

Modelagem conjunta de risco de taxas de juros de cartões de crédito: Rotativo vs. Parcelado via Marginais, Cópulas e Simulação de Monte Carlo

João Victor Monteiros de Andrade* Leonardo Santos da Cruz†

Abstract

Este artigo propõe um framework de risco conjunto para taxas de juros do crédito ao consumidor, com foco nas modalidades Rotativo e Parcelado. Inicialmente, ajustamos distribuições marginais flexíveis para cada modalidade, selecionando modelos com base em critérios de informação (AIC/BIC) e testes de aderência (Kolmogorov–Smirnov e Anderson–Darling). A adequação marginal é validada via Probability Integral Transform (PIT). Em seguida, a dependência entre as modalidades é modelada por cópulas bivariadas, selecionadas por critérios de ajuste e validadas por testes de goodness-of-fit (GOF). Por fim, simulações de Monte Carlo geram um “gêmeo digital” do sistema para estimar probabilidades conjuntas de eventos extremos de juros. Os resultados indicam dependência positiva moderada e risco conjunto não desprezível de cenários de estresse de crédito.

Palavras-chave: Cópulas; risco conjunto; marginais; PIT; Monte Carlo; juros de crédito.

1 Introdução

O crédito via cartão de crédito é uma das principais fontes de endividamento de curto prazo e, em diversos mercados, constitui um canal sensível a choques macroeconômicos, mudanças nas condições de funding e variações no risco de crédito. No Brasil, destacam-se duas modalidades recorrentes: o crédito Rotativo, tipicamente associado a taxas mais elevadas e maior volatilidade, e o crédito Parcelado, caracterizado por pagamentos em prestações e, em geral, maior previsibilidade relativa.

Embora essas modalidades apresentem dinâmicas próprias, elas podem reagir simultaneamente a fatores comuns, como deterioração da inadimplência, alterações no custo de captação, mudanças regulatórias e ajustes de política monetária. Nesse contexto, torna-se relevante quantificar não apenas o comportamento marginal de cada modalidade, mas também a probabilidade de ocorrência **conjunta** de condições adversas.

A motivação deste estudo é mensurar o **risco conjunto** de cenários em que **ambas as modalidades atingem níveis críticos de juros simultaneamente**. Essa perspectiva é particularmente

*PPGI, Universidade de Brasília (UnB). E-mail: jotandrade98@gmail.com

†PPGI, Universidade de Brasília (UnB). E-mail: email.do.coautor@unb.br

importante em aplicações de *stress testing* e monitoramento macroprudencial, nas quais a vulnerabilidade tende a se manifestar quando eventos extremos ocorrem de forma simultânea. Do ponto de vista microeconômico e de gestão de risco, a probabilidade de co-excedência também é informativa para decisões de precificação, alocação de capital e desenho de políticas de limites, por refletir a chance de estresse simultâneo no portfólio de crédito ao consumo.

Apesar disso, análises empíricas frequentemente tratam o Rotativo e o Parcelado separadamente ou resumem sua associação por correlação linear, o que pode ser inadequado em presença de assimetria, caudas pesadas e dependência não linear [15]. Nesse cenário, medidas de co-excedência oferecem uma forma direta de quantificar estresse simultâneo e comparar cenários de severidade, reduzindo o risco de subestimação do comovimento em episódios adversos.

Diante disso, a pergunta central deste trabalho é: *qual é a probabilidade de co-excedência das taxas de juros do crédito Rotativo e do crédito Parcelado acima de níveis críticos, e em que medida a dependência entre as modalidades eleva (ou reduz) esse risco em relação ao benchmark de independência?*

Para capturar esse comportamento, modelamos a distribuição conjunta das taxas observadas por instituição financeira, indo além de correlações lineares e permitindo representar padrões de dependência não lineares por meio de **marginais paramétricas e cópulas** [11, 23]. Diferentemente de abordagens que assumem normalidade ou se baseiam apenas na correlação de Pearson, adotamos uma decomposição em duas etapas: (i) ajuste marginal paramétrico das taxas em cada modalidade e (ii) modelagem da dependência no espaço uniforme via cópula, conforme o Teorema de Sklar [22, 26]. Essa separação aumenta a flexibilidade do modelo diante de distribuições assimétricas e de caudas mais pesadas, além de permitir caracterizar a dependência de forma mais realista do que sob hipóteses gaussianas.

A partir do modelo ajustado, construímos um *gêmeo digital* via simulação de Monte Carlo, o que possibilita estimar probabilidades conjuntas de excedência e mapear o risco em uma grade de cenários (c_R, c_P) , onde c_R e c_P representam níveis de estresse (por exemplo, thresholds absolutos ou quantis de cauda) para as taxas de juros do Rotativo e do Parcelado. O objeto central de interesse é a métrica de co-excedência

$$\mathcal{R}(c_R, c_P) = \mathbb{P}(X_R > c_R, X_P > c_P), \quad (1)$$

que fornece uma medida direta e interpretável de estresse simultâneo e pode ser comparada a um benchmark de independência $\mathbb{P}(X_R > c_R) \cdot \mathbb{P}(X_P > c_P)$ para quantificar o papel da dependência no risco agregado. Assim, a métrica proposta oferece um instrumento simples e operacional para monitoramento, comparação entre instituições e construção de cenários de estresse no crédito ao consumo.

Escopo e limitações. Este estudo utiliza um recorte transversal das taxas por instituição financeira no instante de extração, o que permite avaliar a dependência contemporânea entre Rotativo e Parcelado, mas não captura variação temporal na estrutura de dependência. Assim, os resultados devem ser interpretados como evidência *cross-section* para o período analisado, e não como dinâmica ao longo do tempo. Além disso, embora o procedimento de seleção e teste de aderência forneça suporte estatístico ao modelo escolhido, as probabilidades conjuntas estimadas dependem das hipóteses

paramétricas adotadas para as marginais e para a cópula. Extensões naturais incluem a construção de um painel temporal para avaliar estabilidade dos parâmetros e dependência variante no tempo, bem como a incorporação de covariáveis macroeconômicas na estrutura de dependência.

1.1 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são:

- **Construção e pareamento de base (ETL) com dados públicos**, resultando em uma amostra harmonizada por instituição financeira com $n = 55$ observações válidas e comparáveis entre Rotativo e Parcelado;
- **Modelagem em duas etapas (marginais + cópula)** para taxas com suporte positivo, com seleção de marginais via **AIC/BIC** e diagnósticos de aderência (incluindo **KS/AD**), organizados por **ranking** para decisão final;
- **Validação das marginais via PIT** ($u = \hat{F}(x)$), com verificação de uniformidade por **KS contra** $U(0, 1)$, assegurando consistência da transformação para o espaço uniforme antes do ajuste da cópula [14];
- **Modelagem e validação da dependência via cópulas bivariadas**, com seleção por **AIC** e teste de aderência por **GOF** (método de Kendall com bootstrap $B = 1000$), permitindo capturar dependências não lineares de forma estatisticamente controlada [17];
- **Mensuração e visualização do risco conjunto** $\mathcal{R}(c_R, c_P)$ por **Monte Carlo** ($N = 10,000$), incluindo (i) um **mapa em grade de cenários** (c_R, c_P) e (ii) **intervalos de confiança de Wilson (95%)** para quantificar incerteza amostral [9], além de comparação com o **benchmark de independência** $\mathbb{P}(X_R > c_R) \cdot \mathbb{P}(X_P > c_P)$.

1.2 Organização do artigo

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta as modalidades de crédito em cartão e a motivação para a mensuração do risco conjunto; a Seção 3 descreve os dados, o processo de tratamento e o pareamento das instituições; a Seção 4 apresenta a metodologia, incluindo o ajuste e a seleção das distribuições marginais, a validação via PIT, a modelagem por cópulas e os procedimentos de simulação e cálculo do risco conjunto; a Seção 5 reporta os resultados empíricos; a Seção 6 discute os principais achados, suas implicações, limitações e possíveis extensões; por fim, a Seção 7 conclui o estudo.

2 Modalidades de Crédito no Cartão: Rotativo vs Parcelado

Esta seção descreve as duas modalidades analisadas e discute por que o risco conjunto, definido na Eq. (1), é uma medida relevante para avaliar cenários de estresse no crédito ao consumidor.

2.1 Crédito Rotativo

O crédito Rotativo corresponde ao financiamento do saldo devedor remanescente após o pagamento parcial da fatura do cartão de crédito [3, 12]. No arranjo regulatório vigente, esse financiamento pode ocorrer na modalidade rotativa apenas até o vencimento da fatura subsequente [12]. Trata-se de uma modalidade associada a custo de crédito elevado nas estatísticas do Banco Central, o que reforça sua relevância empírica para a análise de risco [6, 4]. Do ponto de vista da modelagem, espera-se que a distribuição das taxas apresente assimetria, dispersão relevante e possível concentração em valores extremos, o que motiva o uso de distribuições marginais flexíveis com suporte em \mathbb{R}^+ .

2.2 Crédito Parcelado

O crédito Parcelado compreende o parcelamento de compras realizadas com cartão de crédito ou dos valores referentes à fatura, com incidência de juros [3]. Além disso, após o prazo do rotativo, o saldo remanescente pode ser financiado por meio de linha de crédito parcelada em condições mais vantajosas para o cliente do que aquelas praticadas no crédito rotativo [12]. Nas estatísticas do Banco Central, as taxas do cartão parcelado tendem a situar-se abaixo das observadas no rotativo, embora permaneçam elevadas em termos absolutos [6, 5]. Essa diferença sugere que Parcelado e Rotativo podem exibir comportamentos marginais distintos, bem como padrões próprios de associação, o que reforça a conveniência de uma modelagem conjunta que não imponha dependência linear nem hipótese gaussiana.

2.3 Por que mensurar o risco conjunto?

A observação simultânea de taxas elevadas em Rotativo e Parcelado pode sinalizar condições mais restritivas no crédito ao consumidor e, portanto, justificar o monitoramento da sua co-movimentação. [4] Nesse contexto, a métrica $\mathcal{R}(c_R, c_P)$ oferece uma forma objetiva de quantificar a probabilidade de **co-excedência** acima de thresholds (c_R, c_P) . Ao variar (c_R, c_P) , é possível mapear regiões de maior severidade e comparar cenários de risco, avaliando não apenas o nível de cada modalidade isoladamente, mas também a probabilidade de estresse simultâneo.

3 Dados e Preparação (ETL)

Os dados analisados consistem em taxas de juros mensais reportadas por instituição financeira para as modalidades Rotativo (crédito rotativo) e Parcelado (crédito parcelado). As séries foram extraídas do sistema público de estatísticas do Banco Central do Brasil (BCB) na quinta-feira, 22 de janeiro de 2026, às 01:29:31, a partir das consultas oficiais para Rotativo e Parcelado [8, 7]. Todas as etapas de preparação, tratamento e análises estatísticas subsequentes foram realizadas em R.

Como as duas extrações podem apresentar diferenças de formatação e cobertura de instituições, foi adotado um fluxo de preparação de dados para assegurar consistência, comparabilidade e pareamento entre as modalidades.

3.1 Inspeção inicial e harmonização

A base de Parcelado continha inicialmente 58 registros, enquanto a de Rotativo continha 60 registros, refletindo as instituições disponíveis no instante de extração e possíveis diferenças entre as listas reportadas em cada modalidade.

Nesta etapa, procedeu-se à harmonização dos identificadores das instituições e à padronização do formato das taxas de juros, garantindo que ambas as bases estivessem no mesmo padrão de interpretação e unidade (% a.m.), sem ambiguidades de escrita ou representação numérica.

3.2 Pareamento entre modalidades

Sempre que disponível e consistente, uma informação temporal comum às duas bases permitiria o pareamento por **instituição e data**. No conjunto analisado, entretanto, o pareamento foi realizado exclusivamente pelo **nome da instituição financeira**, assegurando que cada observação de Rotativo fosse associada à sua correspondente em Parcelado dentro do mesmo corte transversal.

3.3 Limpeza final e construção da amostra pareada

Para assegurar uma amostra válida e compatível com o suporte positivo das distribuições marginais, foram removidas observações com valores faltantes, não finitos ou não positivos, mantendo-se apenas taxas estritamente maiores que zero.

Quando houve mais de uma observação associada à mesma instituição dentro de uma modalidade, os registros foram consolidados de forma a evitar duplicidades no pareamento. Em seguida, as duas bases foram combinadas retendo apenas as instituições presentes simultaneamente em Rotativo e Parcelado. Como consequência, algumas instituições foram descartadas por constarem em apenas uma das modalidades no instante de extração.

Após a interseção e a limpeza final, obteve-se uma amostra com $n = 55$ pares válidos.

3.4 Amostra final pareada

A amostra final é composta por n observações pareadas:

$$\{(x_i^{(R)}, x_i^{(P)})\}_{i=1}^n, \quad (2)$$

em que $x_i^{(R)}$ representa a taxa do Rotativo e $x_i^{(P)}$ a taxa do Parcelado para a mesma instituição financeira. No conjunto utilizado neste estudo, $n = 55$, caracterizando um recorte transversal (*cross-section*) no instante de extração, com observações simultâneas nas duas modalidades.

A Tabela 1 apresenta os valores observados de Rotativo e Parcelado para cada instituição incluída na amostra. A Figura 1 mostra uma visualização bivariada das taxas, com a dispersão conjunta e os histogramas marginais empíricos, oferecendo uma visão inicial do comovimento entre as modalidades e da heterogeneidade entre instituições.

Table 1: Taxas de juros observadas por instituição: Rotativo vs Parcelado (% a.m.).

Instituições (1)			Instituições (2)		
Instituição	Rotativo	Parcelado	Instituição	Rotativo	Parcelado
DM SCFI	24,71	11,75	BCO MERCANTIL DO BRASIL S.A.	15,34	2,56
BCO CREFISA S.A.	22,07	11,55	SCFI EFÍ S.A.	15,14	6,45
PEFISA S.A. - C.F.I.	22,02	14,21	GOLCRED S/A - CFI	15,14	5,98
CALCRED S.A.	21,41	12,38	KREDILIG S.A. - CFI	15,04	5,43
NEON FINANCEIRA - SCFI S.A.	21,05	10,24	BCO BMG S.A.	14,92	2,88
BANCO PAN	20,43	10,19	BCO BRADESCO S.A.	14,18	6,78
MIDWAY S.A. - SCFI	20,08	13,17	ITAÚ UNIBANCO HOLDING S.A.	13,83	9,26
WILL FINANCEIRA S.A.CFI	19,98	13,10	BCO DO BRASIL S.A.	13,10	9,21
REALIZE SCFI S.A.	19,09	14,72	BCO BANESTES S.A.	12,95	11,37
BANCO DIGIO	19,04	12,48	NU FINANCEIRA S.A. CFI	12,84	9,00
BCO DO EST. DE SE S.A.	19,00	19,00	GAZINCRED S.A. SCFI	12,05	12,05
BCO BV S.A.	17,48	11,07	CAIXA ECONOMICA FEDERAL	12,04	8,58
BCO SENFF S.A.	17,47	14,39	ASA SCFI S.A.	11,99	7,25
LUIZACRED S.A. SCFI	16,88	10,99	BCO DO NORDESTE DO BRASIL S.A.	11,88	7,10
BANCO INVESTCRED UNIBANCO S.A.	16,80	11,06	BCO SAFRA S.A.	11,34	8,72
CREDIARE CFI S.A.	16,79	12,21	BANCO BTG PACTUAL S.A.	11,04	5,70
FIN. ITAU CBD CFI	16,68	11,34	HS FINANCEIRA	10,65	6,49
BCO SANTANDER (BRASIL) S.A.	15,75	10,19	BCO XP S.A.	10,17	7,61
BCO TRIANGULO S.A.	22,03	8,53	RP FINANCEIRA	9,82	0,08
BCO AFINZ S.A. - BM	19,72	8,85	BANCO SICOOB S.A.	9,76	5,67
PICPAY BANK - BANCO MÚLTIPLO S.A	19,69	7,56	BCO RENDIMENTO S.A.	9,16	6,98
VIA CERTA FINANCIADORA S.A. - CFI	19,05	4,99	BANCO GENIAL	9,08	4,93
BCO CSF S.A.	18,72	9,04	BCO STELLANTIS S.A.	9,07	7,68
BANCO BRADESCARD	18,24	7,51	ZEMA CFI S/A	9,06	7,58
PORTOSEG S.A. CFI	16,84	9,26	BCO AGIBANK S.A.	8,59	5,47
BCO C6 S.A.	16,69	5,83	BANCO BARI S.A.	7,04	5,65
BCO DO EST. DO PA S.A.	16,31	7,86	BCO DAYCOVAL S.A	5,27	3,26
BCO DO ESTADO DO RS S.A.	15,50	6,92			

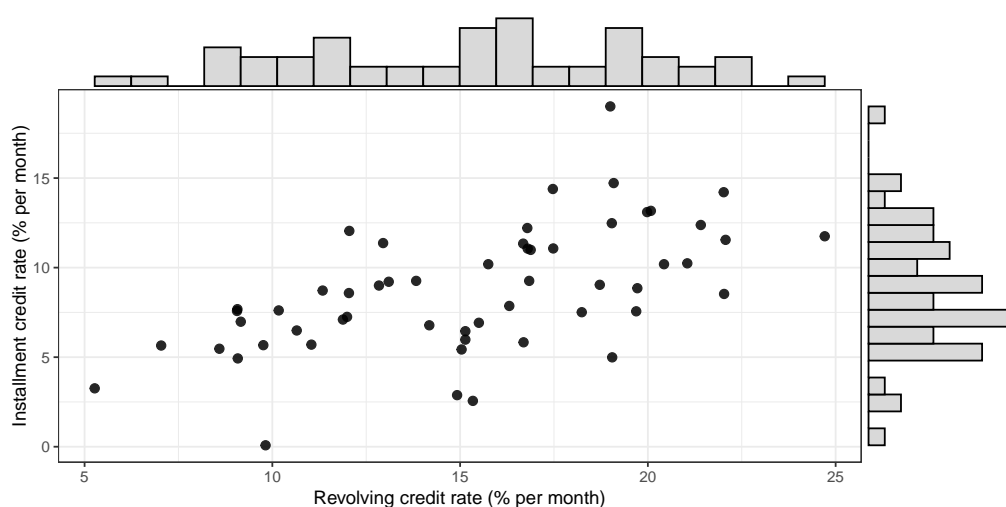


Figure 1: Dispersão bivariada das taxas observadas por instituição: Rotativo (eixo x) versus Parcelado (eixo y), com histogramas marginais empíricos.

4 Metodologia

4.1 Ajuste e seleção de marginais

Como as taxas são positivas e assimétricas, ajustamos distribuições contínuas com suporte em \mathbb{R}_+ via máxima verossimilhança (MLE) [24]. Para cada série, avaliamos um conjunto amplo de candidatos: *Weibull*, *Gamma*, *Lognormal*, *Exponencial*, *Log-logística*, *Burr XII*, *Fréchet* e *Inversa Gaussiana*. Algumas famílias exigem inicialização e restrições de parâmetros para estabilidade numérica, sendo adotado um otimizador com limites inferiores para evitar valores degenerados.

Seja $\ell(\hat{\theta})$ o log-verossimilhança maximizado e k o número de parâmetros do modelo. Os critérios de informação utilizados foram [1, 25]:

$$\text{AIC} = 2k - 2\ell(\hat{\theta}), \quad \text{BIC} = \log(n)k - 2\ell(\hat{\theta}). \quad (3)$$

Além disso, avaliamos aderência por testes baseados na função de distribuição ajustada \hat{F} :

- **KS (Kolmogorov–Smirnov)**: estatística e p-valor [21];
- **AD (Anderson–Darling)**: estatística e p-valor [2].

Para evitar instabilidades numéricas nos testes (por exemplo, quando $\hat{F}(x)$ retorna exatamente 0 ou 1), aplicamos um *clamping* em um intervalo aberto $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ com ε pequeno.

Como decisão final, utilizamos um **score agregado por ranking**, somando as posições relativas de AIC, KS e AD:

$$\text{Score} = \text{rank}(\text{AIC}) + \text{rank}(\text{KS}) + \text{rank}(\text{AD}), \quad (4)$$

onde menor score indica melhor equilíbrio entre parcimônia e aderência. Esse procedimento selecionou **Weibull** como melhor marginal para Rotativo e **Burr XII** como melhor marginal para Parcelado no conjunto analisado.

4.2 Validação por PIT (Probability Integral Transform)

Após o ajuste marginal \hat{F} , transformamos cada observação para o domínio uniforme por meio do *Probability Integral Transform* (PIT) [14]:

$$u_i = \hat{F}(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Sob um modelo marginal bem especificado, espera-se que

$$u_i \sim \text{Uniforme}(0, 1), \quad (6)$$

o que permite separar o problema de dependência do ajuste marginal.

Para evitar problemas numéricos em etapas subsequentes, os valores transformados foram limitados ao intervalo $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$, com $\varepsilon = 10^{-12}$.

A validação do PIT foi conduzida por:

- inspeção qualitativa (verificação de uniformidade aproximada dos valores em $(0, 1)$);

- teste de Kolmogorov–Smirnov contra $U(0, 1)$.

Como o teste KS pode apresentar avisos em presença de empates numéricos, adicionamos um ruído extremamente pequeno (*jitter*) antes da aplicação do teste, preservando a distribuição de forma praticamente inalterada:

$$u_i^* = u_i + \eta_i, \quad \eta_i \sim \text{Uniforme}(-10^{-10}, 10^{-10}). \quad (7)$$

Assim, o PIT fornece uma checagem objetiva do ajuste marginal e produz pseudo-observações adequadas para o ajuste da cópula.

4.3 Cópulas e dependência

Pelo Teorema de Sklar [26], a distribuição conjunta de (X_R, X_P) pode ser decomposta em marginais e cópula:

$$F_{R,P}(x_R, x_P) = C(F_R(x_R), F_P(x_P)), \quad (8)$$

onde $C(\cdot, \cdot)$ captura exclusivamente a dependência entre as variáveis no espaço uniforme, ver também [22]. A estimação da cópula é realizada no domínio dos pseudo-dados:

$$u_i = \hat{F}_R(x_i^{(R)}), \quad v_i = \hat{F}_P(x_i^{(P)}), \quad (9)$$

e a seleção do melhor modelo é feita por máxima verossimilhança dentro de um conjunto abrangente de famílias candidatas, utilizando o critério AIC como regra de escolha. No estudo, a cópula selecionada foi a **Frank**, com parâmetro estimado $\hat{\theta}$ e medida de dependência $\hat{\tau}$ de Kendall reportados na comparação entre famílias. Por construção, a Frank não impõe dependência assimétrica de cauda (isto é, dependência de cauda superior e inferior nulas), o que é coerente quando não há evidência de co-movimentos extremos sistemáticos em apenas uma cauda.

4.4 Validação de aderência da cópula (GOF)

Após selecionar a família de cópula por máxima verossimilhança (critério AIC), avaliamos a qualidade do ajuste por meio de um teste de bondade de ajuste (Goodness-of-Fit, GOF) baseado no *processo de Kendall* [16, 17]. Esse procedimento compara a dependência empírica observada no espaço uniforme com a dependência implicada pela cópula ajustada, quantificando a discrepância por duas estatísticas complementares:

- **CvM** (Cramér–von Mises), que integra o erro quadrático ao longo do domínio [13, 27];
- **KS** (Kolmogorov–Smirnov), que captura o maior desvio observado.

Os p -valores são obtidos por *bootstrap* paramétrico com $B = 1000$ reamostragens. No presente estudo, os p -valores foram elevados, de modo que não há evidência estatística para rejeitar, ao nível de significância usual (por exemplo, 5%), a hipótese de que a cópula ajustada descreve adequadamente a dependência observada. Esse resultado sustenta o uso do modelo nas etapas de simulação e avaliação de risco conjunto.

4.5 Simulação Monte Carlo (Gêmeo digital)

Com as marginais selecionadas \hat{F}_R e \hat{F}_P e a cópula ajustada \hat{C} , construímos um *gêmeo digital* para o par (X_R, X_P) , capaz de reproduzir simultaneamente: **(i)** o comportamento marginal de cada série e **(ii)** o padrão de dependência observado entre elas.

O procedimento de simulação é dado por:

1. gerar pares uniformes correlacionados $(U_j, V_j) \sim \hat{C}$, para $j = 1, \dots, N$;
2. retornar ao espaço original por meio da transformação inversa (quantis):

$$X_j^{(R)} = \hat{F}_R^{-1}(U_j), \quad X_j^{(P)} = \hat{F}_P^{-1}(V_j); \quad (10)$$

3. obter a amostra sintética $\{(X_j^{(R)}, X_j^{(P)})\}_{j=1}^N$, utilizada para quantificação de risco conjunto.

No experimento computacional, utilizamos $N = 10.000$ simulações, número suficiente para estabilizar estimativas de probabilidades conjuntas em níveis moderados e permitir análises em grade de cenários [18].

4.6 Definição do risco conjunto e estimação

Definimos o risco conjunto como a probabilidade de excedência simultânea acima de thresholds (c_R, c_P) :

$$\mathcal{R}(c_R, c_P) = \mathbb{P}(X_R > c_R, X_P > c_P). \quad (11)$$

Com a amostra Monte Carlo, o estimador natural é:

$$\hat{\mathcal{R}}(c_R, c_P) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{I}(X_j^{(R)} > c_R, X_j^{(P)} > c_P). \quad (12)$$

Como cenário base ilustrativo (conforme implementado no script), adotamos os cortes $c_R = 15\%$ para o Rotativo e $c_P = 10\%$ para o Parcelado, estimando diretamente:

$$\hat{\mathcal{R}}(15\%, 10\%) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{I}(X_j^{(R)} > 15, X_j^{(P)} > 10). \quad (13)$$

Além do cenário pontual, construímos uma **grade de cenários** $\{c_R\} \times \{c_P\}$ para mapear a superfície de risco conjunto, obtendo a matriz:

$$\hat{\mathcal{R}}(c_R, c_P) \text{ para múltiplos pares de thresholds.} \quad (14)$$

Para quantificar a incerteza estatística em cada célula da grade, calculamos intervalos de confiança de 95% para a proporção K/N usando o método de Wilson (robusto mesmo para probabilidades próximas de 0 ou 1), onde K representa o número de excedências simultâneas observadas na simulação. Assim, cada par (c_R, c_P) é reportado com estimativa pontual e intervalo plausível associado.

Opcionalmente, o erro padrão de Monte Carlo pode ser aproximado por:

$$SE_{MC} \approx \sqrt{\frac{\widehat{\mathcal{R}}(1 - \widehat{\mathcal{R}})}{N}}. \quad (15)$$

4.7 Cálculo direto do risco conjunto via modelo (marginais + cópula)

Além da estimação por Monte Carlo, também é possível calcular a probabilidade de excedência simultânea $\mathcal{R}(c_R, c_P) = \mathbb{P}(X_R > c_R, X_P > c_P)$ de forma **direta** a partir do modelo paramétrico ajustado.

Pelo Teorema de Sklar, a distribuição conjunta pode ser escrita como

$$F_{R,P}(x_R, x_P) = C(F_R(x_R), F_P(x_P)), \quad (16)$$

onde F_R e F_P são as funções de distribuição acumulada marginais e C é a cópula selecionada. Para thresholds (c_R, c_P) , definimos

$$u = \widehat{F}_R(c_R), \quad v = \widehat{F}_P(c_P). \quad (17)$$

Como $C(u, v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v)$ representa a probabilidade conjunta no domínio uniforme, podemos obter a probabilidade de excedência simultânea por complemento:

$$\mathcal{R}(c_R, c_P) = \mathbb{P}(X_R > c_R, X_P > c_P) = 1 - u - v + \widehat{C}(u, v; \hat{\theta}). \quad (18)$$

Na prática, u e v são computados a partir das marginais ajustadas (por exemplo, Weibull para Rotativo e Burr XII para Parcelado). Para evitar instabilidades numéricas quando u ou v se aproximam de 0 ou 1, utilizamos *clamping*, isto é, restringimos u e v ao intervalo $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ para um $\varepsilon > 0$ pequeno. Em seguida, $\widehat{C}(u, v; \hat{\theta})$ é avaliada por meio da função distribuição acumulada da cópula estimada.

Dessa forma, obtemos uma estimativa paramétrica fechada para o risco conjunto, que: **(i)** elimina o erro de Monte Carlo, **(ii)** é computacionalmente eficiente para grades extensas de thresholds e **(iii)** serve como validação cruzada dos resultados obtidos por simulação.

Por fim, o cálculo direto pode ser resumido como:

$$\widehat{\mathcal{R}}(c_R, c_P) = 1 - \widehat{F}_R(c_R) - \widehat{F}_P(c_P) + \widehat{C}(\widehat{F}_R(c_R), \widehat{F}_P(c_P); \hat{\theta}), \quad (19)$$

permitindo avaliar, por exemplo, o cenário base $(c_R, c_P) = (15\%, 10\%)$ de forma imediata.

4.8 Especificação paramétrica das marginais selecionadas

Após o ajuste por máxima verossimilhança e a seleção com base em critérios de informação (AIC/BIC) e testes de aderência (KS/AD), as distribuições escolhidas para descrever as marginais foram: **Weibull** para o crédito Rotativo e **Burr XII** para o crédito Parcelado.¹ Ambas possuem suporte em \mathbb{R}_+ e flexibilidade suficiente para acomodar assimetria e diferentes graus de dispersão nas taxas observadas.

¹Por simplicidade de notação, omitimos o símbolo de estimação nos parâmetros e nas distribuições ajustadas ao longo desta subseção. Assim, expressões como F_R , F_P , λ , β , α , c , κ e θ devem ser interpretadas como referentes às respectivas quantidades estimadas.

4.8.1 Marginal do Rotativo: Weibull

Modelamos X_R (taxa do Rotativo) por uma distribuição Weibull com parâmetros de escala $\lambda > 0$ e forma $\beta > 0$ [28, 19]. Sua função densidade de probabilidade (PDF) é dada por:

$$f_R(x) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\beta\right], \quad x \geq 0, \quad (20)$$

e a função de distribuição acumulada (CDF) correspondente é:

$$F_R(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\beta\right], \quad x \geq 0. \quad (21)$$

A distribuição Weibull é uma escolha conveniente para modelar variáveis positivas, pois admite diferentes formatos conforme o parâmetro de forma β [19].

4.8.2 Marginal do Parcelado: Burr XII

Para X_P (taxa do Parcelado), utilizamos uma distribuição Burr XII, família flexível para variáveis positivas, capaz de acomodar assimetria e diferentes comportamentos de cauda [10, 20]. Adotamos parâmetro de escala $\alpha > 0$ e parâmetros de forma $c > 0$ e $\kappa > 0$. A CDF da Burr XII pode ser escrita como:

$$F_P(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^c\right)^{-\kappa}, \quad x \geq 0, \quad (22)$$

e sua PDF é:

$$f_P(x) = \frac{c\kappa}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{c-1} \left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^c\right)^{-(\kappa+1)}, \quad x \geq 0. \quad (23)$$

Essa família oferece flexibilidade adicional para representar heterogeneidade e assimetria nas taxas observadas do crédito parcelado [20].

4.9 Distribuição conjunta final via cópula de Frank

Uma vez definidas as marginais F_R e F_P , a dependência entre Rotativo e Parcelado é modelada por uma cópula C . Pelo Teorema de Sklar, a função de distribuição conjunta pode ser escrita como [26, 22]:

$$F_{R,P}(x_R, x_P) = C(F_R(x_R), F_P(x_P)). \quad (24)$$

No presente estudo, a família selecionada foi a **cópula de Frank**, adequada para capturar dependência simétrica e dependência de cauda nula ($\lambda_U = \lambda_L = 0$) [22]. Sua forma fechada é dada por:

$$C_{\text{Frank}}(u, v; \theta) = -\frac{1}{\theta} \log \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right], \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (25)$$

onde $u, v \in (0, 1)$ e θ controla a intensidade da dependência ($\theta > 0$ indicando associação positiva).

Assim, o modelo conjunto final pode ser escrito explicitamente como:

$$F_{R,P}(x_R, x_P) = C_{\text{Frank}}(F_R(x_R; \lambda, \beta), F_P(x_P; \alpha, c, \kappa); \theta). \quad (26)$$

Além da CDF conjunta, a densidade conjunta admite a decomposição padrão:

$$f_{R,P}(x_R, x_P) = c(u, v; \theta) f_R(x_R) f_P(x_P), \quad u = F_R(x_R), \quad v = F_P(x_P), \quad (27)$$

onde $c(u, v; \theta)$ denota a densidade da cópula, isto é, a derivada de segunda ordem de C .

Finalmente, a probabilidade de excedência simultânea acima de thresholds (c_R, c_P) pode ser escrita como:

$$\mathcal{R}(c_R, c_P) = \mathbb{P}(X_R > c_R, X_P > c_P) = 1 - F_R(c_R) - F_P(c_P) + C_{\text{Frank}}(F_R(c_R), F_P(c_P)), \quad (28)$$

o que permite calcular o risco conjunto diretamente a partir do modelo ajustado.

5 Resultados

5.1 Seleção e ajuste das marginais

As Tabelas 2 e 3 apresentam as métricas de ajuste para as distribuições candidatas das séries de crédito Rotativo e Parcelado.

Table 2: Métricas de ajuste para a série **Rotativo**.

Modelo	AIC	BIC	KS	p-valor KS	AD	p-valor AD
Weibull	322,48	326,50	0,0772	0,8983	0,3528	0,8935
Burr XII	324,55	330,58	0,0799	0,8738	0,3651	0,8820
Gamma	327,06	331,07	0,1111	0,5054	0,6952	0,5621
Lognormal	330,94	334,96	0,1307	0,3046	0,9481	0,3853
Log-logística	331,74	335,75	0,0962	0,6890	0,8665	0,4349
Inv. Gaussiana	331,34	335,35	0,1368	0,2545	1,0092	0,3521
Fréchet	351,22	355,23	0,1683	0,0886	2,2275	0,0693
Exponencial	411,87	413,88	0,3938	≈ 0	12,5008	≈ 0

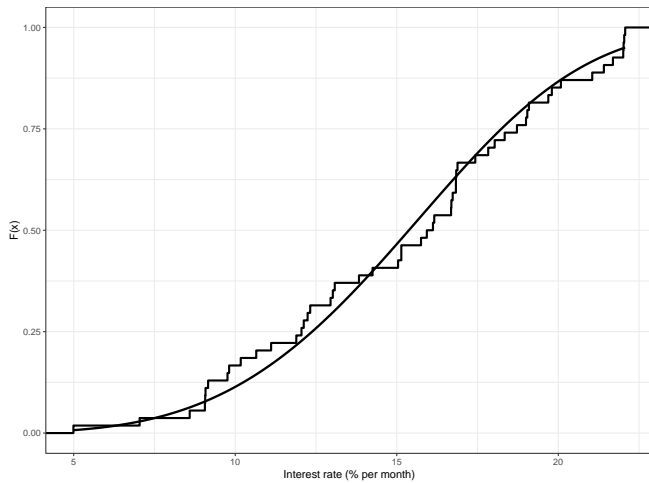
Table 3: Métricas de ajuste para a série **Parcelado**.

Modelo	AIC	BIC	KS	p-valor KS	AD	p-valor AD
Burr XII	304,93	310,95	0,0934	0,7230	0,5355	0,7101
Weibull	302,84	306,86	0,0951	0,7020	0,5466	0,6991
Log-logística	315,12	319,14	0,0974	0,6733	0,9311	0,3951
Gamma	315,57	319,58	0,1425	0,2143	1,6015	0,1541
Lognormal	349,38	353,39	0,2158	0,0119	4,2611	0,0066
Exponencial	350,33	352,34	0,3588	≈ 0	9,2659	≈ 0
Fréchet	413,61	417,62	0,3448	≈ 0	10,7353	≈ 0
Inv. Gaussiana	416,59	420,60	0,4687	≈ 0	16,6366	≈ 0

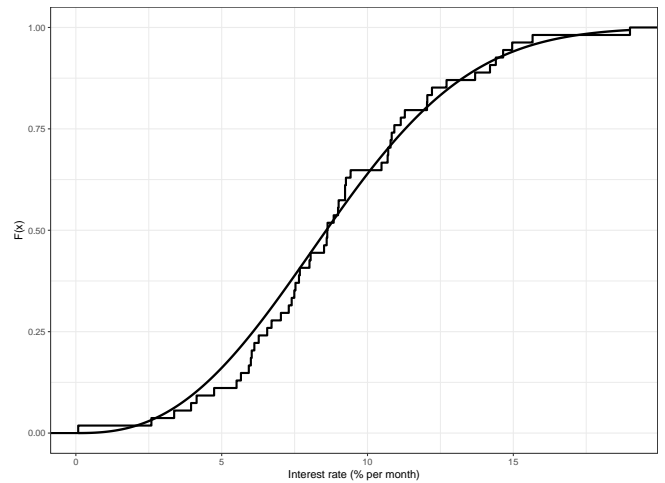
5.2 ECDF vs CDF e gráficos P–P (validação visual)

A Figura 5.2 apresenta uma validação visual das distribuições marginais ajustadas. Na linha superior, os painéis Figura 5.2a e Figura 5.2b comparam a ECDF (função de distribuição empírica) com a CDF teórica ajustada para as taxas de juros do crédito rotativo e do crédito parcelado, respectivamente. Com base no critério combinado de seleção (AIC + KS + AD), a marginal do crédito rotativo foi melhor descrita por uma **Weibull** (Figura 5.2a), enquanto a marginal do crédito parcelado foi melhor descrita por uma **Burr XII** (Figura 5.2b). Observa-se boa concordância entre ECDF e CDF ao longo da maior parte do suporte, sugerindo ajuste satisfatório.

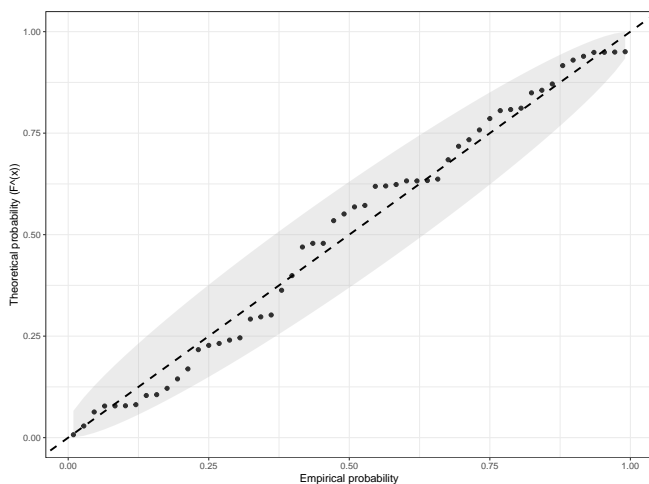
Na linha inferior, os painéis Figura 5.2c e Figura 5.2d exibem os gráficos P–P (probabilidade empírica versus probabilidade teórica) com bandas de confiança de 95%. Em ambos os casos, a maior parte dos pontos permanece dentro da faixa esperada de incerteza, o que sustenta a adequação das marginais ajustadas e é consistente com os testes de aderência (KS/AD) e com a validação via PIT.



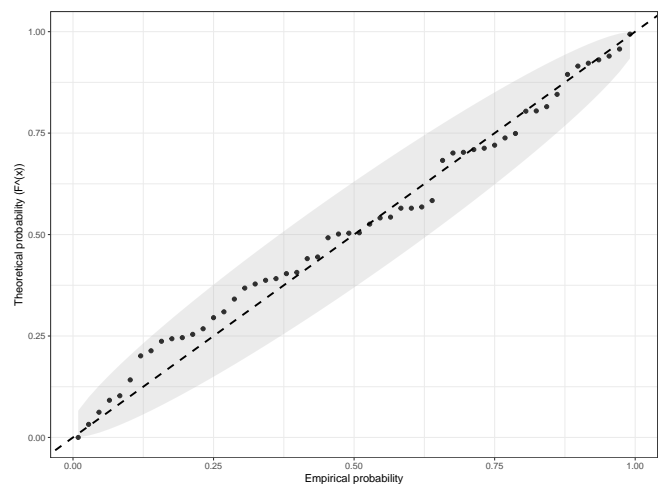
(a) Crédito rotativo (Weibull): ECDF vs CDF ajustada.



(b) Crédito parcelado (Burr XII): ECDF vs CDF ajustada.



(c) Crédito rotativo (Weibull): gráfico P–P com banda de 95%.



(d) Crédito parcelado (Burr XII): gráfico P–P com banda de 95%.

Figure 2: Diagnósticos de validação das marginais. Linha superior: ECDF versus CDF ajustada. Linha inferior: gráficos P–P com bandas de confiança de 95%.

5.3 Validação por PIT

Os histogramas PIT e o teste KS contra $\text{Uniforme}(0,1)$ indicam que a transformação $u = \hat{F}(x)$ é consistente com uniformidade. Para a série Rotativa, obteve-se $p = 0.8732$, enquanto para a série Parcelada, $p = 0.6879$, ambos indicando um excelente ajuste das marginais.

Table 4: Teste PIT (Kolmogorov-Smirnov contra $U(0, 1)$).

Série	D (KS)	p-value
Rotativo	0.0772	0.8732
Parcelado	0.0934	0.6879

5.4 Seleção e ajuste da cópula

A seleção da família de cópula foi realizada por comparação entre diferentes modelos candidatos, utilizando o Critério de Informação de Akaike (AIC) como métrica de escolha. Conforme apresentado na Tabela 5, a cópula de Frank apresentou o melhor desempenho (AIC = $-16,70$; BIC = $-14,71$), superando alternativas como a Gaussiana e a de Gumbel.

Diferentemente de famílias assimétricas, como Clayton (associada à dependência de cauda inferior) e Gumbel (associada à dependência de cauda superior), a cópula de Frank é adequada para capturar uma estrutura de dependência **simétrica**, sem impor dependência assintótica nas caudas (isto é, $TD_U = 0$ e $TD_L = 0$). Assim, o modelo sugere que a relação entre as taxas de juros do crédito Rotativo e Parcelado se manifesta de forma conjunta ao longo de todo o suporte, não estando concentrada apenas em eventos extremos.

Table 5: Comparação de critérios de ajuste para famílias de cópulas candidatas.

Família	Parâmetro (θ)	τ de Kendall	Log-Lik	AIC	BIC
Frank	3,78	0,37	9,35	-16,70	-14,71
Gaussiana	0,52	0,35	9,31	-16,62	-14,63
Gumbel	1,53	0,35	9,13	-16,25	-14,26
t-Student	0,51	0,34	8,75	-13,50	-9,52
Clayton	0,31	0,13	3,12	-4,24	-2,25

O modelo final selecionado foi, portanto, a cópula de Frank, com parâmetro estimado $\hat{\theta} = 3,78$ e dependência positiva moderada medida por $\hat{\tau} = 0,37$. Esse resultado indica que aumentos na taxa do crédito Rotativo tendem a ser acompanhados por movimentos na mesma direção na taxa do crédito Parcelado, ainda que com intensidade moderada. Observa-se ainda que o τ empírico é ligeiramente superior (0,39), o que é compatível com pequenas diferenças entre a medida amostral e a medida implícita no modelo ajustado.

A Figura 3 apresenta o mapa de contornos da *densidade* da cópula de Frank ajustada no espaço $[0, 1]^2$ das pseudo-observações (u, v) . Nota-se maior concentração de probabilidade nas regiões próximas à diagonal $u \approx v$ e menor concentração nas regiões $(0, 1)$ e $(1, 0)$. Esse padrão é consistente com **concordância** entre as séries (dependência positiva), ao mesmo tempo em que a cópula

de Frank preserva **simetria** e não induz dependência nas caudas ($TD_U = TD_L = 0$), reforçando a interpretação de que a associação ocorre predominantemente no corpo da distribuição.

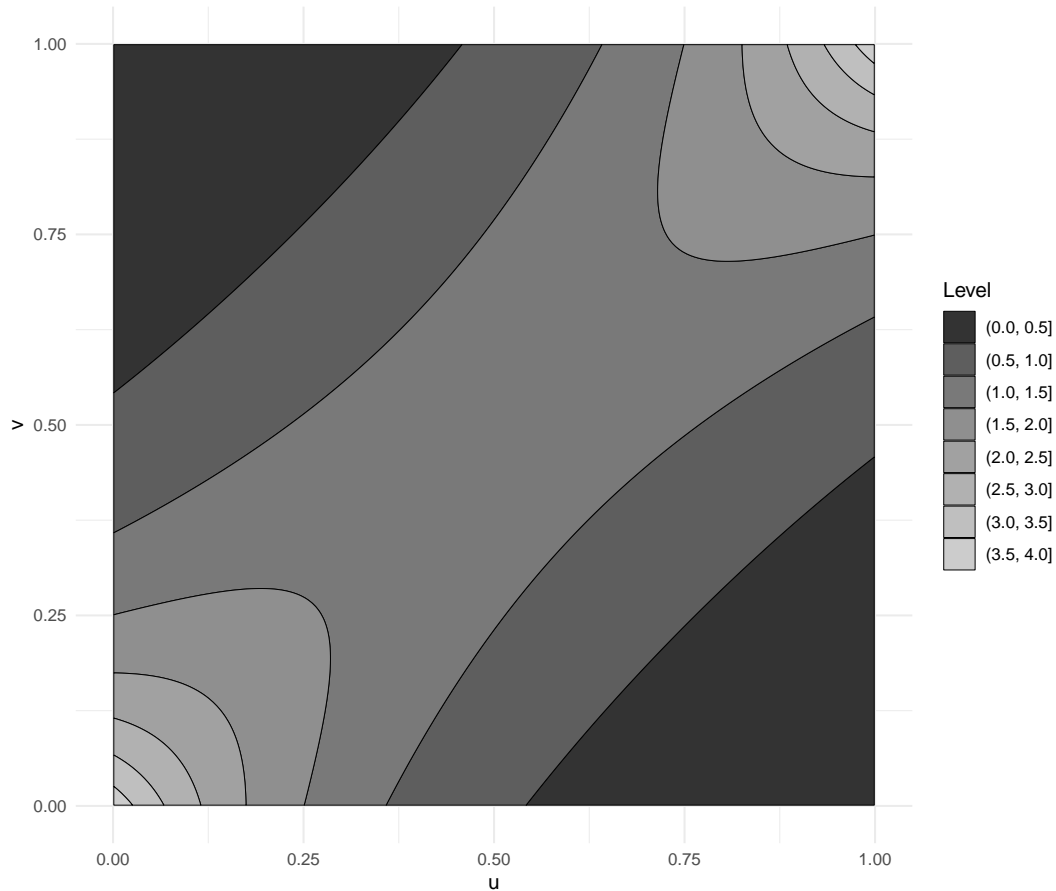


Figure 3: Curvas de nível da densidade da cópula de Frank ajustada ($\hat{\theta} = 3,78$) no espaço uniforme (u, v) . Tons mais escuros indicam maior densidade conjunta, refletindo dependência positiva moderada e aproximadamente simétrica ao longo do suporte, sem dependência de cauda.

5.4.1 Teste de bondade de ajuste (GOF) da cópula

Para avaliar a adequação do modelo selecionado, aplicou-se um teste de bondade de ajuste para cópulas baseado no *processo de Kendall*. Esse procedimento quantifica a discrepância entre a estrutura de dependência observada nos dados e aquela implicada pela cópula ajustada, considerando duas estatísticas complementares: (i) a **Cramér–von Mises (CvM)**, que integra o erro quadrático ao longo do domínio, e (ii) a **Kolmogorov–Smirnov (KS)**, que captura o maior desvio observado. Os p -valores foram obtidos por *bootstrap* paramétrico com $B = 1000$ reamostragens.

Os resultados (Tabela 6) indicam elevada aderência do modelo de Frank, com p -valores altos tanto para CvM ($p = 0,826$) quanto para KS ($p = 0,74$). Assim, não há evidência estatística para rejeitar, ao nível de significância de 5%, a hipótese de que a dependência entre as modalidades de crédito seja bem representada pela cópula ajustada.

Table 6: Teste de bondade de ajuste (GOF) para a cópula de Frank via processo de Kendall (bootstrap com $B = 1000$).

Cópula	$\hat{\theta}$	$\hat{\tau}$	CvM stat	CvM p-value	KS stat	KS p-value
Frank	3,78	0,37	0,0502425	0,826	0,5878875	0,74

5.5 Especificação paramétrica das marginais selecionadas e distribuição conjunta final

Após a etapa de seleção empírica e validação das marginais (Tabelas 2 e 3), o modelo final adotado combina: (i) uma distribuição **Weibull** para descrever a série de juros do crédito Rotativo, (ii) uma distribuição **Burr XII** para descrever a série de juros do crédito Parcelado e (iii) uma **cópula de Frank** para capturar a dependência entre ambas. Nesta subseção, reportamos as estimativas dos parâmetros por máxima verossimilhança (MLE) **com seus erros-padrão** e apresentamos a expressão do modelo conjunto final, utilizada no cálculo de probabilidades conjuntas de excedência.

5.5.1 Parâmetros estimados das marginais e erro de estimação

Os parâmetros foram estimados por **máxima verossimilhança**, e os **erros-padrão** reportados na Tabela 7 são assintóticos, obtidos a partir da informação observada (Hessiana) no ponto de máximo. No caso do Parcelado, a estimação foi realizada em uma parametrização equivalente baseada em *taxa* (r), e, para manter consistência com a notação teórica usada neste artigo, utilizamos o mapeamento:

$$\kappa = \text{shape1}, \quad c = \text{shape2}, \quad \alpha = \frac{1}{r}.$$

Como α é uma reparametrização ($\alpha = 1/r$), seu erro-padrão foi obtido por aproximação de primeira ordem (*delta method*):

$$\text{SE}(\alpha) \approx \frac{\text{SE}(r)}{r^2}.$$

De modo geral, erros-padrão elevados em parâmetros de famílias muito flexíveis podem ocorrer em amostras moderadas, indicando maior incerteza na identificação simultânea de escala e forma, sem comprometer necessariamente o uso do modelo para simulação e avaliação de probabilidades conjuntas.

Table 7: Parâmetros estimados por máxima verossimilhança (MLE) e erros-padrão (EP) das marginais selecionadas.

Série	Distribuição	Parâmetro	Estimativa	EP
Rotativo	Weibull	β (forma)	4,0590	0,4480
		λ (escala)	16,8273	0,5931
Parcelado	Burr XII	κ (forma)	68,4888	153,8355
		c (forma)	2,5496	0,2719
		α (escala)	51,9257	47,75

Nota: Para a Burr XII, reportamos $\alpha = 1/r$, com erro-padrão aproximado via delta method: $SE(\alpha) \approx SE(r)/r^2$.

5.5.2 Marginal do Rotativo: Weibull

A marginal do Rotativo segue a Weibull definida em §4.8.1 (ver (20)–(21)). O ajuste por MLE resultou em $\hat{\beta} = 4.058963$ (EP = 0.4480) e $\hat{\lambda} = 16.827259$ (EP = 0.5931), de modo que no modelo final utilizamos $F_R(x; \hat{\lambda}, \hat{\beta})$.

5.5.3 Marginal do Parcelado: Burr XII

A marginal do Parcelado segue a Burr XII definida em §4.8.2 (ver (22)–(23)). O ajuste por MLE resultou em $\hat{\kappa} = 68.488814$ (EP = 153.8355) e $\hat{c} = 2.549598$ (EP = 0.2719). A escala foi reportada como $\hat{\alpha} = 1/\hat{r} = 51.9257$, com erro-padrão aproximado $EP(\hat{\alpha}) \approx 47.75$ via delta method. Assim, no modelo final utilizamos $F_P(x; \hat{\alpha}, \hat{c}, \hat{\kappa})$.

5.5.4 Dependência e distribuição conjunta via cópula de Frank

Com as marginais ajustadas e validadas (Seções 5.5.2–5.5.3 e Tabela 7), modelamos a dependência entre Rotativo e Parcelado por meio de uma cópula bivariada. Pelo Teorema de Sklar, a distribuição conjunta no suporte original pode ser escrita como

$$\hat{F}_{R,P}(x_R, x_P) = \hat{C}(\hat{F}_R(x_R), \hat{F}_P(x_P)). \quad (29)$$

Entre as famílias candidatas, a cópula selecionada foi a **Frank**, com $\hat{\theta} = 3,78$, indicando dependência positiva moderada ($\hat{\tau} = 0,37$; Tabela 5). Nota-se que o τ empírico é ligeiramente superior ($\tau_{\text{emp}} = 0,39$), o que é compatível com pequenas diferenças entre a medida amostral e a medida implícita pelo modelo ajustado. Essa família é adequada para capturar associação aproximadamente *simétrica* ao longo do domínio, sem evidência de dependência assintótica nas caudas ($\lambda_U = \lambda_L = 0$).

Substituindo as marginais estimadas, o modelo conjunto utilizado nas análises é:

$$\hat{F}_{R,P}(x_R, x_P) = C_{\text{Frank}}\left(\hat{F}_R(x_R; \hat{\lambda}, \hat{\beta}), \hat{F}_P(x_P; \hat{\alpha}, \hat{c}, \hat{\kappa}); \hat{\theta}\right), \quad (30)$$

onde $C_{\text{Frank}}(\cdot, \cdot; \theta)$ é definida na Seção 4.9.

Para aplicações de estresse, o objeto de interesse é a probabilidade de coexcedência acima de

(c_R, c_P) . Definindo $u = \hat{F}_R(c_R)$ e $v = \hat{F}_P(c_P)$, obtemos:

$$\mathcal{R}(c_R, c_P) = \mathbb{P}(X_R > c_R, X_P > c_P) = 1 - u - v + C_{\text{Frank}}(u, v; \hat{\theta}). \quad (31)$$

5.6 Análise de Sensibilidade e Grade de Cenários

Com o objetivo de avaliar a robustez do risco conjunto estimado entre as modalidades de crédito rotativo e parcelado, foi construída uma grade de cenários variando os thresholds (cortes) de taxa de juros para ambas as marginais. Em cada par de cortes (c_R, c_P) , o risco é definido como a probabilidade conjunta:

$$P(\text{Rot} > c_R \cap \text{Par} > c_P),$$

isto é, a chance de que simultaneamente as taxas do rotativo excedam c_R e as do parcelado excedam c_P . Essa análise permite mapear a superfície de risco e verificar como o nível de restrição dos cortes afeta a ocorrência de eventos simultâneos. No grid reportado a seguir, utilizamos thresholds representativos do suporte empírico observado (Rotativo em $\{12, \dots, 20\}$ % a.m. e Parcelado em $\{8, \dots, 14\}$ % a.m.), o que facilita interpretação e posterior visualização em mapas de calor.

Estimativa via Monte Carlo. A Tabela 8 apresenta as probabilidades conjuntas estimadas por **simulação de Monte Carlo** a partir do gêmeo digital construído com marginais ajustadas (Weibull para o rotativo e Burr XII para o parcelado) e dependência capturada por uma cópula Frank. Cada célula foi obtida pela proporção de excedências simultâneas na amostra simulada:

$$\hat{\mathcal{R}}(c_R, c_P) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{I}(X_j^{(R)} > c_R, X_j^{(P)} > c_P).$$

Como esperado, observa-se um comportamento monotônico: à medida que os thresholds aumentam, a probabilidade conjunta diminui, pois a região de excedência simultânea se torna mais restritiva.

Table 8: Grade de Probabilidades Conjuntas via Monte Carlo: $P(\text{Rot} > c_R \cap \text{Par} > c_P)$.

Par (c_P)	Threshold Rotativo (c_R)								
	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
8%	0,4937	0,4709	0,4396	0,3987	0,3544	0,2969	0,2377	0,1784	0,1274
9%	0,4067	0,3931	0,3716	0,3426	0,3067	0,2615	0,2111	0,1606	0,1160
10%	0,3240	0,3152	0,3004	0,2785	0,2522	0,2190	0,1799	0,1402	0,1016
11%	0,2434	0,2384	0,2292	0,2147	0,1969	0,1740	0,1444	0,1144	0,0834
12%	0,1744	0,1718	0,1656	0,1565	0,1448	0,1291	0,1090	0,0876	0,0643
13%	0,1181	0,1165	0,1128	0,1069	0,0991	0,0892	0,0771	0,0624	0,0470
14%	0,0792	0,0781	0,0757	0,0720	0,0668	0,0609	0,0534	0,0424	0,0322

Incerteza estatística via intervalos de confiança (Wilson). Além da estimativa pontual, incorporamos uma medida de incerteza para cada célula da grade. Como cada simulação produz um evento Bernoulli (excede simultaneamente ou não), calculamos intervalos de confiança de 95% para

cada probabilidade conjunta pelo método de Wilson, que é particularmente robusto mesmo para probabilidades moderadas ou baixas [9]. A Tabela 9 reporta os intervalos $[L; U]$ associados a cada cenário.

Table 9: Intervalos de Confiança (95%) para $P(\text{Rot} > c_R \cap \text{Par} > c_P)$ (método de Wilson).

Par (c_P)	Threshold Rotativo (c_R)								
	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
8%	[0,4839; 0,5035]	[0,4611; 0,4807]	[0,4299; 0,4493]	[0,3891; 0,4083]	[0,3451; 0,3638]	[0,2880; 0,3059]	[0,2295; 0,2461]	[0,1710; 0,1860]	[0,1210; 0,1341]
9%	[0,3971; 0,4164]	[0,3836; 0,4027]	[0,3622; 0,3811]	[0,3334; 0,3520]	[0,2977; 0,3158]	[0,2530; 0,2702]	[0,2032; 0,2192]	[0,1535; 0,1679]	[0,1099; 0,1224]
10%	[0,3149; 0,3332]	[0,3062; 0,3244]	[0,2915; 0,3095]	[0,2698; 0,2874]	[0,2438; 0,2608]	[0,2110; 0,2272]	[0,1725; 0,1876]	[0,1335; 0,1471]	[0,0958; 0,1077]
11%	[0,2351; 0,2519]	[0,2301; 0,2469]	[0,2211; 0,2375]	[0,2068; 0,2229]	[0,1892; 0,2048]	[0,1667; 0,1816]	[0,1376; 0,1514]	[0,1083; 0,1208]	[0,0781; 0,0890]
12%	[0,1671; 0,1820]	[0,1645; 0,1793]	[0,1584; 0,1730]	[0,1495; 0,1638]	[0,1380; 0,1518]	[0,1227; 0,1358]	[0,1030; 0,1153]	[0,0822; 0,0933]	[0,0597; 0,0693]
13%	[0,1119; 0,1246]	[0,1104; 0,1229]	[0,1067; 0,1191]	[0,1010; 0,1131]	[0,0934; 0,1051]	[0,0838; 0,0949]	[0,0720; 0,0825]	[0,0578; 0,0673]	[0,0430; 0,0513]
14%	[0,0741; 0,0847]	[0,0730; 0,0835]	[0,0707; 0,0810]	[0,0671; 0,0772]	[0,0621; 0,0719]	[0,0564; 0,0658]	[0,0492; 0,0580]	[0,0386; 0,0465]	[0,0289; 0,0358]

Cálculo direto (analítico) via marginais e cópula. Como verificação adicional e alternativa computacionalmente eficiente, também calculamos a grade de risco conjunto diretamente a partir do modelo paramétrico ajustado, sem recorrer a simulações. Essa abordagem utiliza as CDFs marginais ajustadas e a CDF da cópula selecionada para obter:

$$\mathcal{R}(c_R, c_P) = 1 - u - v + \widehat{C}(u, v), \quad u = \widehat{F}_R(c_R), \quad v = \widehat{F}_P(c_P),$$

onde $\widehat{C}(u, v)$ denota a função de distribuição acumulada da cópula ajustada, avaliada no par (u, v) . Para garantir estabilidade numérica quando u ou v se aproximam de 0 ou 1, aplicamos uma truncagem suave (*clamping*) no domínio uniforme, definindo

$$u^* = \min\{\max(u, \varepsilon), 1 - \varepsilon\}, \quad v^* = \min\{\max(v, \varepsilon), 1 - \varepsilon\},$$

com $\varepsilon > 0$ pequeno, e então computamos $\widehat{C}(u^*, v^*)$. O risco é obtido por complemento, conforme a expressão acima.

A Tabela 10 apresenta a mesma grade de cenários estimada via **cálculo direto**, permitindo comparação imediata com os resultados obtidos por Monte Carlo.

Table 10: Grade de Probabilidades Conjuntas via cálculo direto (modelo marginal + cópula): $P(\text{Rot} > c_R \cap \text{Par} > c_P)$.

Par (c_P)	Threshold Rotativo (c_R)								
	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
8%	0,4945	0,4716	0,4402	0,3992	0,3491	0,2923	0,2330	0,1760	0,1255
9%	0,4072	0,3920	0,3703	0,3408	0,3029	0,2579	0,2087	0,1597	0,1150
10%	0,3203	0,3106	0,2964	0,2763	0,2495	0,2161	0,1779	0,1382	0,1008
11%	0,2405	0,2344	0,2254	0,2123	0,1943	0,1709	0,1431	0,1130	0,0836
12%	0,1722	0,1684	0,1628	0,1546	0,1429	0,1274	0,1082	0,0868	0,0651
13%	0,1175	0,1153	0,1118	0,1068	0,0995	0,0895	0,0769	0,0625	0,0474
14%	0,0764	0,0751	0,0730	0,0700	0,0655	0,0594	0,0515	0,0422	0,0324

Consistência entre Monte Carlo e cálculo direto. Os resultados das Tabelas 8 e 10 são próximos em toda a grade, como esperado quando o número de simulações é suficientemente grande. Mais importante, as estimativas obtidas pelo cálculo direto permanecem compatíveis com os intervalos de confiança construídos a partir do Monte Carlo (Tabela 9). Por exemplo, no cenário de referência ($c_R = 15\%$, $c_P = 10\%$), a estimativa Monte Carlo foi 0,2785, com intervalo de confiança de 95% dado por $[0,2698; 0,2874]$. O cálculo direto forneceu 0,2763, valor que se encontra dentro desse intervalo, reforçando a coerência do modelo ajustado e a estabilidade do procedimento numérico.

Retângulos exclusivos (bins) como decomposição da distribuição conjunta. Além das probabilidades de excedência (definidas por regiões do tipo “quadrante superior direito”), é útil decompor o plano (Rot, Par) em **retângulos exclusivos (bins)**, que particionam todo o suporte e, por construção, somam probabilidade total 1. Definindo bordas $0 = c_{R,0} < c_{R,1} < \dots < c_{R,J} < \infty$ e $0 = c_{P,0} < c_{P,1} < \dots < c_{P,I} < \infty$, estimamos a massa em cada retângulo por:

$$\hat{p}_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \mathbb{I}(c_{R,j-1} < X_m^{(R)} \leq c_{R,j}, c_{P,i-1} < X_m^{(P)} \leq c_{P,i}), \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \hat{p}_{i,j} = 1.$$

Essa representação funciona como um **histograma bivariado** (distribuição conjunta discreta) e permite: (i) checagem de consistência (a soma deve ser 1), (ii) leitura direta de onde está a massa conjunta, e (iii) cálculo de probabilidades em regiões mais gerais por simples soma de células.

A Tabela 11 reporta a matriz $\hat{p}_{i,j}$ para as bordas utilizadas no grid, mostrando a distribuição conjunta por retângulos exclusivos.

Table 11: Decomposição em retângulos exclusivos (bins): estimativa discreta da distribuição conjunta no grid. Cada célula é $\hat{p}_{i,j} = \mathbb{P}(c_{R,j-1} < \text{Rot} \leq c_{R,j}, c_{P,i-1} < \text{Par} \leq c_{P,i})$, com soma total igual a 1.

	(0, 12]	(12, 13]	(13, 14]	(14, 15]	(15, 16]	(16, 17]	(17, 18]	(18, 19]	(19, 20]	(20, ∞]
(0, 8]	0,1695	0,0437	0,0488	0,0444	0,0365	0,0284	0,0240	0,0153	0,0086	0,0198
(8, 9]	0,0217	0,0088	0,0105	0,0118	0,0094	0,0123	0,0085	0,0078	0,0058	0,0099
(9, 10]	0,0125	0,0059	0,0073	0,0090	0,0096	0,0128	0,0115	0,0097	0,0058	0,0114
(10, 11]	0,0074	0,0049	0,0059	0,0074	0,0086	0,0097	0,0102	0,0094	0,0077	0,0157
(11, 12]	0,0054	0,0023	0,0041	0,0047	0,0069	0,0078	0,0087	0,0087	0,0086	0,0156
(12, 13]	0,0024	0,0019	0,0022	0,0042	0,0047	0,0070	0,0080	0,0067	0,0064	0,0163
(13, 14]	0,0022	0,0007	0,0018	0,0027	0,0026	0,0043	0,0053	0,0047	0,0047	0,0153
(14, ∞]	0,0035	0,0015	0,0029	0,0047	0,0068	0,0078	0,0096	0,0124	0,0125	0,0335

Faixas de Rotativo condicionais ao evento $\text{Par} > c_P$ (leitura interpretável do estresse). Complementarmente, é possível decompor o evento de estresse no parcelado ($\text{Par} > c_P$) em **faixas exclusivas de Rotativo**. Isso fornece uma leitura direta de *onde* está a massa condicional do Rotativo quando o Parcelado já está em regime adverso. Para cortes $c_{R,1} < \dots < c_{R,J}$, definimos as faixas exclusivas:

$$\text{Rot} \leq c_{R,1}, \quad c_{R,1} < \text{Rot} \leq c_{R,2}, \quad \dots, \quad c_{R,J-1} < \text{Rot} \leq c_{R,J}, \quad \text{Rot} > c_{R,J},$$

e calculamos, para cada faixa A_j ,

$$\mathbb{P}(A_j \cap \{\text{Par} > c_P\}), \quad \mathbb{P}(A_j \mid \text{Par} > c_P) = \frac{\mathbb{P}(A_j \cap \{\text{Par} > c_P\})}{\mathbb{P}(\text{Par} > c_P)}.$$

A Tabela 12 ilustra essa decomposição para $c_P = 10\%$, mostrando a probabilidade conjunta de cada faixa com o evento $\text{Par} > 10\%$ e a probabilidade condicional correspondente. Observa-se, por exemplo, massa condicional relevante em $\text{Rot} > 20\%$, o que é coerente com cenários em que o estresse no parcelado co-ocorre com níveis elevados do rotativo.

Table 12: Faixas exclusivas de Rotativo dentro do evento $\text{Par} > 10\%$: probabilidades conjuntas e condicionais.

Faixa (Rot)	$\mathbb{P}(\text{faixa} \cap \{\text{Par} > 10\%\})$	$\mathbb{P}(\text{faixa} \mid \text{Par} > 10\%)$
$\text{Rot} \leq 12$	0,0209	0,0582
$12 < \text{Rot} \leq 13$	0,0113	0,0315
$13 < \text{Rot} \leq 14$	0,0169	0,0471
$14 < \text{Rot} \leq 15$	0,0237	0,0660
$15 < \text{Rot} \leq 16$	0,0296	0,0825
$16 < \text{Rot} \leq 17$	0,0366	0,1019
$17 < \text{Rot} \leq 18$	0,0418	0,1164
$18 < \text{Rot} \leq 19$	0,0419	0,1167
$19 < \text{Rot} \leq 20$	0,0399	0,1111
$\text{Rot} > 20$	0,0964	0,2685

Vantagens e limitações das abordagens. As duas estratégias são complementares e atendem a objetivos diferentes:

- **Monte Carlo (simulação):**

- *Vantagens:* grande flexibilidade (permite calcular métricas não lineares e regiões complexas de risco), fácil extensão para estatísticas adicionais e construção natural de intervalos de confiança por reamostragem.
- *Desvantagens:* introduz erro amostral (variabilidade de Monte Carlo), exigindo N elevado para estabilizar probabilidades; custo computacional cresce com o tamanho da grade e com a necessidade de precisão em eventos raros.

- **Cálculo direto (analítico via cópula):**

- *Vantagens:* computacionalmente muito eficiente, elimina o erro de Monte Carlo e permite avaliar grades grandes quase instantaneamente, sendo ideal para rotinas de sensibilidade, calibração e validação cruzada.
- *Desvantagens:* depende de forma mais direta da correta especificação paramétrica das marginais e da cópula; além disso, é menos flexível para eventos definidos por regiões mais

gerais (não retangulares) ou métricas que não se expressam facilmente em função da CDF conjunta.

Por fim, a Figura 4 ilustra o comportamento conjunto ao comparar a nuvem simulada (cinza) com os pontos observados (preto), o que fornece uma validação visual adicional da plausibilidade do ajuste. As linhas tracejadas representam os thresholds do cenário principal e destacam a região de excedência simultânea utilizada na análise.

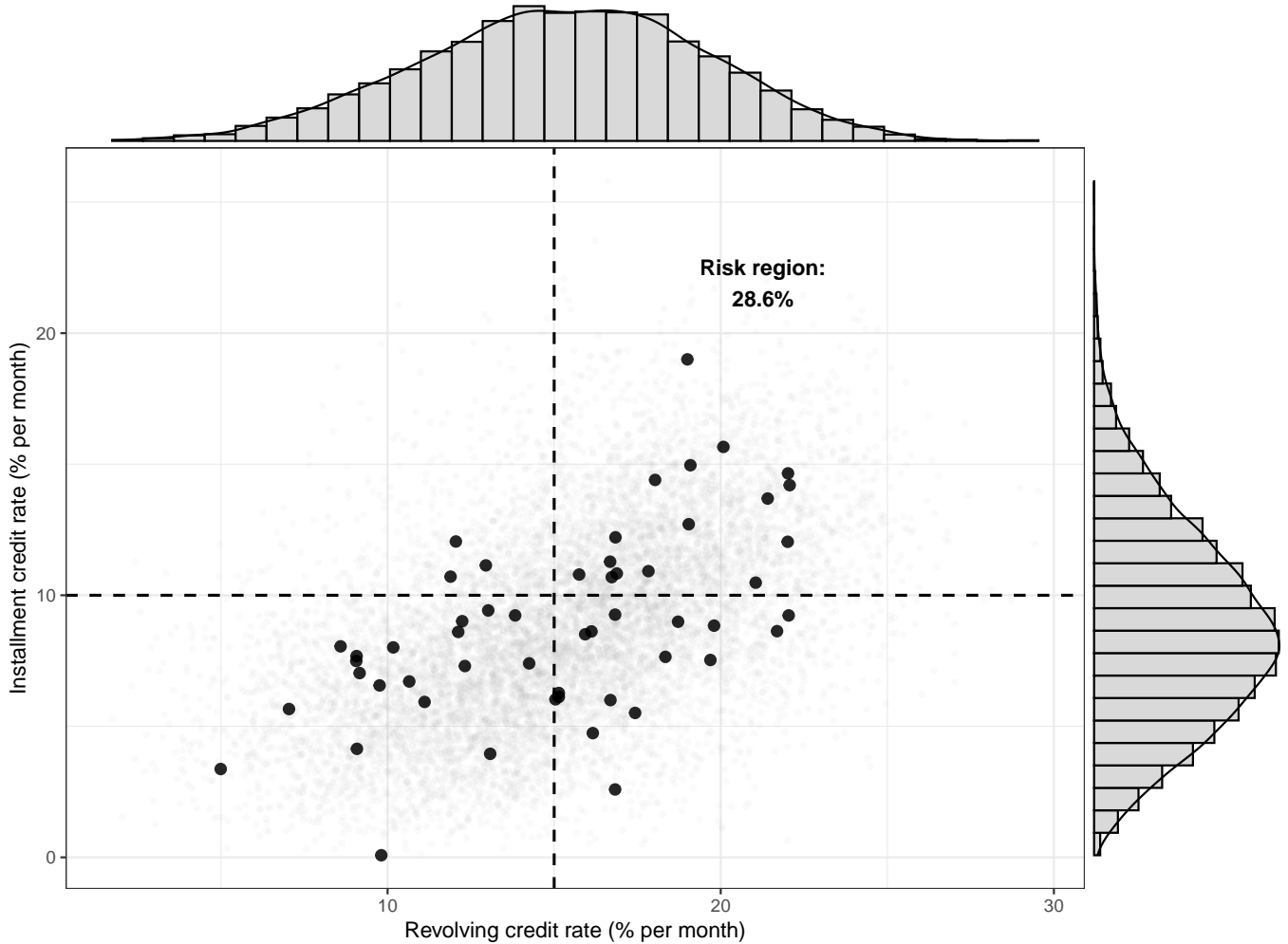


Figure 4: Simulação Monte Carlo: nuvem simulada (cinza) versus pontos observados (preto). As linhas tracejadas indicam o cenário de referência ($c_R = 15\%$, $c_P = 10\%$).

6 Discussão

Os resultados obtidos apontam para **dependência positiva moderada** entre as taxas de juros das modalidades Rotativo e Parcelado, de modo que choques de precificação, mudanças em condições de funding ou aumento da percepção de risco podem se refletir em **elevação simultânea** do custo do crédito ao consumidor. Sob a cópula selecionada (Frank), a estrutura de dependência é **aproximadamente simétrica** e não concentra a associação apenas em eventos extremos (isto é, sem dependência de cauda assintótica), sugerindo que o comovimento ocorre predominantemente no corpo da distribuição.

A métrica central do estudo, $\mathcal{R}(c_R, c_P) = \mathbb{P}(X_R > c_R, X_P > c_P)$, permite quantificar diretamente a probabilidade de **co-excedência** para diferentes níveis de estresse. A partir do modelo ajustado,

avaliamos $\mathcal{R}(c_R, c_P)$ em uma grade de cenários (c_R, c_P) , o que possibilita visualizar como o risco conjunto varia conforme aumentam os níveis de estresse. A Figura 5 apresenta o mapa de calor de $\mathcal{R}(c_R, c_P)$ no grid analisado, destacando o cenário base $(c_R, c_P) = (15, 10)$.

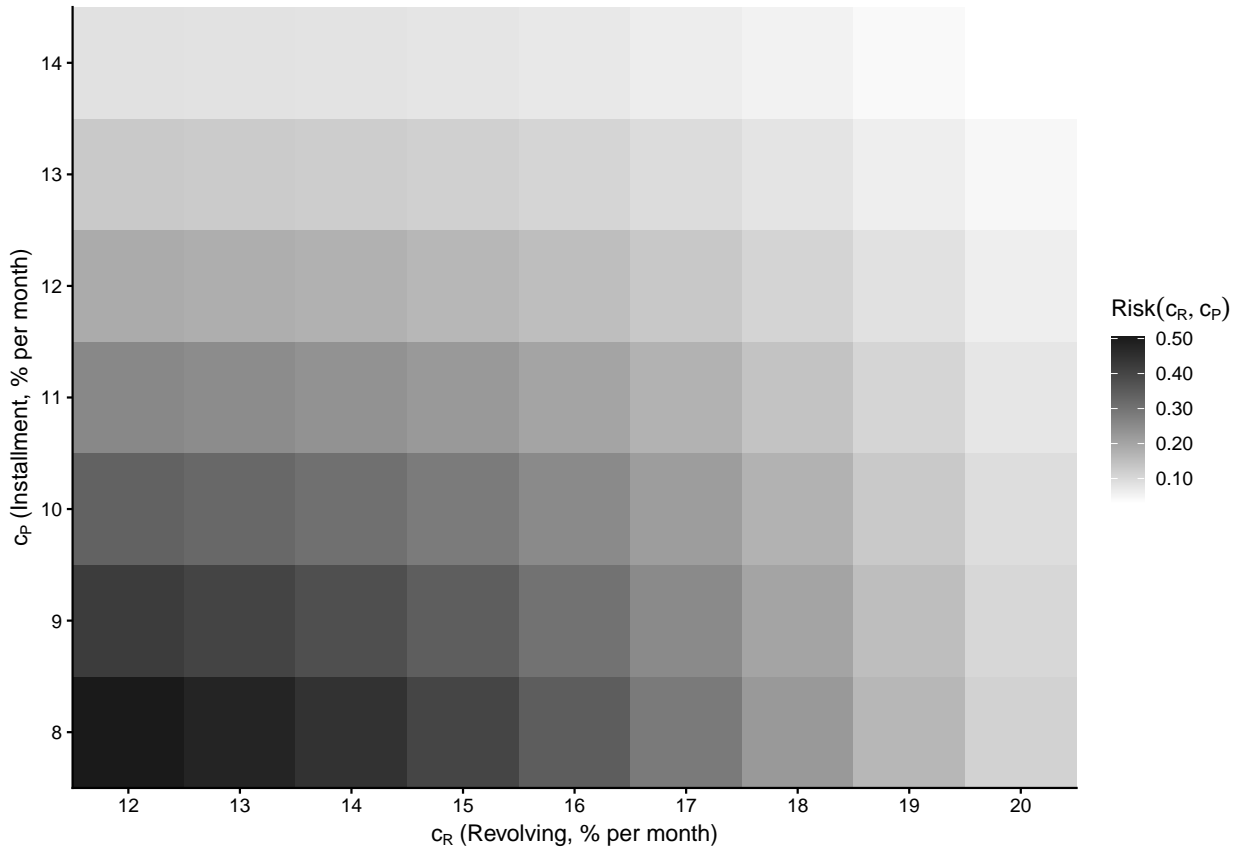


Figure 5: Mapa de calor da probabilidade conjunta de co-excedência $\mathcal{R}(c_R, c_P) = \mathbb{P}(X_R > c_R, X_P > c_P)$ no grid de cenários. O retângulo destaca o cenário base $(c_R, c_P) = (15, 10)$.

Para quantificar o papel da dependência na formação do risco agregado, comparamos $\mathcal{R}(c_R, c_P)$ ao benchmark de independência $\mathbb{P}(X_R > c_R)\mathbb{P}(X_P > c_P)$. A Figura 6 apresenta o excesso $\Delta(c_R, c_P) = \mathcal{R}(c_R, c_P) - \mathbb{P}(X_R > c_R)\mathbb{P}(X_P > c_P)$, onde valores positivos indicam que a dependência aumenta a probabilidade de co-excedência em relação ao que seria esperado caso as modalidades fossem independentes. No grid analisado, o excesso é predominantemente positivo, sugerindo que uma hipótese de independência tenderia a **subestimar** o estresse simultâneo.

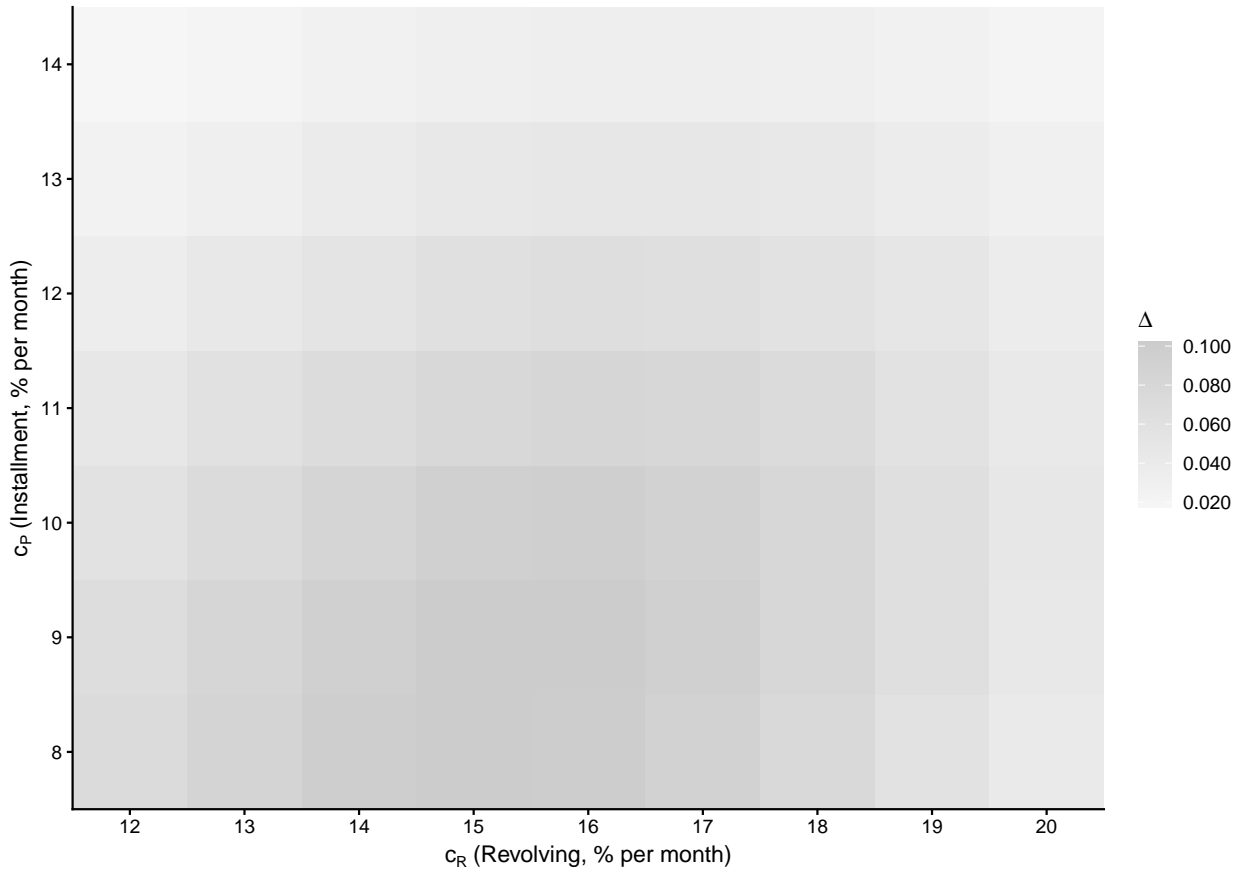


Figure 6: Excesso de risco conjunto em relação ao benchmark de independência: $\Delta(c_R, c_P) = \mathcal{R}(c_R, c_P) - \mathbb{P}(X_R > c_R)\mathbb{P}(X_P > c_P)$. Valores positivos indicam risco conjunto acima do que seria esperado sob independência.

Do ponto de vista aplicado, os resultados fornecem um indicador operacional de estresse relevante para:

- **gestão de risco e precificação bancária**, ao quantificar a probabilidade de elevação simultânea do custo do crédito em duas modalidades amplamente utilizadas;
- **regulação e monitoramento macroprudencial**, ao permitir construir cenários de co-excedência e avaliar vulnerabilidades sistêmicas associadas a choques comuns;
- **avaliação de impacto sobre endividamento e inadimplência**, já que aumentos simultâneos em Rotativo e Parcelado podem amplificar restrições financeiras e elevar o risco de atraso no crédito ao consumo.

6.1 Limitações e extensões

Apesar dos resultados estatisticamente consistentes com o modelo proposto, algumas limitações devem ser destacadas. Primeiro, a análise utiliza um recorte **transversal/instantâneo** por instituição financeira no período de extração, o que permite caracterizar a dependência contemporânea entre Rotativo e Parcelado, mas não captura possíveis mudanças ao longo do tempo na estrutura de dependência. Segundo, o tamanho amostral (número de instituições pareadas) impõe cautela na

generalização, sobretudo para inferências sobre eventos raros/extremos, ainda que tenhamos reportado incerteza via intervalos de confiança na estimação das probabilidades conjuntas. Terceiro, as estimativas dependem das hipóteses paramétricas adotadas para as marginais e para a cópula, de modo que diferentes escolhas podem alterar marginalmente os níveis de risco.

Como extensões promissoras, destacam-se:

- **cópulas com dependência de cauda** (por exemplo, t-cópula e famílias BB), para avaliar cenários em que a associação se intensifica em extremos e a co-excedência é dominada por eventos raros;
- **dependência variante no tempo** (cópulas dinâmicas / parâmetros variantes), permitindo investigar estabilidade da dependência em janelas móveis e sua relação com ciclos monetários e condições financeiras;
- **integração com covariáveis macroeconômicas** (inflação, Selic, spread bancário, inadimplência) e modelos híbridos, combinando estrutura de cópula com técnicas de ML/IA para previsão de risco conjunto e construção de cenários;
- **ampliação da base para painel** (instituição \times tempo), possibilitando validação fora da amostra e comparação do risco conjunto entre diferentes regimes macroeconômicos.

7 Conclusão

Este trabalho apresentou um modelo para mensuração do **risco conjunto** entre as taxas de juros do crédito em cartão nas modalidades Rotativo e Parcelado, combinando ajuste marginal paramétrico e modelagem de dependência via cópulas. A estratégia em duas etapas, com validação das marginais via PIT e posterior seleção e validação da cópula, permitiu representar a distribuição conjunta de forma flexível, superando abordagens baseadas exclusivamente em medidas de associação linear.

Os resultados obtidos indicam **dependência positiva moderada** entre as duas modalidades, sugerindo que elevações nas taxas do crédito ao consumidor podem ocorrer de forma simultânea. Com base no modelo ajustado, utilizamos simulação de Monte Carlo para estimar a probabilidade de co-excedência

$$\mathcal{R}(c_R, c_P) = \mathbb{P}(X_R > c_R, X_P > c_P)$$

em uma grade de cenários, o que permitiu mapear regiões de maior vulnerabilidade conjunta e comparar diferentes níveis de severidade. Além disso, ao contrastar $\mathcal{R}(c_R, c_P)$ com o benchmark de independência,

$$\mathbb{P}(X_R > c_R)\mathbb{P}(X_P > c_P),$$

observou-se que a dependência entre as modalidades pode elevar o risco agregado em relação ao caso independente, reforçando a relevância de modelar explicitamente a estrutura conjunta em exercícios de monitoramento e análise de estresse.

Do ponto de vista aplicado, a métrica proposta oferece uma forma objetiva e operacional de quantificar a probabilidade de estresse simultâneo entre Rotativo e Parcelado, podendo contribuir para avaliações de risco mais informadas em contextos de precificação, monitoramento e análise

prudencial. Ao mesmo tempo, os resultados devem ser interpretados com cautela, dadas as limitações do estudo, em especial o caráter transversal da base utilizada e o número reduzido de instituições pareadas no recorte analisado.

Como agenda de pesquisa, extensões naturais incluem a construção de uma base em painel, com dimensão instituição \times tempo, de modo a investigar a estabilidade da dependência ao longo do ciclo econômico, bem como a adoção de famílias de cópulas com dependência de cauda e de especificações com parâmetros variantes no tempo. Adicionalmente, a incorporação de covariáveis macroeconômicas pode ampliar a interpretação econômica dos resultados e aumentar o potencial analítico do modelo para fins de supervisão e gestão de risco.

References

- [1] Hirotugu Akaike. Factor analysis and aic. *Psychometrika*, 52(3):317–332, 1987.
- [2] Theodore W Anderson and Donald A Darling. Asymptotic theory of certain” goodness of fit” criteria based on stochastic processes. *The annals of mathematical statistics*, pages 193–212, 1952.
- [3] Banco Central do Brasil. Glossário de crédito, 2019. Documento institucional do Banco Central do Brasil.
- [4] Banco Central do Brasil. Relatório de economia bancária 2023, 2024. Publicação institucional.
- [5] Banco Central do Brasil. Taxa média de juros das operações de crédito com recursos livres – pessoas físicas – cartão de crédito parcelado, 2026. Série SGS / BCData.
- [6] Banco Central do Brasil. Taxa média de juros das operações de crédito com recursos livres – pessoas físicas – cartão de crédito rotativo, 2026. Série SGS / BCData.
- [7] Banco Central do Brasil. Taxas de juros – cartão de crédito: Crédito parcelado (modalidade 204101). Sistema de Estatísticas de Taxas de Juros, 2026. Acesso em: quinta-feira, 22 jan. 2026, 01:29:31.
- [8] Banco Central do Brasil. Taxas de juros – cartão de crédito: Crédito rotativo (modalidade 215101). Sistema de Estatísticas de Taxas de Juros, 2026. Acesso em: quinta-feira, 22 jan. 2026, 01:29:31.
- [9] Lawrence D. Brown, T. Tony Cai, and Anirban DasGupta. Interval estimation for a binomial proportion. *Statistical Science*, 16(2):101–133, 2001.
- [10] Irving W. Burr. Cumulative frequency functions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 13(2):215–232, 1942.
- [11] Umberto Cherubini, Elisa Luciano, and Walter Vecchiato. *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons, 2004.

- [12] Conselho Monetário Nacional. Resolução nº 4.549, de 26 de janeiro de 2017, 2017. Dispõe sobre o financiamento do saldo devedor da fatura de cartão de crédito.
- [13] H Cramér. On the composition of elementary errors: *Skandinavisk aktuarietidskrift*. 1928.
- [14] Francis X. Diebold, Todd A. Gunther, and Anthony S. Tay. Evaluating density forecasts with applications to financial risk management. *International Economic Review*, 39(4):863–883, 1998.
- [15] Paul Embrechts, Alexander McNeil, and Daniel Straumann. Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. 1999. Working paper / preprint.
- [16] Christian Genest, Jean-François Quessy, and Bruno Rémillard. Goodness-of-fit procedures for copula models based on the probability integral transformation. *Scandinavian Journal of Statistics*, 33(2):337–366, 2006.
- [17] Christian Genest, Bruno Rémillard, and David Beaudoin. Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2):199–213, 2009.
- [18] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53. Springer, 2004.
- [19] Norman L. Johnson, Samuel Kotz, and N. Balakrishnan. *Continuous Univariate Distributions*, volume 1. Wiley, 2 edition, 1994.
- [20] Christian Kleiber and Samuel Kotz. *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*. Wiley, 2003.
- [21] Frank J Massey Jr. The kolmogorov-smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American statistical Association*, 46(253):68–78, 1951.
- [22] Roger B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer, 2 edition, 2006.
- [23] Andrew J. Patton. Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, 47(2):527–556, 2006.
- [24] Yudi Pawitan. *In all likelihood: statistical modelling and inference using likelihood*. Oxford University Press, 2001.
- [25] Gideon Schwarz. Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, pages 461–464, 1978.
- [26] Abe Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*, 8:229–231, 1959.
- [27] Richard Von Mises. *Wahrscheinlichkeit statistik und wahrheit: einführung in die neue wahrscheinlichkeitslehre und ihre anwendung*. 1936.
- [28] Waloddi Weibull. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18(3):293–297, 1951.

A Robustez: comparação com cópulas alternativas

Como verificação de robustez da especificação de dependência, além da cópula selecionada no corpo principal (Frank), ajustamos também as cópulas Gaussiana, t de Student, Clayton e Gumbel via máxima verossimilhança no espaço uniforme. O objetivo é avaliar (i) a sensibilidade da escolha da família de cópula segundo critérios de informação, (ii) a adequação do ajuste por testes de aderência (*goodness-of-fit*, GOF) e (iii) o impacto sobre a probabilidade de co-excedência no cenário base $\mathcal{R}(15, 10)$.

A Tabela 13 resume os resultados segundo AIC/BIC, Kendall’s τ , testes GOF com bootstrap, e o impacto sobre $\mathcal{R}(15, 10)$ reportado tanto pela expressão analítica do modelo quanto por simulação de Monte Carlo (com IC de Wilson 95%). Os resultados corroboram a escolha principal: a cópula Frank apresenta o menor AIC e BIC e não é rejeitada pelos testes GOF baseados no método de Kendall (p-valores elevados). As alternativas Gaussiana e Gumbel exibem desempenho próximo em termos de ajuste (AIC/BIC similares) e níveis de dependência compatíveis (via $\tau \approx 0.35$), produzindo estimativas de $\mathcal{R}(15, 10)$ próximas à obtida sob Frank. Em termos práticos, a probabilidade de co-excedência no cenário base permanece na mesma ordem de grandeza entre as especificações com bom ajuste, variando de forma moderada (por exemplo, $\mathcal{R}(15, 10) = 0.2858$ sob Frank versus aproximadamente 0.272–0.274 sob Gaussiana e Gumbel), o que sugere que a principal conclusão empírica do trabalho não é sensível à escolha entre essas famílias.

Em contraste, a cópula Clayton apresenta dependência mais fraca (menor τ) e é rejeitada pelo GOF (p-valores baixos), além de produzir uma estimativa consideravelmente menor para $\mathcal{R}(15, 10)$, indicando que essa família não descreve adequadamente a estrutura de dependência observada no conjunto de dados analisado. Para a t-cópula, o teste GOF baseado no processo de Kendall não está implementado no pacote utilizado; por isso, reportamos GOF via método de White e indicamos p-valores indisponíveis como “—” quando não retornados. Ainda assim, a t-cópula apresenta ajuste inferior em termos de AIC/BIC em relação à Frank/Gaussiana/Gumbel e produz estimativas de $\mathcal{R}(15, 10)$ próximas às demais especificações bem ajustadas.

Table 13: Robustez da especificação de dependência: cópulas alternativas ajustadas por máxima verossimilhança no espaço uniforme. Reportamos AIC/BIC, Kendall’s τ , testes GOF (Kendall com bootstrap quando disponível; White quando necessário) e o impacto no cenário base $\mathcal{R}(15, 10)$.

Cópula	par	par2	τ	logLik	AIC	BIC	GOF	p(CvM)	p(KS)	$\mathcal{R}(15, 10)$	MC (IC 95%)
Frank	3.78		0.37	9.35	-16.70	-14.71	Kendall	0.83	0.74	0.2858	0.2888 [0.2800; 0.2978]
Gaussian	0.52		0.35	9.31	-16.62	-14.63	Kendall	0.75	0.80	0.2723	0.2791 [0.2704; 0.2880]
Gumbel	1.53		0.35	9.13	-16.25	-14.26	Kendall	0.64	0.78	0.2744	0.2707 [0.2621; 0.2795]
t	0.51	30.00	0.34	8.75	-13.50	-9.52	White	—	—	0.2714	0.2759 [0.2672; 0.2847]
Clayton	0.31		0.13	3.12	-4.24	-2.25	Kendall	0.00	0.01	0.2205	0.2223 [0.2143; 0.2306]

Nota: Para a t-cópula, o teste GOF baseado no processo de Kendall não está implementado no pacote utilizado; por isso, utilizamos o método de White. Quando o procedimento não retorna p-valores, indicamos como “—”. O IC 95% refere-se ao intervalo de Wilson aplicado à estimativa Monte Carlo.