CÔNICAS INSCRITAS EM TRIÂNGULOS

LILIANA GABRIELA GHEORGHE

Abstract. Nesse trabalho lidamos com três tipos de cônicas inscritas em triângulos: cônicas que tem o centro, o perspector, ou o foco dados. Mostramos como podemos reduzir a construção destas, à de uma cônica por cinco pontos e explicaremos como podemos obter ferramentas Geogebra que realizam essa tarefa. Todos os algoritmos são embasados em teoremas clássicos sobre cônicas que, infelizmente, hoje em dia são pouco estudados.

1. Introdução

A passo que todo triangulo tem um único circulo inscrito, ha infintas cônicas inscritas num triângulo; e destas raramente se fala. Os métodos de construção destas se baseiam em fatos teóricos que hoje em dia não são assuntos estudados em grades escolares de alunos de exatas. As construções em sí costumam ser encontradas em livros antiquados de Geometria descritiva, ao invés de manuais escolares de geometria, aonde deveria ser seu lugar.

Estudamos aqui como construir:

- cônicas com centro prescrito.
- cônicas com perspector prescrito.
- cônicas com foco prescrito.

Apesar de a pergunta ser pertinente e natural, o assunto é raramente tratado em livros de geometria clássica atuais; isso é uma pena, porque por trás de toda construção, ha muita teoria. Para entender que se trata de um problema com "pedigree" basta lembrar que os primeiros capítulos da "Principia", a maior obra escrita por Newton, são dedicadas ás cônicas e suas construção. Construção é coisa séria.

Keywords: cônicas inscritas, propriedade ótica, teorema de Brianchon, teorema de Carnot, perspector.

2020 MSC: 51A05, 51A30, 51M15.

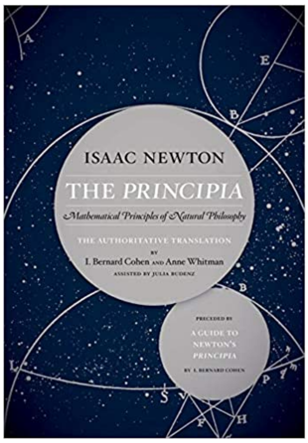

Figure 1. Principia: o famoso tratado de Newton (1686 , 1709, 1742)

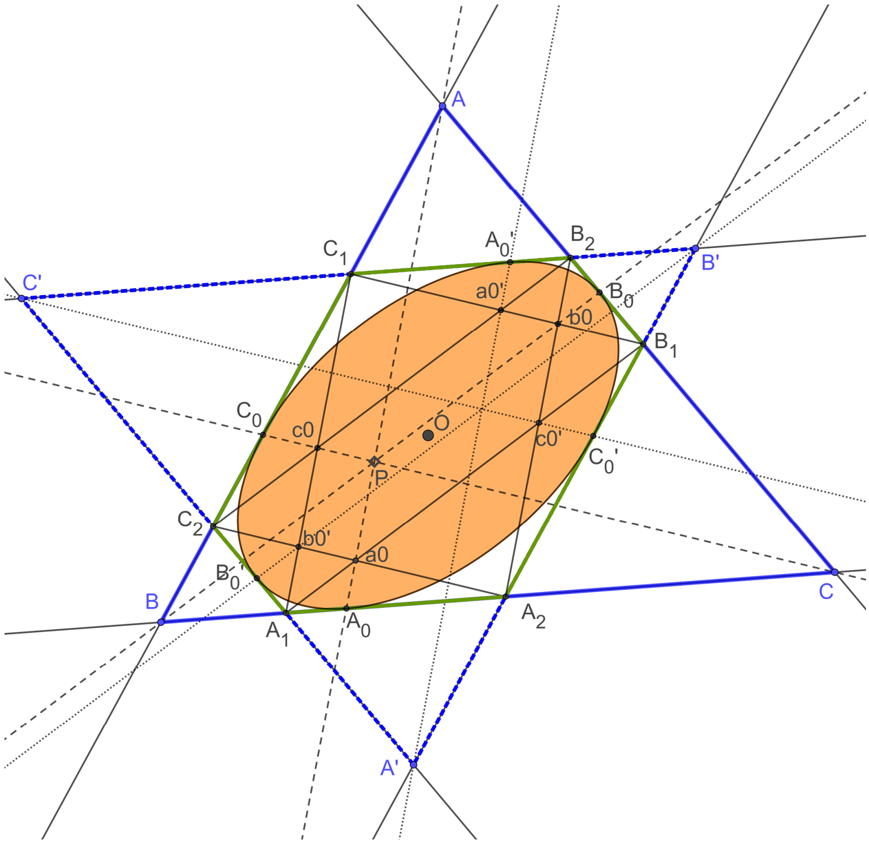

FIGURE 2. I) A cônica inscrita no triângulo ABC de centro O, coincide com a cônica inscrita no hexágono $[A_1A_2B_2B_2C_1C_2]$ II) Pelo teorema de Brianchon, o ponto A_0 de tangencia da cônica se obtém intersectando reta Aa_0, com a aresta A_1A_2. De forma semelhante se obtém os outros pontos de tangência $A'_0, B_0, B'_0, C_0, C'_0$.

2. I-CÔNICA COM CENTRO DADO

Problema 1. Dado $\triangle ABC$ e um ponto O não situado nas arestas, construir a cônica inscrita no triângulo, centrada em O.

Solução: Sejam A', B', C' os simétricos de A, B, C em O; então $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$. O problema se reduz à construção da cônica inscrita num hexágono com arestas opóstas paralelas e congruentes; esta construção usa o teorema de Brianchon, que permite achar os 6 pontos de tangência da cônica com as arestas do hexágono.

Teorema 1. *(Brianchon) Um hexágono admite uma cônica inscrita sé só se suas diagonais são concorrentes.*

Observação 1. *A construção dos pontos de tangência de uma cônica inscrita num hexágono (quando existe), é uma outra consequência do teorema de Brianchon (e de sua prova); veja a figura 2.*

Consequentemente a i-cônica com centro prescrito se pode construir como "cônica por cinco pontos," para a qual temos a ferramenta Geogebra pronta.

Algoritmo 1. *(I-cônica inscrita num triângulo, com centro dado)*
Seja $\triangle ABC$; seja o ponto O dado, não pertencente às arestas. Sejam, como na figura 2 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ os pontos de interseção das arestas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Sejam

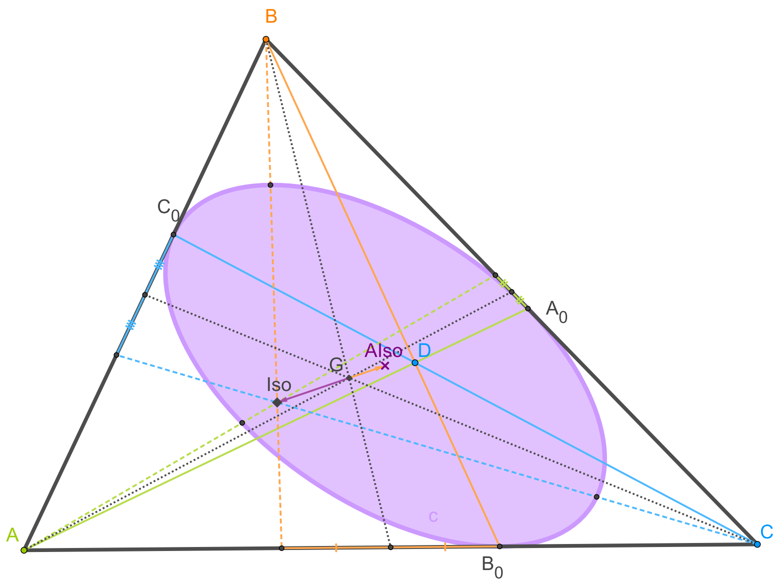

FIGURE 3. A conica de pespector D é centrada em $AIso$, o anticomplemento do conjugado isotomico de D.

- *$a0$ o ponto de interseção de A_1B_1 e A_2C_2; seja $Aa0 \bigcap A_1A_2 = A_0$;*
- *$b0$ o ponto de interseção de B_1C_1 e A_2B_2; seja $Bb0 \bigcap B_1B_2 = B_0$;*
- *$c0$ o ponto de interseção de C_1A_1 e B_2C_2; seja $Cc0 \bigcap C_1C_2 = C_0$;*

Construa A_0', B_0', C_0' os simétricos de A_0, B_0, C_0 em relação à O.

Então a cônica inscrita no triângulo $\triangle ABC$ passa pelos pontos A_0, B_0, C_0 e pelos seus simétricos em O. Para construí-la podemos usar a ferramenta Geogebra "cônica por cinco pontos."

Observação 2. *A ferramenta é idêntica ao algoritmo; na entrada teremos A, B, C, O; na saída, a i-cônica e os pontos A_0, B_0, C_0, A_0', B_0', C_0'; a construção funciona para qualquer localização de O (dentro ou fora do triângulo, desde que não pertença à nenhuma das arestas (como retas). O cuidado deve ser a realizar intersecção de retas, nunca de segmentos.*

3. I-cônica de perspector dado

Seja $\triangle ABC$ e D um ponto não situado sobre as arestas. As cevianas por D intersectam as arestas do triângulo (ou suas prorrogações) em A_0, B_0, C_0, como na figura 3. O teorema de Carnot garante que existe uma única cônica que tangencia as arestas do triângulo precisamente nos pontos A_0, B_0, C_0; o ponto D chama-se o perspector da cônica inscrita.

Problema 2. Dado um ponto D e um triângulo $\triangle ABC$ se pede a cônica inscrita, de perspector D.

Felizmente nesse caso também existe uma teoria consolidada.

Teorema 2. *A cônica de perspector P tem o centro no anticomplemento do conjugado isotomico do perspector.*

Teorema 2 reduz o problema 2 à construção de cônica com centro dado, tratado anteriormente no algoritmo 1.

Ferramenta conjugado isotômico.

Ferramenta 1. *Dados de entrada: os pontos não colineares A, B, C e P um ponto não situado nas retas AB, BC, CA.*

- *construir A_m, B_m, C_m, os pontos médios das arestas BC, CA, AB;*
- *construir A_0, B_0, C_0, os pontos de interseção das retas AP, BP, CP, com as arestas BC, CA, AB;*
- *construir A_0', B_0', C_0', os simétricos de A_0, B_0, C_0, em relação aos pontos A_m, B_m, C_m respetivamente;*
- *construir Iso, o ponto de interseção de A_0A_0' BB_0' e CC_0'.*

Saida: Iso, o conjugado isotômico de P.

Feramenta Anticomplemento.

Ferramenta 2. *Dados de entrada: A, B, C não colineares e o ponto D, um ponto não situado nas retas AB, BC, CA.*

- *construir G o baricentro do triângulo $\triangle ABC$;*
- *construir N, o ponto médio de DG;*

Saida: o anticomplemento de D é o simétrico de N em G.

Ferramenta cônica de perspector dado.

Ferramenta 3. *Dados de entrada: A, B, C não colineares e o ponto D, um ponto não situado nas retas AB, BC, CA.*

- *construir o conjugado isotômico do ponto P ferramenta 1;*
- *construir o anticomplemento do conjugado isotômico 2;*
- *construir A_0, B_0, C_0, os pontos de interseção das retas AP, BP, CP com as arestas do triângulo;*
- *construir os simétricos de A_0, B_0, C_0 em relação ao centro da cônica;*

Saida: os pontos A_0,B_0,C_0,A_1,B_1,C_1 e a cônica inscrita que passa por A_0,B_0,C_0, A_1,B_1,C_1.

4. Cônica com foco prescrito

Problema 3. Dado um triângulo e um ponto F situado no seu interior, construir a cônica que tenha um foco naquele ponto e que tangencie as arestas do triângulo.

A solução se baseia na propriedade ótica (focal) das cônicas, e nas propriedades clássicas do circulo diretor de um cônica.

Fato 1. Os focos F_1, F_2 de uma cônica inscrita num triângulo são conjugados isogonais.

Fato 2. Seja uma cônica com focos F_1, F_2 dados. Então o simétrico de F_1 em ralação a uma tangente á cônica pertence ao circulo centrado no outro foco, F_2, de raio igual ao eixo da cônica.

A prova desses fatos é clássica e usa a definição das cônicas e a propriedade ótica das cônicas.

Algoritmo 2. *I-conica com foco F_1. Dados os pontos A, B, C e F_1, construir a cônica inscrita no triângulo ABC, com foco em F_1. Veja figura 4.*

- *construir F_2, o conjugado isogonal de foco F_1;*
- *construir os pontos A_1, B_1, C_1, os simétricos de F_1 nas arestas do triângulo:*

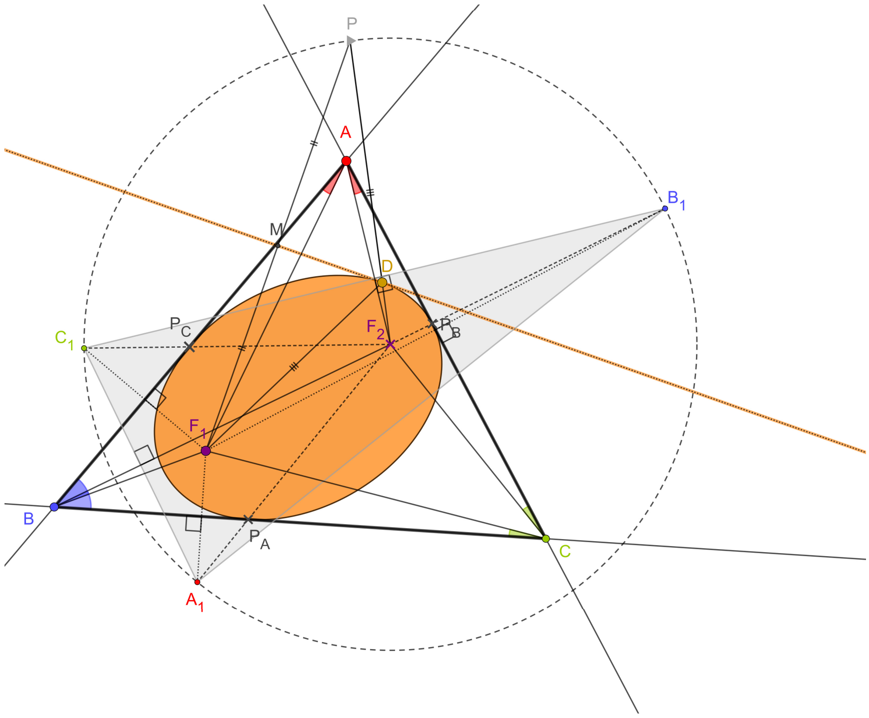

Figure 4. Cônica inscrita: uma construção usando a propriedade ótica

- *sejam P_A, P_B, P_C os pontos de interseção das retas A_1F_2,B_1F_2, C_1F_2, com as arestas BC, CA, AB.*

Então:

- *o centro da cônica inscrita é o ponto O, o ponto médio do segmento F_1F_2;*
- *P_A, P_B, P_C são os pontos de tangência da cônica inscrita com as arestas;*
- *os pontos P'_A, P'_B, P'_C os simétricos de P_A, P_B, P_C em relação ao O pertencem à cônica.*

A cônica está determinada e podemos usar a ferramenta Geogebra "cônica por cinco pontos" para construí-la.

Se F_2, o conjugado isogonal de F_1 coincide com F_1, a cônica é o i-circulo.

4.1. **Ferramenta conjugado isogonal.** Entrada: A,B,C;P.

Dados os pontos não colineares A, B, C e um ponto P distinto destes:

- construir AA_i a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$; para isso selecione o comando bissetriz ângulo $\angle BAC$ (haverá duas) e intercepte-as com o segmento $[BC]$, obtendo o pê da bissetriz interna; seja A_i seu pê;
- construa $[AA_1$, a simétrica da semirreta $[AP$ em relação à semirreta $[AA_i$; seja A_1 a interseção desta com a reta BC.
- repita a operação para o vértice B para obter o ponto B_1.

Saida: P' o ponto de interseção de AA_1 e BB_1 é o conjugado isogonal de P.

5. Bibliografia

[A] Akopyan, A., Zaslavsky, A.,A. (2007) *The geometry of Conics* RI: Math. World, Amer. Math. Soc, vol 28.

[E] Eagles,T.,H.,*Constructive Geomtry of plane curves with numerous examples* London, MacMillan and Co, 1885.

[G] Gheorghe, L.G. *When Newtons' conics meet Cremonas' partition*, preprint, 2021.

[GSO] Glaser, G., Stachel, H., Odehnal, B., *The Universe of Conics*, From the ancient world to 21th century developments, Springer Spektrum, Springer-Verlang Berlin Heidelberg 2016, DOI: 10.1007/978-3662-45450-3.

[S] Salmon, G. *A treatise on conic sections* London: Longmans, Green, Reader and Dyer 1869.

[W] Weisstein, E., (2019) Mathworld-A Wolfram Web Resource, mathworld.wolfram.com

Liliana Gabriela Russo
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
RECIFE, (PE) BRASIL
E-mail address:
liliana@dmat.ufpe.br