**O CRIVO DE ERATÓSTENES E GEOGEBRA: UMA PARCERIA DA ANTIGUIDADE E DA ERA COMPUTACIONAL PARA UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA**

Lúcia Resende Pereira[[1]](#footnote-1)

Patrick de Oliveira Sousa[[2]](#footnote-2)

Eduardo Albert Reges Sousa[[3]](#footnote-3)

**RESUMO**

A busca por números primos em pequenos intervalos é um dos objetivos da teoria dos números. Para isso, Eratóstenes, famoso cientista de 276 a.C, desenvolveu uma ferramenta que permite encontrar números primos no intervalo fechado $\left[2, N\right], N$ número inteiro positivo qualquer. Contudo, essa ferramenta, para valores de $N$ grandes pode não ser um recurso de fácil construção, quando o processo se realiza de forma manual. Pensando nisso, esse trabalho tem como objetivo construir um *applet* no *software* GeoGebra com fins didáticos. Assim, se apresenta um paralelo entre o Crivo de Eratóstenes, em sua essência, e uma construção feita com o uso do GeoGebra e seus poderosos recursos computacionais. Com o intuito de validar o resultado computacional como ferramenta didática, tem sido feita uma experiência didática em sala de aula ao nível do ensino fundamental.

**Palavras-chave:** Crivo de Eratóstenes. Números Primos. *Applets* didáticos. GeoGebra.

**INTRODUÇÃO**

Apresentar conteúdos relacionados à Matemática em sala de aula é um desafio pois, no momento de explanar determinados assuntos, o professor deve ter cuidado em não tornar tudo muito abstrato e de difícil compreensão. Deve-se procurar metodologias que auxiliem no entendimento dos conteúdos por parte dos estudantes, uma vez que o método exclusivamente expositivo dos conceitos e exemplos podem não ser bem assimilados por eles.

O tópico da Matemática abordado neste trabalho são os números primos e, com o intuito de torná-lo mais compreensível para os estudantes do ensino fundamental, tem sido construído um *applet* do Crivo de Eratóstenes no software GeoGebra.

De acordo com Andrade (2018), a história dos números primos tem início na Grécia Antiga, onde pensadores fizeram estudos a respeito de assuntos concretos e abstratos. Um dos estudos mais importantes dessa época, tem sido o conjunto de números inteiros positivos maiores que 1, que só tem dois divisores, 1 e o próprio número. Os elementos desse conjunto receberam o nome de números primos. Segundo Reis e Bayer (2020), outro trabalho relevante sobre os números primos está presente em *Os Elementos de Euclides*, no qual é provado que existem infinitos números primos. Em 200 a.C. surge o Crivo de Eratóstenes, uma tabela que facilita a obtenção de números primos. Eratóstenes foi um cientista grego, nascido em Cirene, por volta de 276 a.C., conhecido, até os dias de hoje, pelas suas diversas obras nos campos da Matemática e da Astronomia. No ramo astronômico, Eratóstenes é reconhecido, principalmente, pelo seu cálculo que determinou, com considerável aproximação, os valores conhecidos atualmente das medidas da circunferência e do raio da Terra. Segundo o site AstroCiência (2016), os cálculos de Eratóstenes chegaram à conclusão de que a Terra possui uma circunferência de 40.000 km e raio de 5.400 km, enquanto hoje se sabe precisamente que esses valores são, respectivamente, 40.072 km e 6.371 km.

Sobre a construção do Crivo de Eratóstenes e seu *applet* no GeoGebra, é um dos tópicos que discorre-se ao longo deste trabalho. A motivação na escolha do tema gerou-se através das aulas da disciplina de Teoria dos Números, que incentivou dois alunos e professores à construção do Crivo de Eratóstenes no software GeoGebra. Os alunos de graduação tinham, por sua vez, uma turma de ensino fundamental, na qual exploraram o impacto da construção do Crivo como experiência didática nesse nível de ensino.

A organização do trabalho segue o seguinte roteiro: na Seção Fundamentos Matemáticos, apresenta-se uma explanação do raciocínio por trás do Crivo de Eratóstenes. Na Seção Metodologia e Materiais, encontram-se o detalhamento dos passos da construção do Crivo noGeoGebra. Na Seção Resultados e Discussão da Experiência em Sala de Aula, descreve-se a proposta didática e os resultados obtidos com estudantes de uma turma do 7º ano do ensino fundamental. Na Seção Considerações Finais, é feita uma reflexão sobre o uso da tecnologia em sala de aula e dos rumos que esse trabalho pode tomar futuramente.

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS: O CRIVO DE ERATÓSTENES**

A fim de ilustrar o Crivo, considere um intervalo fechado de inteiros positivos com valor mínimo 2 e valor máximo 10. Procura-se um método para determinar quais são os números primos que se encontram limitados a esse intervalo. Uma possibilidade é verificar quais números possuem apenas dois divisores naturais – 1 e o próprio número. Por exemplo, denotando por $D\left(a\right)$ o conjunto dos divisores positivos de um inteiro $a$, tem-se:

$$D\left(2\right)=\left\{1, 2\right\}, D\left(3\right)=\left\{1, 3\right\}, D\left(4\right)=\left\{1, 2, 4\right\}, D\left(5\right)=\left\{1, 5\right\}, D\left(6\right)=\left\{1, 2, 3, 6\right\}, $$

$$D\left(7\right)=\left\{1, 7\right\}, D\left(8\right)=\left\{1, 2, 4, 8\right\}, D\left(9\right)=\left\{1, 3, 9\right\}, D\left(10\right)=\{1, 2, 5, 10\}$$

Logo, pode-se concluir que os números primos encontrados entre 2 e 10 são os números 2, 3, 5 e 7. Note, no entanto, que esse método utilizado para encontrar os números primos pode não ser muito eficiente se o objetivo for determinar esses valores para intervalos maiores. Nesses casos, usualmente recorre-se a um artifício muito antigo, porém válido até os dias de hoje, o qual permite encontrar valores com as propriedades dos números primos para intervalos grandes, utilizando apenas o conceito de múltiplos de um número. Esse método é conhecido como Crivo de Eratóstenes, o qual é apresentado a seguir.

O Crivo de Eratóstenes é um método de eliminação de múltiplos de determinados valores primos, visando encontrar quais são os números primos presentes em um intervalo com valor mínimo 2 e máximo $N, N$ inteiro positivo qualquer. Suponha agora $N$ = 25: Eratóstenes pensou em, primeiramente, distribuir esses números em uma tabela, cujo primeiro número é 2 e o último 25, visando sua organização de forma mais eficiente, como mostra a Figura 1.

**Figura 1:** Visualização da montagem do exemplo



Fonte: Criado pelos autores.

Feito isso, o próximo passo consiste em eliminar os múltiplos dos primeiros números primos que aparecem na tabela. Eliminam-se os múltiplos de 2, porém, mantendo na tabela o próprio número. A seguir, eliminam-se os múltiplos de 3 e 5, cujo resultado é apresentado na Figura 2.

**Figura 2:** Segunda etapa da construção



Fonte: Criado pelos autores.

Observe que na tabela restam apenas os números primos compreendidos no intervalo dado, que são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, e 23. Note, também, que não se tem a necessidade de eliminar os múltiplos de 7, 11, 13, dentre outros primos, uma vez que o produto de 7 pelo próprio 7 resulta em 49, que é um valor maior que 25. Dessa forma, pode-se determinar que, pelo método do Crivo de Eratóstenes, só precisa-se eliminar os múltiplos dos primos *p* que correspondem à seguinte expressão: $p\leq \sqrt{N}$. No exemplo exibido, elimina-se apenas os múltiplos de 2, 3 e 5 pois, uma vez que $N = 25$, temos que $p\leq \sqrt{25}$, ou seja, $p\leq 5.$ Fazendo a substituição na notação $p = Y $ e $N = X$, Martins (2014, p. 14), afirma:

*"... para construir a lista de primos até* $X$ *[...], calculamos a raiz quadrada de* $X$ *(um número* $Y$ *tal que* $Y × Y = X$*; [..]) e aplicamos o método de Eratóstenes até* $Y$ *[...]",*

Contudo, à medida que o extremo superior do intervalo aumenta, pode se tornar muito mais complexo obter todos os valores primos contidos nesse intervalo. Porém, os recursos computacionais disponibilizados pelo software GeoGebra, tem facilitado a tarefa da construção do Crivo de Eratóstenes. Uma das ferramentas facilitadoras do software é a possibilidade de utilizar um *script,* que é uma série de comandos que determina a execução de determinadas tarefas utilizando uma linguagem específica. No caso do GeoGebra a linguagem é o *GGBScript* que reduz a quantidade de processos necessários para realizar a mesma rotina.

**METODOLOGIA E MATERIAIS**

Nesta seção encontra-se o detalhamento dos principais comandos utilizados para o *applet* do Crivo de Eratóstenes utilizando a linguagem *GGBScript* do GeoGebra. Considera-se agora um intervalo fechado de inteiros positivos com valor mínimo 2 e valor máximo N=200, e inicia-se a construção de um retângulo dividido em quadrados dispostos em 20 colunas e 10 linhas. Para isso, define-se o vetor **u** com origem em $\left(0,0\right) e extremo em \left(1,0\right)$ e utilizam-se *scripts* predefinidos no software como Polígono, Transladar e Sequência, como segue:

TodasLinhas=Sequência(Sequência(Transladar(Polígono((0,k),(0,k+1),4),n\*u), n, 1, 20),k,0,9).

A seguir, definem-se comandos para determinar os múltiplos de 2, 3, 5, 7, 11 e até 13, visto que sendo N=200 toma-se o inteiro primo $p\leq \sqrt{200}$, ou seja, $p\leq 13.$ As ferramentas usadas são detalhadas nos seguintes passos:

**Passo I:** selecionam-se os múltiplos de 2 em duas etapas: variando de 2 a 20 e de 21 a 200. O comando em forma de *script* vem dado por

mult21=Sequência(Elemento(Elemento(TodasLinhas,1),2n), n,2,10),

em que Elemento é um *script* que escolhe específicos elementos de uma lista. Note que, como n varia de 2 a 10, temos a exclusão do próprio 2.

Completam-se os múltiplos de 2 até 200 através do *script* Concatenar:

mult2=Concatenar(mult21, Sequência(Sequência(Elemento(Elemento(TodasLinhas,k),2n),n,1,10),k,2,10)).

**Passo II:** Novamente se criam os múltiplos de 3 da primeira linha:

mult31=Sequência(Elemento(Elemento(TodasLinhas,1),3n), n,2,6)

para logo fazer as das outras linhas como no Passo I para o primo 2 da construção, obtendo:

mult3=Concatenar(mult31, Sequência(Sequência(Elemento(Elemento(TodasLinhas,k),3n-2(k-1)),n,1,6+k-1),k,2,10))

Note que, em relação à variação do n com valor máximo de 6+k-1, ocorre porque a quantidade de múltiplos de 3 na segunda linha (k=2) será de (6+2-1=7) e, como a quantidade de múltiplos não aumenta nas linhas posteriores, pode-se padronizar essa variação para as demais linhas.

**Passo III:** Definem-se os múltiplos de 5 como um único *script* para a primeira linha e depois para as seguintes, seguindo a mesma ideia dos múltiplos de 2, como segue:

mult51=Sequência(Elemento(Elemento(TodasLinhas,1),5n), n,2,4).

mult5= Concatenar(mult51,Sequência(Sequência(Elemento(Elemento(TodasLinhas,k),5n),n,1,10),k, 2,10))

**Passo IV:** Definem-se os múltiplos de 7 em duas etapas, como no caso dos múltiplos de 2:

mult71={Elemento(Elemento(TodasLinhas,1),14)}

mult7=Concatenar(mult71,Sequência(Sequência(Elemento(Elemento(TodasLinhas, k),7n-6(k-1)),n,1,3+(k-2)),k,2,10))

Note que o objetivo da programação é a de selecionar os valores da forma 7n-6(k-1). Tem-se o 6 porque há um espaçamento de seis quadrados entre cada quadradinho da forma 7n, e o k-1 porque a cada linha (k) precisa-se deslocar os múltiplos de 7 para a direita ou para a esquerda para que, dessa forma, as colunas de múltiplos de 7 não coincidam. Mais uma observação importante na programação em relação à variação do n com valor máximo de 3+k-2, ou 1+k, ocorre porque a quantidade de múltiplos de 7 na segunda linha (k=2) será de (3+2-2=3) se padronizando a fórmula dessa variação para as demais linhas.

**Passo V:** Seleção dos múltiplos de 11 que apresentam complexidades similares às anteriores para determinar o *script* adequado. A proposta deste trabalho para essa programação é a seguinte:

mult11Primeiros=Sequência(Sequência(Elemento(Elemento(TodasLinhas,k),11n-(11-2(k-1))),n,1,2),k, 2,10) mult11Ultimos=Sequência(Sequência(Elemento(Elemento(TodasLinhas,k),11n-(10-2((k-6)-1))),n,1,2),k, 7,10).

Observe que almeja-se selecionar os valores da forma 11n-(10-2((k-6)-1)), para $7\leq k\leq 10$. Note, também, que na sétima linha (k=7), por exemplo, tem-se: 11n-(10-2((7-6)-1) = 11n-10. Perceba, como n varia entre 1 e 2, nessa linha há, no máximo, dois múltiplos de 11. Quando n=1, 11n-10=11.1-10=1 e quando n=2, 11n-10=11.2-10=12. Isso significa que os múltiplos de 11 na linha 7 se encontram na primeira e na décima segunda posição. Segue-se esse padrão até a última linha. Finaliza-se a seleção concatenando as duas listas.

**Passo VI:** para a primeira linha se comanda com os valores da forma 13n , e neste caso, único elemento a aparecer é o 13.

mult13\_1=Elemento(Elemento(TodasLinhas,1),13).

Já para as seguintes linhas,o *script* resulta ser o mais complexo e elaborado*.* De fato, observa-se um padrão dos quadrados que ocupam os múltiplos de 13 nas seguintes linhas como sendo uma translação dos quadrados da primeira linha através do vetor **v** definido como:

v=Vetor(CentroDeGravidade(Polígono((1,0),(2,0),4)),CentroDeGravidade(Polígono((0,3),(0,2),4))),

em que se utiliza o comando CentroDeGravidade do GGB*Script.* Assim, o código correspondente dividido em dois casos distintos de translação, resulta em:

mult13\_{T1}=Sequência(Transladar(Elemento(Elemento(TodasLinhas,1),13),Vetor(n\*v)),n,1,4)

mult13\_2=Sequência(Elemento(Elemento(TodasLinhas,2),13n-7),n,1,2).

A partir dessas linhas do *script*, com mais comandos do tipo *GGBScript,* constroem-seos números que ocupam cada quadrado do Crivo com comandos Sequência, Elemento e Texto, como por exemplo,

Sequência(Texto(n, Elemento(Elemento(pontosNumeros,1),n), true, true),n,2,20),

entre outros que finalizam o preenchimento do Crivo.

Como etapa final, são criadas a caixas de seleção para cada tipo de número primo como, por exemplo, para os múltiplos de 2, é da forma:

primo2=CaixaDeSeleção("Múltiplos de 2", {mult2}).

Assim, o *applet* é finalizado com o objetivo de ser utilizado em sala de aula. Na Figura 5 é mostrado o resultado completo no ambiente da janela de visualização. De fato, o resultado consiste em uma tabela numerada, com valor mínimo 2 e valor máximo 200. Além disso, temos 6 caixas de seleção, que uma vez selecionadas, salientam os múltiplos dos primos 2, 3, 5, 7, 11 e 13, deixando ao final, não selecionados apenas os números primos entre 2 e 200.

**Figura 5:** Crivo de Eratóstenes no Ambiente GeoGebra. Clicando nos botões de seleção, ficam selecionados os múltiplos correspondentes.



Fonte: Criado pelos autores.

**RESULTADOS E DISCUSSÃO DA EXPERIÊNCIA EM AULA**

Após a fundamentação teórica observada ao longo dos tópicos anteriores, realiza-se uma aplicação do Crivo de Eratóstenes em sala de aula. Para esse fim, escolheu-se uma turma de sétimo ano de uma escola pública do município. O objetivo dessa observação é verificar como os alunos lidam com os números primos e a sua busca até então, e como esse conhecimento pode ser aprimorado utilizando o recurso criado no GeoGebra**.**

Primeiramente, solicita-se aos alunos para que definam, com suas próprias palavras, o conceito de números primos. Uma vez que poucos conseguiram responder de forma satisfatória ao que foi solicitado, foi apresentada a eles a definição formal de número primo. Após esse momento, com a garantia de que o conceito havia sido absorvido pelos alunos, foi solicitado que escrevessem em uma folha de papel quais são os números primos presentes entre 1 e 10 e, logo após, entre 1 e 30.

No primeiro caso, os alunos não mostraram resistência em tentar procurar esses números, pois o intervalo dado era consideravelmente curto. Já no segundo caso eles se mostraram um pouco mais intimidados, visto que o intervalo dado faria com que eles tivessem mais trabalho em procurar os números primos. Após a conclusão dessa atividade, evidenciou-se que os alunos acharam cansativo e desinteressante procurar primos em intervalos maiores, como por exemplo, ente 1 e 100.

Com o intuito de mostrar aos alunos a possibilidade de encontrar esses números em intervalos maiores, mas de uma forma menos complexa, como os números primos de 2 a 100, apresentamos o Crivo de Eratóstenes, discutindo a respeito do conceito matemático por trás dessa ferramenta e das propriedades a ele atribuídas. Essa explicação a respeito da construção do Crivo é importante, visto que ela pode reforçar o entendimento dos alunos em relação aos números primos, e no caso de apresentar o Crivo sem uma explanação sobre sua construção, estaríamos privando-os de uma reflexão sobre o motivo dessa ferramenta ser eficiente.

Antes do encerramento do momento em sala de aula, os alunos foram apresentados à ferramenta desenvolvida no GeoGebra, a qual foi explicada antes, enfatizando que é possível encontrar os números primos em intervalos maiores, utilizando a tecnologia como recurso para a resolução de problemas mais complexos

A fim de verificar o nível de conhecimento que os alunos possuíam antes da explanação com o recurso didático desenvolvido e quais eles adquiriram após esse momento, aplica-se o seguinte questionário.

1. Você já conhecia o Crivo de Eratóstenes?
2. Você entendeu o conceito por trás do Crivo?
3. Você acha que esse método funciona para intervalos muito grandes?
4. Você acha que esse método, se utilizado em sala de aula, facilitaria a compreensão dos conteúdos?

Nesse questionário, opta-se por fazer algumas perguntas que podem ser respondidas com sim ou não, mas que também abrem margem para uma resposta mais elaborada, o que permite analisar melhor o efeito gerado pela apresentação do Crivo sobre o conhecimento dos alunos acerca dos números primos. Oito alunos responderam ao questionário cujas respostas estão listadas a Figura 6 em forma de gráfico de barras.

**Figura 6**: Resultado estatístico das respostas dos alunos



Fonte: Criado pelos autores

A seguir é apresentada uma análise das respostas obtidas.

**Pergunta 1:** Todos os alunos responderam não, indicando que o Crivo se apresentou como algo novo para eles.

**Pergunta 2:** As respostas dadas indicam que mesmo após a explicação, a maioria não tem certeza se compreendeu a forma como se constrói o Crivo de Eratóstenes.

**Pergunta 3:** Nessa pergunta todos responderam sim, porém como é indicado pelas respostas da pergunta anterior, poucos afirmam ter entendido, dessa forma se vê que mesmo não tendo muito êxito em compreender o que foi mostrado, os alunos apresentam um raciocínio indutivo que os leva a acreditar na ampliação do intervalo do Crivo.

**Pergunta 4:** Como a maioria respondeu sim, nota-se que os alunos têm uma perspectiva de que essa construção possa auxiliar na aprendizagem acerca dos números primos.

 O resultado da experiência didática pode ser classificado de satisfatório, pela reação positiva dos alunos à experiência.

**CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Após todo o percurso trilhado entre o estabelecimento de uma fundamentação teórica e a construção do recurso didático computacional, bem como sua aplicação em sala, é possível determinar que é necessária uma aproximação entre os conhecimentos adquiridos no passado e a tecnologia, uma vez que essa interação pode oferecer recursos didáticos de melhor nível para o ensino e aprendizagem da Matemática.

De acordo com o relato dos alunos, na fase de aplicação, ficou evidente que a tecnologia, se bem utilizada em sala de aula, é uma ferramenta poderosa, tendo em vista que esta está mais próxima da realidade dos estudantes, os quais estão inseridos em uma realidade na qual a tecnologia predomina em diversos âmbitos do cotidiano.

Essa importância também é enfatizada por Ramos (2012, p.8), o qual afirma:

*"As tecnologias usadas pelos professores durante as aulas podem ajudar a estabelecer um elo entre conhecimentos acadêmicos, com os adquiridos e vivenciados pelos alunos"*

Os principais desafios encontrados ao longo do projeto foram relacionados à manipulação do GeoGebra utilizando o *GGBScript*. Contudo, essa interação foi de suma importância, tendo em vista que o seu uso facilitou a construção da ferramenta e reduziu de forma significativa o tempo utilizado para obter o *applet* utilizado em sala de aula. Espera-se que este projeto sirva de motivação para outras construções que possam utilizar deste recurso ainda pouco conhecido de programação, *GGBScript*.

Como trabalho futuro pretende-se estender a construção do Crivo para N > 200 por meio do *GGBScript* e, caso possível, colocando o número N como um controle deslizante.

 Saliente-se que um dos resultados desse trabalho, o qual tem o propósito de inspirar outros, disponibiliza-se um *applet* dinâmico que pode ser utilizado em sala de aula pelo professor, a fim de que o aluno possa se aproximar e interagir com os conteúdos por meio deste recurso didático computacional.

**AGRADECIMENTO**

Os autores agradecem ao Prof. Flávio Alexandre Falcão Nascimento da UECE pela preciosa colaboração e orientação na realização deste trabalho.

**REFERÊNCIAS**

ANDRADE, Rafael Thé Bonifácio de. A história dos números primos, **Revista de história da matemática para professores**, v. 4, n. 2, p. 18-27, mar. 2018. Disponível em: <http://www.rhmp.com.br/index/index.php/rhmp/article/view/37/34>. Acesso em: 05 out. 2021.

ASTROCIÊNCIA. **O raio da Terra**. 2016. Disponível em <https://astrociencianet.wordpress.com/2016/05/17/httpastrociencianetworpress-compostagenscienciasexatas/>. Acesso em 4 out 2021.

FILHO, Edgard de Alencar. **Teoria elementar dos números**. São Paulo, SP: Nobel, 1981. 381 p.

MARTINS, Maria do Carmo. Eratóstenes: **um génio do período Helénico!**. Correio dos Açores, p. 14-14, 2014. 1981. 381 p.

RAMOS, Márcio Roberto Vieira. **O uso de tecnologias em sala de aula**. V Seminário de Estágio do Curso de Ciências Sociais do Departamento de Ciências Sociais-UEL. Londrina, v. 11, p. 2012, 2012.

REIS, Carlos Costa dos; BAYER, Valmecir. Números primos: **relação histórica e algumas curiosidades**. Revista Ifes Ciência, v. 6, n. 4, p. 242-256, dez. 2020. Disponível em: <https://ojs.ifes.edu.br/index.php/ric/article/view/854/613>. Acesso em: 05 out. 2021.

1. Professora da Universidade Federal de Uberlândia - UFU, luciapereira@ufu.br; [↑](#footnote-ref-1)
2. Aluno da Universidade Estadual do Ceará - UECE, patrick.sousa@aluno.uece.br [↑](#footnote-ref-2)
3. Aluno da Universidade Estadual do Ceará - UECE, eduardo.reges@aluno.uece.br; [↑](#footnote-ref-3)