



## UM MODELO NUMÉRICO BASEADO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A ANÁLISE MECÂNICA DE MATERIAIS ENRIJECIDOS

### A numerical model based on the Boundary Element Method for the mechanical analysis of reinforced materials

Antônio Rodrigues Neto (1) (P); Edson Denner Leonel (2)

(1) Mestrando, Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, Brasil.

(2) Prof. Dr., Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, Brasil.

E-mail para Correspondência: antonio.rodrigues.neto@usp.br; (P) Apresentador

**Resumo:** Neste trabalho, domínios não-homogêneos bidimensionais enrijecidos são analisados por meio de uma técnica de acoplamento entre métodos numéricos. Nesta técnica, o domínio bidimensional é descrito pela formulação bidimensional do Método dos Elementos de Contorno (MEC), enquanto que uma abordagem unidimensional, denominada MEC1D, descreve os enrijecedores. A interação entre os elementos estruturais é descrita por uma força de aderência, considerando inexistentes deslocamentos relativos (aderência perfeita). A não-homogeneidade material é reproduzida de forma completa por meio da técnica de sub-regiões no domínio bidimensional e do *joint element* no enrijecedor, a qual permite que enrijecedores cruzem interfaces de sub-regiões, passando por domínios de diferentes propriedades físicas. Formulações similares são encontradas na literatura, onde o enrijecedor é descrito pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), caracterizando o acoplamento MEC/MEF. Exemplos numéricos mostram que a abordagem MEC/MEC1D conduz a resultados igualmente precisos em deslocamentos e com qualidade superior em força de aderência e em esforços normais, visto que oscilações são usualmente observadas próximas às descontinuidades para ambas as abordagens. A técnica do *joint element* é aplicada à ambos os acoplamentos, concluindo que a região de cruzamento entre enrijecedor e interface apresenta um comportamento de descontinuidade. Por fim, exemplos numéricos são analisados, comparando os resultados com valores de referência, o que demonstra o potencial e a aplicabilidade do modelo proposto.

**Palavras chaves:** MEC; Enrijecedor; Acoplamento MEC/MEF; Acoplamento MEC/MEC.

**Abstract:** In this work, a numerical methods coupling technique is presented for the mechanical analysis of reinforced non-homogeneous domains. In this technique, the two-dimensional domain is described by a singular formulation of the Boundary Element Method (BEM), whereas a one-dimensional approach, called BEM1D, represents the reinforcements. The interaction between the structural elements is described by a contact force, with no relative displacements (perfect adherence). Material non-homogeneity is reproduced completely by the sub-region technique in the two-dimensional domain and the *joint element* technique in the



reinforcement, which allows the reinforcements to cross interfaces of sub-regions, passing through domains of different physical properties. The FEM/BEM coupling, which can be found in the literature, is similar to the approach used in this work, with the reinforcements modeled by the Finite Element Method (FEM). However, numerical examples show that the results of the BEM/BEM coupling are equally accurate for displacements and exhibit a higher quality for contact force and normal stress, since oscillations are usually observed around discontinuity regions in both coupling methods. The joint element technique is applied to both techniques, which concludes that the crossing region between reinforcement and interface shows a discontinuity characteristic. Finally, numerical examples are solved, comparing the results with reference values, which demonstrates the power and applicability of the proposed scheme.

**Keywords:** BEM; Reinforcement; FEM/BEM Coupling; BEM/BEM Coupling.

## 1 INTRODUÇÃO

Materiais e estruturas reforçadas são amplamente utilizadas em projetos de engenharia. Com a busca por projetos e componentes mecanicamente eficientes, isto é, de alta resistência e baixo peso, aplicações como painéis reforçados e materiais compósitos se tornaram extremamente relevantes em diversas áreas da engenharia. Dentre estas, se destacam as aplicações na área civil, automotiva, naval e aeronáutica, como apresentado em Armentani e Citarella (2006) e Citarella (2009). Para a análise mecânica destes componentes, soluções analíticas são altamente restritivas e, portanto, abordagens numéricas devem ser utilizadas.

Estruturas reforçadas usualmente acoplam elementos estruturais que podem ser convenientemente modelados de diferentes maneiras, como, por exemplo, chapas em estado plano de tensão e treliças ou vigas unidimensionais. Assim, abordagens baseadas no acoplamento entre métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) possuem eficiência reconhecida para a representação de materiais e estruturas enrijecidas. Nestas abordagens, cada método é aplicado à sub-estrutura na qual apresenta maiores vantagens. O acoplamento MEC/MEF foi inicialmente proposto por Zienkiewicz, Kelly e Bettles (1977). Desde então, diversos autores o utilizaram em novos desenvolvimentos, tornando-o uma abordagem consolidada. Um completo estado da arte para este assunto foi apresentado por Ganguly, Layton e Balakrishna (2000) e Elleithy, Tanaka e Guzik (2004). Bia et al. (2002) apresentou uma análise de vantagens e desvantagens deste tipo de acoplamento.

Neste trabalho é proposto um modelo formulado com base no usual acoplamento MEC/MEF, no qual os enrijecedores são representados por elementos unidimensionais, resistentes somente a esforço axial. Neste tipo de acoplamento, a interação entre os elementos estruturais (domínio e enrijecedor) é descrita por uma força de aderência, considerando inexistentes deslocamentos relativos (aderência perfeita). O domínio é descrito por uma formulação singular bidimensional do MEC, enquanto que uma forma unidimensional do MEC (MEC1D) é utilizada para a representação mecânica dos elementos enrijecedores, em substituição ao MEF no acoplamento usual. A aplicação do MEC1D e apresentação de suas soluções fundamentais podem ser encontradas em Seixas, Marques e Filgueiras (2010) e Cruz (2012). O acoplamento proposto é denominado MEC/MEC1D. Segundo exemplos numéricos



analisados, o modelo demonstrou resultados mais estáveis em comparação ao acoplamento MEC/MEF, principalmente para representação de tensões e força de aderência nas regiões mais críticas, próximas a descontinuidades.

Para representar a não-homogeneidade do material é utilizada a técnica de discretização em sub-regiões apresentada por Rizzo e Shippy (1968) para a formulação bidimensional do MEC. Tal técnica se baseia na imposição de condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio de tensões na interface de sub-regiões adjacentes. Além disso, para que as fibras enrijecedoras possam se posicionar livremente na estrutura, com a possibilidade de cruzamento com interfaces de sub-regiões, é utilizado o chamado *joint element*. Esta estratégia se baseia no emprego de um elemento enrijecedor especial sobre a interface, permitindo que a formulação seja aplicada e que a fibra apresente continuidade nesta região. Dessa forma, a não-homogeneidade material e estrutural pode ser representada de forma geral.

## 2 FORMULAÇÃO

### 2.1 Formulação bidimensional do MEC

As formulações do MEC utilizadas neste trabalho são válidas para domínios ( $\Omega$ ) homogêneos e de comportamento linear-elástico, cujo contorno ( $\Gamma$ ) está sujeito a carregamentos estáticos. Estas formulações podem ser obtidas por meio da aplicação da técnica de resíduos ponderados sobre a equação de equilíbrio do problema, de forma que a solução do problema fundamental seja adotada como função ponderadora. No caso bidimensional isotrópico, as soluções fundamentais são conhecidas como soluções de Kelvin e podem ser facilmente encontradas em livros-texto, como Brebbia e Dominguez (1989).

Primeiramente, para domínios bidimensionais, a equação que descreve a técnica de resíduos ponderados é dada por:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_{ij}^* d\Omega = 0 \quad (1)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as tensões de Cauchy,  $b_i$  são as forças de volume e  $u_{ij}^*$  são as soluções fundamentais em deslocamentos.

Sobre a Eq. (1) são aplicadas as equações de equilíbrio e compatibilidade do problema fundamental, além de realizada integração por partes, obtendo:

$$u_i^s + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (2)$$

onde  $u_i^s$  representam os deslocamentos de um dado ponto interno ao domínio, denominado ponto fonte, enquanto que  $u_j$  e  $p_j$  são as grandezas deslocamento e força de superfície dos pontos pertencentes ao contorno.

A Equação (2) é denominada Identidade Somigliana e permite obter os deslocamentos em qualquer ponto interno ao domínio ( $u_i^s$ ) em função das grandezas do contorno. A aplicação de uma técnica denominada processo limite consiste em levar o ponto fonte para o contorno, permitindo obter a forma singular do MEC:



$$c_{ij}^s u_j^s + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} p_{ij}^* b_j d\Omega \quad (3)$$

onde  $c_{ij}^s$  é o termo livre, dado por  $\delta_{ij}/2$  para contornos suaves, sendo  $\delta_{ij}$  o operador delta de Kronecker.

A Equação (3) é avaliada de forma que cada nó da malha de contorno seja considerado o ponto fonte ( $s$ ). Desta forma, é possível escrever o sistema algébrico de equações que relaciona as grandezas  $u$  e  $p$  do contorno, levando à solução do problema. Vale mencionar também que este processo faz com que as integrais das soluções fundamentais encontrem singularidades, nos pontos coincidentes com o ponto fonte. Portanto, deve ser aplicada uma técnica de subtração de singularidade (ALIABADI, HALL e PHEMISTER; 1985), na qual os núcleos singulares são avaliados no sentido de Valor Principal de Cauchy e Parte Finita de Hadamard.

## 2.2 Formulação unidimensional do MEC

A formulação unidimensional (MEC1D) pode ser obtida de forma análoga por meio da aplicação da técnica de resíduos ponderados sobre a equação de equilíbrio do problema unidimensional:

$$\int_0^L (EAu_{,ii} + p) u^* dx = 0 \quad (4)$$

onde  $u^*$  é a solução fundamental do deslocamento axial,  $i$  representa unicamente a direção axial do problema e  $p$  é a carga distribuída axial sobre o domínio.

As soluções fundamentais para este caso podem ser dadas, em deslocamento e esforço normal, dadas por:

$$u_{sf}^* = -\frac{|x_f - x_s|}{2EA} \quad (5)$$

$$N_{sf}^* = -\frac{\text{sign}(x_f - x_s)}{2}$$

onde os índices  $s$  e  $f$  representam, respectivamente, os pontos fonte e campo. Já a variável  $x$  é a coordenada do ponto no sistema local. Pode-se observar que, diferentemente do problema bidimensional, estas soluções fundamentais não apresentam singularidades.

Aplicando integração por partes e a equação de equilíbrio do problema fundamental na Eq. (4), pode ser obtido:

$$u_i - N_{i1}^* u_1 + N_{iL}^* u_L = u_{i1}^* N_1 + u_{iL}^* N_L + \int_0^L \phi_k u_{ik}^* p_k dx \quad (6)$$

onde os índices subscritos  $I$  e  $L$  os pontos de extremidade do elemento unidimensional e  $\phi_k$  são as funções de forma, que interpolam os valores nodais  $p_k$  da carga distribuída.

Note que o contorno é descrito somente pela consideração de  $i=1$  e  $i=L$  na Eq. (5), enquanto que para qualquer outro valor de  $i$  é obtida uma equação de ponto interno. Somente a consideração destes dois pontos leva à solução do problema em deslocamentos e esforços normais. Porém, a consideração de pontos internos no sistema é necessária para a melhor representação da carga distribuída ( $p_k$ ), visto que o número de pontos limita a ordem de aproximação desta grandeza.

### 2.3 Acoplamento domínio/enrijecedor

A formulação para o acoplamento domínio/enrijecedor segue a estratégia do tradicional acoplamento MEC/MEF. Partindo do princípio que, para dado domínio bidimensional  $\Omega$ , cujo contorno  $\Gamma$  foi discretizado em elementos de contorno, os enrijecedores são imersos em  $\Omega$  e posicionados sobre a linha  $\bar{\Gamma}$ , também discretizada em elementos do MEC1D. Domínio e enrijecedor são analisados separadamente, sendo que a interação entre eles é dada por uma carga distribuída ao longo da linha  $\bar{\Gamma}$ , chamada de força de aderência ou contato. A Figura 1 ilustra a aplicação da técnica utilizada.

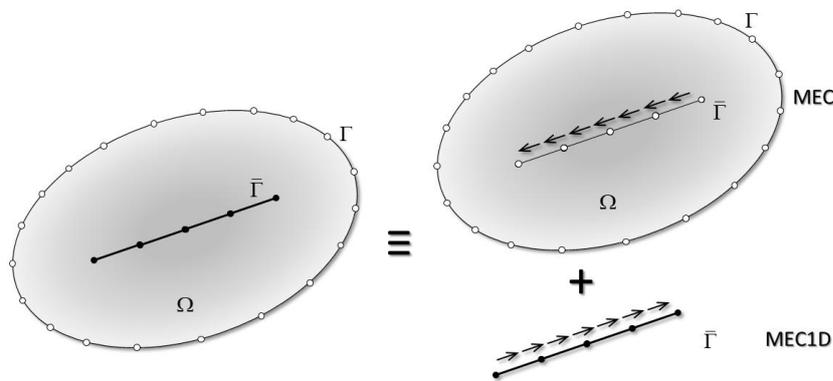


Figura 1: Técnica de acoplamento domínio/enrijecedor.

São denominados  $\mathbf{f}_E$  e  $\mathbf{f}_D$  os valores nodais da força de aderência e  $\mathbf{u}_E$  e  $\mathbf{u}_D$  os deslocamentos nodais no enrijecedor e no domínio, respectivamente. Assim, a interação entre os elementos estruturais pode ser traduzida pelas relações de equilíbrio e compatibilidade:

$$\mathbf{f}_E = -\mathbf{f}_D \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_E = \mathbf{u}_D \quad (7)$$

Para escrever a expressão do MEC correspondente ao domínio, a força de aderência deve ser considerada com uma força de campo ( $b_i$ ). Dessa forma, as integrais de domínio na Eq. (2) e na Eq. (3) podem ser avaliadas também como integrais de linha, sobre  $\bar{\Gamma}$ . Assim, a forma singular do MEC pode ser escrita para os pontos do contorno, de forma matricial, por:

$$\mathbf{H}_{CC}\mathbf{u}_c = \mathbf{G}_{CC}\mathbf{p}_c + \mathbf{G}_{CF}\mathbf{f}_D \quad (8)$$

onde as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  indicam os resultados das integrações das soluções fundamentais  $p^*$  e  $u^*$ , respectivamente. Os índices subscritos  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{C}$  indicam sobre quais elementos a integração é realizada,  $\mathbf{F}$  para enrijecedores (fibras) e  $\mathbf{C}$  para contorno.

A Identidade Somigiliana é aplicada para os pontos presentes na linha do enrijecedor ( $\bar{\Gamma}$ ), pois estes representam pontos internos ao domínio. Assim, a Eq. (2) pode ser escrita matricialmente como:

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{G}_{FC}\mathbf{p}_c - \mathbf{H}_{FC}\mathbf{u}_c + \mathbf{G}_{FF}\mathbf{f}_D \quad (9)$$

Por fim, é necessário escrever a equação que descreve o comportamento dos enrijecedores. Para o modelo proposto, esta expressão é dada pela Eq. (6), a qual pode ser escrita matricialmente da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_E \mathbf{u}_E = \mathbf{G}_E \mathbf{f}_E \quad (10)$$

onde a matriz  $\mathbf{K}_E$  representa os resultados da integração da solução fundamental  $N^*$  e a matriz  $\mathbf{G}_E$ , da integração da solução fundamental  $u^*$  multiplicada pelas funções de forma  $\phi$ . Além disso, foram consideradas apenas cargas distribuídas ( $\mathbf{f}_E$ ) aplicadas no elemento.

Vale mencionar que o acoplamento MEC/MEF pode ser facilmente obtido através desta formulação, por meio da utilização de uma expressão do MEF unidimensional na Eq. (10).

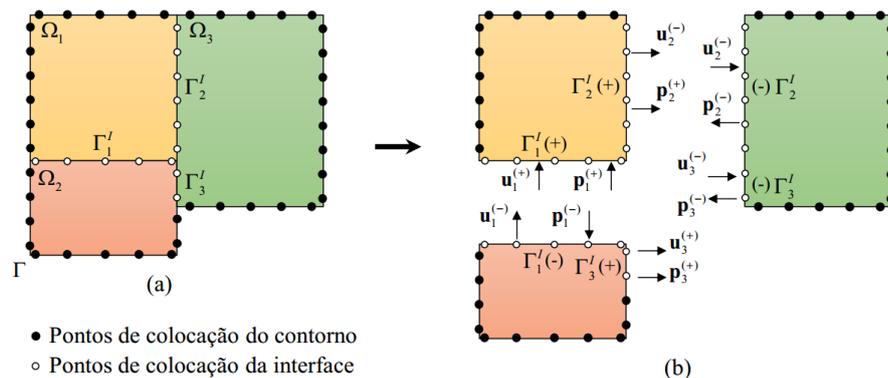
As relações de compatibilidade e equilíbrio da Eq. (7) são substituídas na Eq. (8), Eq. (9) e na Eq. (10). Assim, é possível escrever um sistema algébrico que relaciona as grandezas no contorno e nos enrijecedores:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{CF} \\ \mathbf{H}_{FC} & \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E & \mathbf{G}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_D \\ \mathbf{f}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{CC} \\ \mathbf{G}_{FC} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{\mathbf{p}_c\} \quad (11)$$

O sistema algébrico dado pela Eq. (11) permite obter a solução em deslocamentos e forças de superfície para todos os pontos. Para tal, a aplicação das condições de contorno é realizada por meio da técnica de troca de colunas, conforme detalhado por Brebbia e Dominguez (1989).

## 2.4 Técnica para domínios não-homogêneos

A técnica de sub-regiões do MEC se baseia na discretização de cada região homogênea, de forma que a interface entre as diferentes regiões seja constituída de pares de elementos na mesma posição, nos quais cada um pertence a um dos subdomínios. A Figura XX abaixo ilustra a aplicação da técnica.



**Figura 2: Discretização de um (a) domínio não homogêneo em (b) subdomínios, Andrade (2017).**

Cada sub-região é analisada separadamente, ou seja, a forma singular do MEC – Eq. (8) – pode ser aplicada, obtendo as matrizes  $(\mathbf{H}_{CC})_i$  e  $(\mathbf{G}_{CC})_i$ , para cada subdomínio  $i=1, \dots, N_{sr}$ . Por sua vez, os pontos de colocação pertencentes às interfaces apresentam, diferentemente dos pontos do contorno externo, deslocamentos e forças de superfície desconhecidos. Dessa forma, para estes pontos devem ser escritas equações de compatibilidade, considerando contato perfeito:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(+)} &= \mathbf{u}^{(-)} \\ \mathbf{p}^{(+)} + \mathbf{p}^{(-)} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

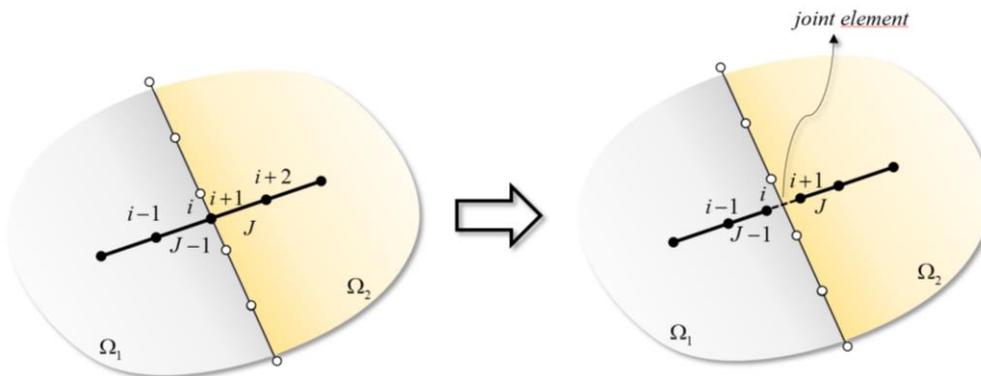
onde os índices (+) e (-) indicam cada uma das sub-regiões delimitadas pela interface a qual pertence o ponto de colocação em questão.

Escrevendo a Eq. (8) para cada subdomínio e aplicando a Eq. (12) para os pontos pertencentes às interfaces, a forma singular do MEC pode ser reescrita de uma forma global por:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_c} (\mathbf{H}_{CC})_j (\mathbf{u}_c)_j + \sum_{k=1}^{NI} \left[ \sum_{n=1}^{N_i^k/2} (\mathbf{H}_{CC})_n^{(+)} (\mathbf{u}_c)_n^{(+)} + \sum_{n=1}^{N_i^k/2} (\mathbf{H}_{CC})_n^{(-)} (\mathbf{u}_c)_n^{(-)} \right] = \\ \sum_{j=1}^{N_c} (\mathbf{G}_{CC})_j (\mathbf{p}_c)_j + \sum_{k=1}^{NI} \left[ \sum_{n=1}^{N_i^k/2} (\mathbf{G}_{CC})_n^{(+)} (\mathbf{p}_c)_n^{(+)} + \sum_{n=1}^{N_i^k/2} (\mathbf{G}_{CC})_n^{(-)} (\mathbf{p}_c)_n^{(-)} \right] + \sum_{i=1}^{N_{sr}} \left( \sum_{n=1}^{N_D^k} (\mathbf{G}_{CF})_n (\mathbf{f}_D)_n \right) \end{aligned} \quad (13)$$

onde  $N_c$  representa o número de pontos pertencentes ao contorno externo,  $NI$  o número de interfaces,  $N_i^k$  o número de pontos da interface  $k$  e  $N_D^k$  o número de nós de elementos enrijecedores inseridos na sub-região  $k$ . Percebe-se que o rearranjo das equações permite que a expressão da Eq. (13) seja reescrita matricialmente da mesma forma da Eq. (8), ou seja, sem prejuízo à formulação do acoplamento.

A formulação do acoplamento descrita anteriormente exige que todos os elementos enrijecedores estejam inseridos totalmente dentro de um subdomínio do MEC bidimensional. Para superar esta limitação, sobre cada cruzamento entre enrijecedor e interface de subdomínios é utilizado um “elemento de junta”, ou *joint element*, ilustrado pela Figura 3.



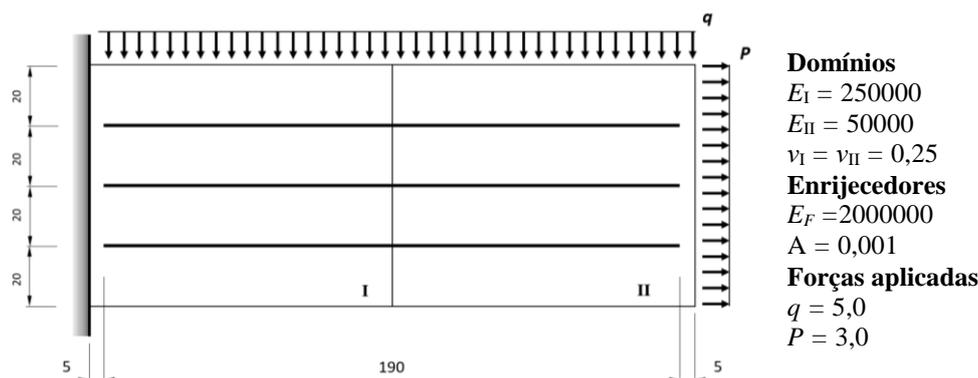
**Figura 3: Estratégia utilizada para enrijecedores que cruzam interfaces de subdomínios.**

A estratégia é definida de forma que, sobre cada cruzamento entre enrijecedor e interface, existam dois nós da malha de enrijecedores sobrepostos ( $i$  e  $i+1$  na Figura 3). Nesta situação, o modelo computacional movimentava os nós  $i$  e  $i+1$  sobre a linha de cada um dos elementos  $J-1$  e  $J$ , deslocando-os um quarto do comprimento total do elemento. Entre estes dois nós é definido o *joint element*.

O *joint element* não é considerado nas integrais de linha da Eq. (8) e da Eq. (9), visto que não está inserido em um domínio bidimensional definido. Porém, sua rigidez é considerada na construção das matrizes da Eq. (10), uma vez que esta expressão é independente do domínio bidimensional no qual o elemento é inserido. Dessa forma, a continuidade da fibra enrijecedora é garantida, mesmo que este elemento não exista do ponto de vista da formulação de contorno bidimensional.

### 3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

O primeiro exemplo apresentado trata de uma estrutura composta por dois diferentes domínios bidimensionais, de comportamento elástico e isotrópico, nos quais são inseridos 3 enrijecedores, conforme ilustrado na Figura 4. Os enrijecedores cruzam a interface das sub-regiões bidimensionais, o que permite verificar a atuação do *joint element* na resolução numérica do problema. As propriedades físicas e valores de carregamentos são citados na própria figura.



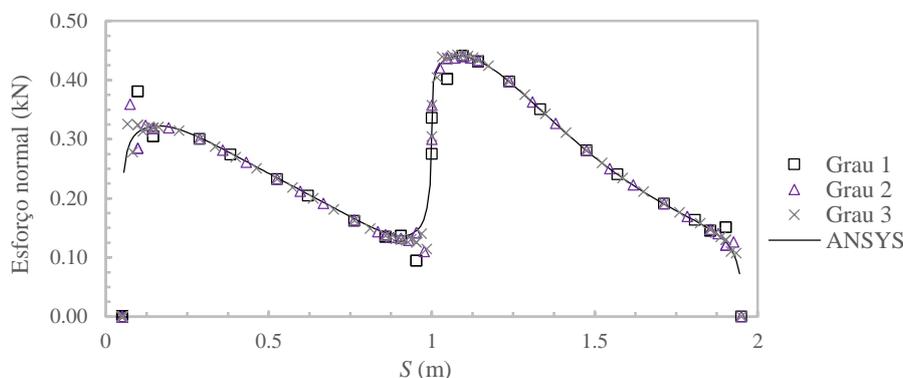
**Figura 4: Estrutura analisada no primeiro exemplo numérico (dimensões em cm).**

Para a análise via MEC do domínio bidimensional foi utilizada uma malha composta por 72 elementos quadráticos, totalizando 152 nós. Para os enrijecedores foram construídas diferentes malhas visando demonstrar a convergência dos resultados e a influência da discretização. É utilizado o modelo proposto (acoplamento MEC/MEC1D), além do já consolidado acoplamento MEC/MEF para a análise mecânica.

Como referência para os resultados, foi construído um modelo no software ANSYS composto por elementos de chapa e de treliça lineares (*PLANE 182* e *LINK180*). O software se baseia em uma formulação de MEF puro, sendo que os enrijecedores devem ser adicionados com nós coincidentes com a malha de domínio. Este modelo apresentou convergência de malha, se mostrando confiável para utilização como referência.

São analisados inicialmente os resultados nos enrijecedores, por meio do esforço normal ao longo de seu comprimento, descrito pela variável  $S$  nos gráficos seguintes. A Figura 5 apresenta os resultados para o enrijecedor superior, quando se utilizam os três diferentes graus de aproximação para a malha dos elementos enrijecedores. Nestas três análises, existe o mesmo

número de elementos enrijecedores (120). Os resultados são apresentados para o acoplamento MEC/MEC1D e a série denominada ANSYS representa os resultados de referência.



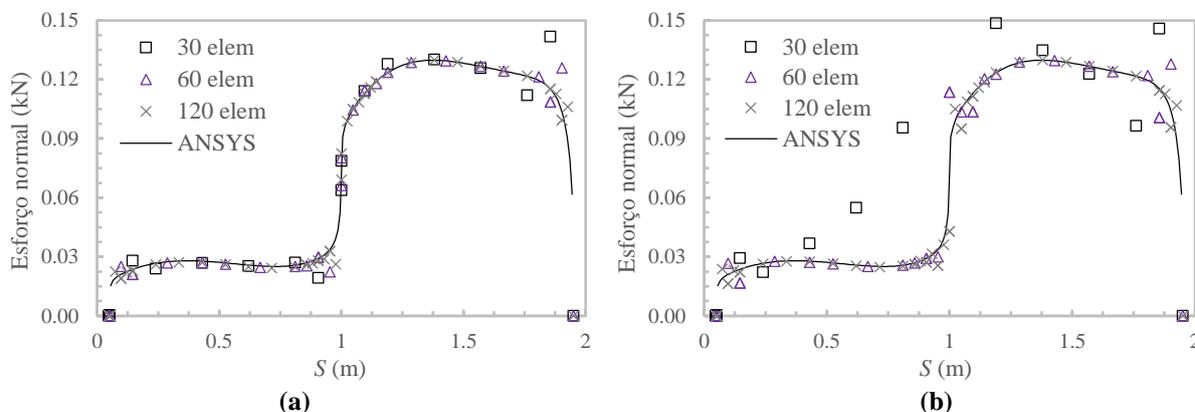
**Figura 5: Resultados de esforços normais para o enrijecedor superior com MEC/MEC1D.**

Na Figura 5 é possível observar que as três ordens de aproximação levaram a resultados coerentes em relação à referência. Percebe-se também que a região próxima ao cruzamento entre enrijecedor e interface ( $S = 1$  m) apresenta um comportamento com oscilações nos valores de tensão. Contudo, a comparação entre os resultados dos diferentes graus de aproximação permite constatar que o aumento da ordem contribui positivamente para a diminuição destas oscilações. Este comportamento já foi observado em regiões de extremidade de enrijecedores na literatura para o acoplamento MEC/MEF (LEITE, CODA e VENTURINI; 2003), quando é considerada aderência perfeita. Portanto, sua observação é esperada nas regiões próximas à descontinuidades no modelo proposto.

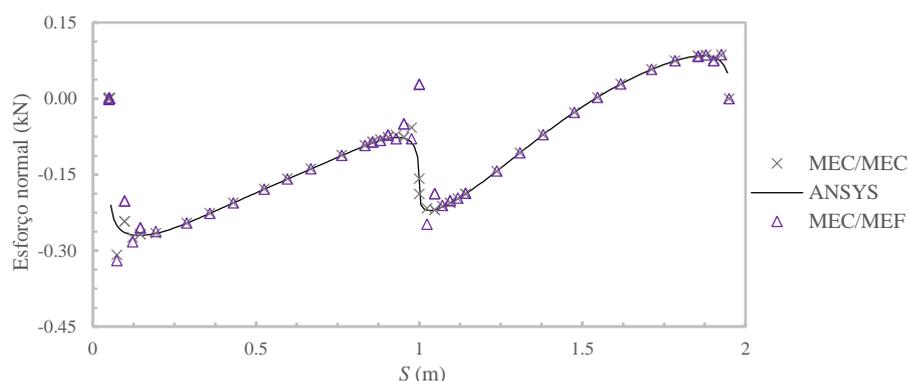
Em seguida, a Figura 6 ilustra as respostas de esforços para os enrijecedor central. A Figura 5 já analisou a precisão nos resultados em função da ordem de aproximação dos enrijecedores. Portanto, esta figura retrata a análise da variação na discretização da malha (30, 60 e 120 elementos) quando é fixado o grau quadrático de aproximação. Os resultados são exibidos para o acoplamento MEC/MEC1D (a) e para MEC/MEF (b), além da série ANSYS representando a referência.

Na Figura 6 é possível observar a convergência da malha de elementos quadráticos em função de sua discretização. Em ambos os gráficos fica claro que o maior número de elementos contribui positivamente para a precisão dos valores, além de levar à uma diminuição das oscilações nas regiões de descontinuidade. É possível perceber também que o acoplamento MEC/MEC1D apresenta melhor convergência, visto que, com o MEC/MEF, a malha de 30 elementos se mostrou insuficiente para representação do problema, diferentemente da análise pelo modelo proposto. Com a malha mais refinada, ambas as abordagens levaram a resultados precisos e dentro do esperado.

A Figura 7 ilustra os resultados de esforço normal no enrijecedor inferior. Para esta análise, foi fixada uma malha de 120 elementos quadráticos, visto que as análises acima a indicaram como suficiente em ambos os modelos. As respostas obtidas pelos acoplamentos MEC/MEC1D e MEC/MEF podem ser comparados com a referência (ANSYS) nesta figura.



**Figura 6: Esforços normais no enrijecedor central via MEC/MEC1D (a) e MEC/MEF (b), para diferentes discretizações da malha de elementos quadráticos.**

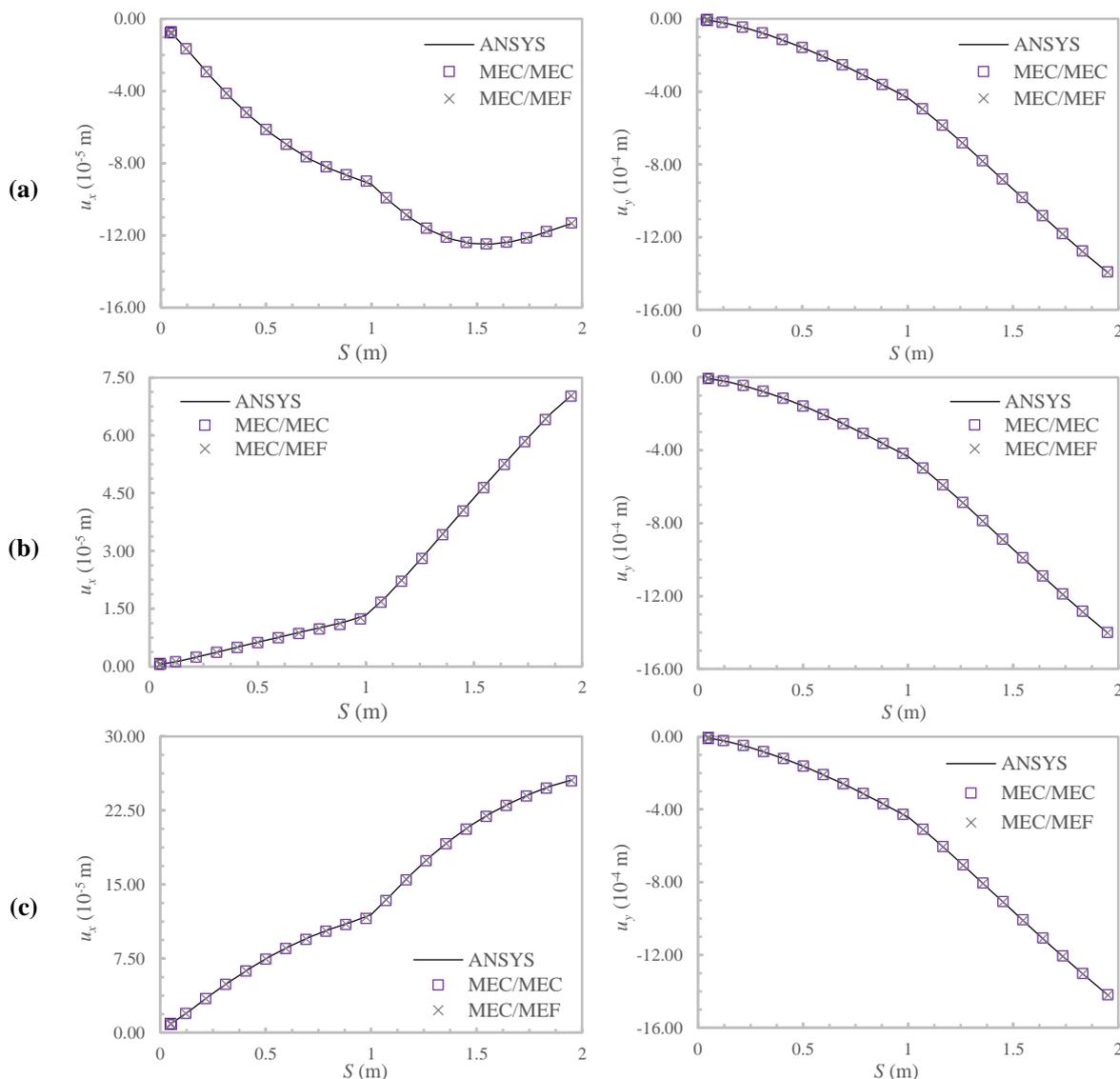


**Figura 7: Esforços normais no enrijecedor inferior utilizando malha de 120 elementos quadráticos.**

Com a Figura 7 é possível comparar os modelos de acoplamento em uma situação de equivalência. Com a mesma discretização, ambos levaram a resultados satisfatórios. Porém, é visível que o acoplamento MEC/MEC1D apresenta oscilações ligeiramente menores em comparação com o MEC/MEF, conforme esperado a partir das análises anteriores. Esta vantagem já foi constatada por Buffon (2018) para as regiões próximas às extremidades dos enrijecedores e pode ser observada agora também nas regiões próximas ao cruzamento dos enrijecedores com interfaces.

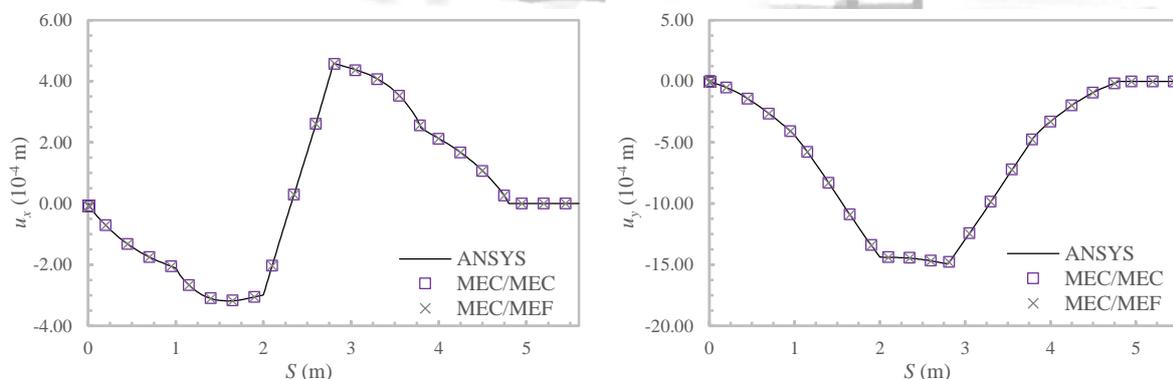
É importante observar nestas análises os valores de esforço normal nos pontos de extremidade dos enrijecedores. Os modelos com acoplamento MEC/MEC e MEC/MEF levam sempre a valores nulos nestes pontos, diferentemente dos resultados do ANSYS. Isto ocorre porque os modelos construídos com base no MEC bidimensional não permitem que uma força pontual da extremidade do enrijecedor seja aplicada ao domínio. Já a formulação baseada em MEF puro utilizada pelo ANSYS permite a transmissão desta força para o meio bidimensional, através do nó coincidente com a malha de domínio. Levando em conta que a aplicação de forças externas no interior de um domínio seja impraticável em problemas planos, ainda que o MEF o permita, pode-se considerar que a resposta obtida pelo modelo proposto e pelo MEC/MEF apresenta uma maior coerência nesta questão.

Os resultados de deslocamentos nos três enrijecedores são apresentados na Figura 8. Para a obtenção destes resultados foi escolhida a malha de aproximação quadrática para 120 elementos enrijecedores. Porém, vale citar que não são observadas diferenças nos resultados quando as outras aproximações são utilizadas. Na figura é possível comparar as análises via MEC/MEC, MEC/MEF e a referência (ANSYS).



**Figura 8: Deslocamentos horizontais ( $u_x$ ) e verticais ( $u_y$ ) dos enrijecedores: inferior (a), central (b) e superior (c).**

Por fim, os resultados nos domínios bidimensionais são apresentados por meio dos deslocamentos do contorno, na Figura 9. É definida uma variável  $S$ , que percorre o perímetro da estrutura em sentido anti-horário, com origem no canto inferior esquerdo. Os deslocamentos verticais e horizontais são apresentados em função desta linha  $S$ .



**Figura 9: Deslocamentos horizontais ( $u_x$ ) e verticais ( $u_y$ ) no contorno da estrutura.**

A análise da Figura 8 e da Figura 9 permite concluir que os resultados de deslocamentos nos enrijecedores e no domínio 2D são precisos e coerentes com a referência. Percebe-se ainda que tanto os deslocamentos no enrijecedor, quanto os resultados no domínio são pouco influenciados pela discretização dos enrijecedores, desde que esta forneça uma aproximação minimamente suficiente.

## 4 CONCLUSÕES

Foi construído um modelo para representação mecânica de estruturas e materiais enrijecidos, com base no usual acoplamento MEC/MEF, porém, com uso do MEC1D para representação dos elementos enrijecedores. Segundo resultados numéricos apresentados, o acoplamento MEC/MEC1D levou a resultados precisos e coerentes em todas as grandezas mecânicas analisadas. Nos valores de esforços, oscilações foram observadas em regiões próximas à extremidades de enrijecedores e cruzamentos com interfaces. Este comportamento já foi observado para o acoplamento MEC/MEF na literatura e é considerado comum para acoplamentos deste tipo construídos com base em aderência perfeita. Sabe-se também que tais oscilações tendem a diminuir com o aumento da discretização da malha e de sua ordem de aproximação, o que foi confirmado para ambos os acoplamentos utilizados. Porém, os resultados evidenciaram que a abordagem proposta levou à oscilações de menor intensidade quando comparado com o acoplamento usual. Finalmente, as estratégias utilizadas para tornar o modelo capaz de representar a não-homogeneidade foram validadas e se mostraram confiáveis para problemas de domínios enrijecidos não-homogêneos.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao departamento de estruturas pelo suporte e à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

## REFERÊNCIAS



Aliabadi, M.H., Hall, W.S., & Plemister, T.G., 1985. Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(12), 2221-2236.

Armentani, E., Citarella, R., 2006. DBEM and FEM analysis on non-linear multiple crack propagation in an aeronautic doubler-skin assembly. *International Journal of Fatigue*, 28(5-6), 598-608.

Bia, R.A., Ostrowski, Z., Kassab, A.J., Yin, Q., Sciubba, E., 2002. Coupling BEM, FEM and analytic solutions in steady-state potential problems. *Engineering analysis with boundary elements*, 26(7), 597-611.

Brebbia, C.A.; Dominguez, J., 1989. *Boundary Elements: An introductory Course*. New York: McGraw Hill, vol. I;

Buffon, L. P., 2018. *Formulações do Método dos Elementos de Contorno para a análise mecânica de domínios planos não-homogêneos enrijecidos*. 143 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

Citarella, R., 2009. Non-linear MSD crack growth by DBEM for a riveted aeronautic reinforcement. *Advances in Engineering Software*, 40(4), 253-259.

Cruz, J.M.F., 2012. *Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo Método dos Elementos de Contorno*. 391 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012.

Elleithy, W. M., Tanaka, M., Guzik, A., 2004. Interface relaxation FEM–BEM coupling method for elasto-plastic analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(7), 849-857.

Ganguly, S., Layton, J. B., & Balakrishna, C., 2000. Symmetric coupling of multi-zone curved Galerkin boundary elements with finite elements in elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(5), 633-654.

Leite, L.G., Coda, H.B., Venturini, W. S., 2003. Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. *Engineering analysis with boundary elements*, 27(3), 193-201.

Rizzo, F.J., Shippy, D. J., 1968. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. *International Journal of Solids and Structures*, 4(12), 1161-1179.

Seixas, R., Marques, F.D.M., Filgueiras, J.M., 2010. Uma estratégia para análise estática de pórticos planos e espaciais utilizando-se o método dos elementos de contorno. *Nono Simposio de Mecânica Computacional*.

Zienkiewicz, O.C., Kelly, D.W., Bettles, P., 1977. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, v.11, 355-375.