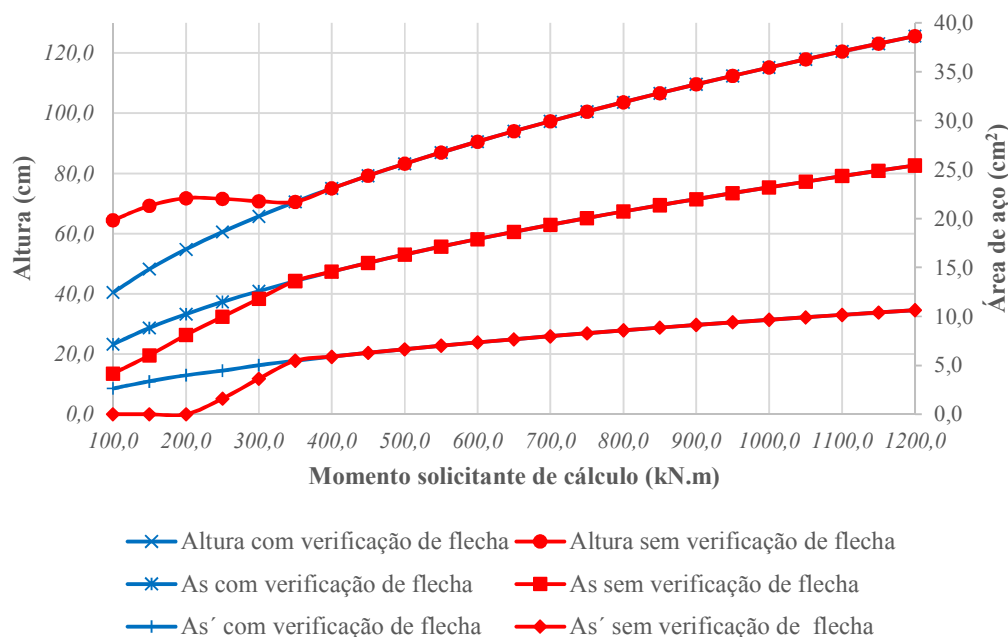
Em um segundo momento, o problema tratado na análise anterior foi novamente estudado, porém considerando-se a restrição de flecha imposta pela NBR 6118 (ABNT, 2014). Para efeitos comparativos, foram adotados os mesmos momentos solicitantes de cálculo estabelecidos na análise anterior. Os resultados das variáveis otimizadas bem como o custo da viga em questão foram organizados na Tabela 3.

Tabela 3. Otimização com verificação de flecha

| Md (kN.m) | Base (cm) | Altura útil (cm) | Altura (cm) | Armadura (cm <sup>2</sup> ) |          |       | ρ (%) | Custo (R\$/m) |
|-----------|-----------|------------------|-------------|-----------------------------|----------|-------|-------|---------------|
|           |           |                  |             | Tração                      | Comp.    | Total |       |               |
| 100       | 12,00     | 61,47            | 64,47       | 4,16                        | 2,79E-06 | 4,16  | 0,54  | 158,41        |
| 150       | 12,00     | 66,25            | 69,25       | 6,03                        | 6,56E-07 | 6,03  | 0,73  | 176,11        |
| 200       | 12,00     | 68,80            | 71,80       | 8,11                        | 4,36E-06 | 8,11  | 0,94  | 190,20        |
| 250       | 12,14     | 68,57            | 71,57       | 9,96                        | 1,60     | 11,56 | 1,33  | 204,96        |
| 300       | 12,00     | 67,78            | 70,78       | 11,81                       | 3,64     | 15,45 | 1,82  | 219,66        |
| 350       | 12,00     | 67,58            | 70,58       | 13,62                       | 5,47     | 19,09 | 2,25  | 234,88        |
| 400       | 12,00     | 72,04            | 75,04       | 14,58                       | 5,89     | 20,47 | 2,27  | 249,83        |
| 450       | 12,00     | 76,24            | 79,24       | 15,48                       | 6,28     | 21,76 | 2,29  | 263,87        |
| 500       | 12,00     | 80,20            | 83,20       | 16,33                       | 6,65     | 22,98 | 2,30  | 277,13        |

Fonte: Os autores (2018).

A Figura 5 traz as curvas de momento solicitante de cálculo por variáveis de projeto (altura de seção transversal e áreas de aço). As curvas ilustram que, para a viga estudada, a verificação de flecha é um fator determinante nos carregamentos mais baixos, enquanto que para carregamentos mais altos, a seção transversal ótima verifica automaticamente a restrição de deslocamento. Tal comportamento é bem representado na junção das curvas para momentos de cálculo a partir de 350 kN·m. Vale ressaltar que a Figura 5 também apresenta as variáveis de projeto para momentos de cálculo definidos entre 500 kN·m e 1200 kN·m.



**Figura 5. Influência da verificação da flecha na otimização estrutural.**

Fonte: Os autores (2018).

Para finalizar, a Figura 6 traz os custos individuais de concreto, aço e fôrma, bem como o custo total da viga otimizada com a verificação de flecha. Analisando-se a figura é possível verificar que, à medida que os esforços aumentam, o custo do aço utilizado tende a crescer em uma taxa maior que o custo do concreto. Isso pode ser explicado observando que, à medida que o momento fletor aumenta, há uma necessidade maior de utilização de armadura de compressão para auxiliar o concreto a resistir a tal esforço. Esse aumento na área de aço de compressão também fica evidenciado na Figura 5.

A Figura 6 também evidencia o alto custo da fôrma na composição do custo total do elemento estrutural. Infelizmente esse é um custo intrínseco ao concreto armado, pois o concreto necessita que seja moldado de acordo com as características geométricas estabelecidas em projeto. Vale lembrar que as fôrmas são reutilizáveis e, assim, seu custo acaba sendo dissolvido na produção de vários elementos estruturais. Ressalta-se que a reutilização de tal material não foi considerada neste trabalho.

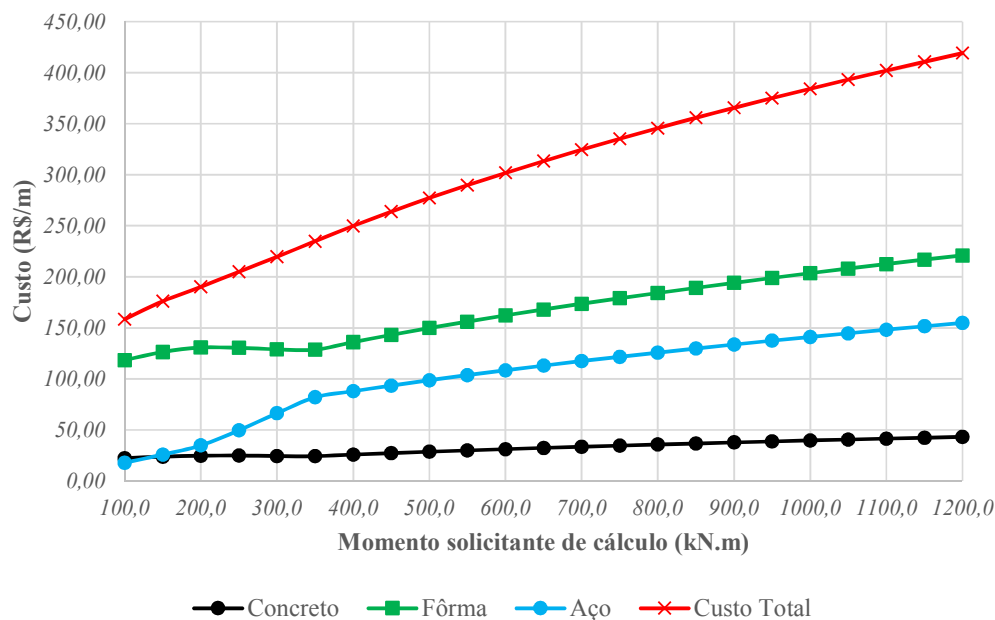


Figura 6. Custos individuais e total para a otimização estrutural com verificação de flecha.

Fonte: Os autores (2018).

## 7 CONCLUSÕES

Os resultados apresentados no trabalho permitem concluir que os objetivos propostos foram alcançados, uma vez que o algoritmo desenvolvido determina os valores ótimos de seções transversais de vigas retangulares de concreto armado. Em termos matemáticos, a rotina “fmincon”, presente na biblioteca de otimização do *software* MATLAB, utilizando o método dos pontos interiores como método de otimização matemática, se mostrou eficiente para aplicação no problema proposto e foi capaz de definir pontos de mínimo local para a função custo, satisfazendo as restrições e atendendo aos critérios de parada.

É importante destacar o comportamento do algoritmo na busca pela solução ótima do problema. Com exceção ao momento fletor de cálculo igual a 250 kN·m, o algoritmo definiu a largura mínima estabelecida em norma como sendo a largura ótima da seção transversal. Além disso, apesar de não explicitado no trabalho, o algoritmo definiu a posição ótima de linha neutra no limite máximo estabelecido em norma ( $0,45 \cdot d$ ), explorando, assim, o máximo permitido para o concreto comprimido.

O comparativo realizado entre os resultados fornecidos pelos algoritmos com e sem a verificação de flecha imposta pela NBR 6118 (ABNT, 2014) evidenciou, para o exemplo abordado, a importância de se verificar o deslocamento limite para carregamentos reduzidos. Nessas situações, a seção transversal otimizada atendendo às demais restrições impostas não apresenta rigidez suficiente para que o elemento estrutural satisfaça tal restrição.





Com relação aos custos individuais de cada material na composição do custo total do elemento, o trabalho evidenciou o alto custo das fôrmas na construção dos elementos estruturais de concreto armado. A utilização de fôrmas compostas por materiais mais resistentes ou até mesmo metálicas, pode, a longo prazo e em função da possibilidade de reutilização, reduzir a participação desse material na composição do custo final do elemento.

Por fim, ressalta-se que alguns critérios de projeto não foram considerados na elaboração deste trabalho. No que se refere às áreas de aço apresentadas e à largura da seção transversal, é necessário que o projetista adeque as bitolas das barras de aço de forma a garantir o correto espaçamento entre as mesmas e entre as barras e as faces do elemento. Nos casos em que há uma grande taxa de armadura pode ser necessário recalcular a seção otimizada com uma largura mais apropriada. O mesmo pode ocorrer em regiões de ancoragem e zonas de transpasses de barras. Já no que se refere à altura da seção transversal, de acordo com o estabelecido na NBR 6118 (ABNT, 2014), é necessário que seja previsto armadura de pele em vigas com altura superior a 60 cm .

## REFERÊNCIAS

- Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto: Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.
- Carvalho, R. C.; Figueiredo Filho, J. R. *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2014*. 4 ed. São Carlos: EdUFSCar, 2014.
- Giongo, J. S. *Concreto Armado: projeto estrutural de edifícios*. São Carlos: EESC-USP, 2007.
- Júnior, F. H. M. M.; Oliveira, D. M. Otimização de vigas de concreto armado com seção retangular submetidas à flexão normal simples. *Construindo*. Belo Horizonte, v. 6, n. 1, Jan/Jun. 2014.
- Merlin, A. J. *Análise probabilística do comportamento ao longo do tempo de elementos parcialmente pré-moldados com ênfase em flechas de lajes com armação treliçada*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.
- Nina, T. C. *Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos planos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.
- Sáles, J. S.; Munaiar Neto, J.; Malite, M.; Dias, A. A.; Gonçalves, R. M. *Sistemas Estruturais: teoria e exemplos*. São Carlos: Editora EESC-USP, 2009.
- Soares, R. C. *Otimização de seções transversais de concreto armado sujeitas à flexão: aplicação a pavimentos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1997.
- Vianna, L. C. C. *Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.