II JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
TEIA UFNT
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA - UFNT
UFNT UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CNPq

TOPOLOGIA ALGÉBRICA: HOMOTOPIA E APLICAÇÕES

SANTOS, Eriangra Oliveira[1]; **JÚNIOR**, José Carlos de Oliveira[2]; **LOBO**, Matheus Pereira[3]

RESUMO

A Topologia é uma importante área da matemática pura que consegue proporcionar resultados úteis para demonstrações de teoremas de outras áreas, tais como teoria dos números, análise, geometria e lógica. Por exemplo, é possível provar que existem infinitos primos por meio da topologia. O presente trabalho tem por objetivo apresentar o Teorema *Pasting*, desenvolvido no Programa Institucional Voluntário de Iniciação Científica (PIVIC), UFNT. O Teorema *Pasting*, principal resultado da pesquisa, é uma ferramenta importante na análise de funções contínuas em espaços topológicos, pois estabelece condições sob as quais a "colagem" de funções contínuas definidas em partes de um espaço topológico resulta em uma função contínua global. Essa propriedade é útil para combinar informações locais em espaços topológicos e é frequentemente usada na resolução de problemas práticos em matemática e física que envolvem funções contínuas, que são essenciais para modelar fenômenos naturais e sistemas complexos, garantindo que as propriedades topológicas sejam preservadas nas representações matemáticas. Para cumprir com o objetivo do trabalho, apresentamos os conceitos de topologia, conjuntos abertos e fechados e funções contínuas.

[1] Voluntário do Programa de Iniciação Científica (PIVIC). Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. eriangra.oliveira@mail.uft.edu.br

[2] Professor Doutor do Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. Orientador do projeto. jc.oliveira@mail.uft.edu.br

[3] Professor Doutor do curso de Licenciatura em Física, Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. Coorientador do projeto. mplobo@mail.uft.edu.br

Palavras-chave: Topologia. Pasting. Conjunto Aberto. Conjunto Fechado.

I. INTRODUÇÃO

A Topologia é uma área de extrema importância tanto para a matemática quanto para a física, mais especificamente a topologia algébrica (Homotopia e aplicações) que procura entender e desmistificar o caminho entre o finito e o infinito. Graças a esta área, houve avanços promissores no estudo dos buracos negros. A área do conhecimento abrangente neste trabalho é Ciências Exatas e da Terra: Matemática.

Em topologia, os conjuntos fechados desempenham um papel fundamental na caracterização dos espaços topológicos. Um conjunto é considerado fechado se o seu complementar, ou seja, o conjunto de todos os pontos que não pertencem a ele, é um conjunto aberto. Essa relação entre conjuntos fechados e abertos é essencial na definição de topologia e na análise de propriedades dos espaços topológicos. Essa dualidade permite uma abordagem flexível na formulação e solução de problemas topológicos, uma vez que a compreensão de conjuntos fechados é complementar à compreensão de conjuntos abertos.

Este trabalho é muito importante, pois o tema em questão não está na grade curricular do curso, portanto, esta imersão permite descobertas pertinentes para a formação acadêmica e é concomitante com algumas disciplinas. O estudo e leitura em inglês são um grande diferencial, tornando o aprendizado mais interessante, não apenas da linguagem matemática, mas também de outro idioma. A motivação neste projeto foi o entusiasmo em trabalhar na área da matemática pura.

II. BASE TEÓRICA

O material utilizado como base para o estudo é o livro "*Topology for Beginners*" de Steve Warner [1] e o White Paper "*Theorems on Topology*" [2], escrito pelo orientador, Matheus Lobo. O livro possui os pré-requisitos necessários para o estudo do tema, e o artigo contém as definições e teoremas a serem estudados.

III. OBJETIVOS

Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa consiste em aprender e manipular espaços topológicos, especialmente por meio de homotopias.

Objetivos Específicos

- Ganhar familiaridade com as estratégias de demonstrações matemáticas;
- Definir matematicamente os pré-requisitos subjacentes à Homotopia;
- Provar o teorema Pasting;
- Estudar teoremas e aplicações de espaços topológicos conectados por caminho;
- Tentar buscar analogias e/ou aplicações da topologia em buracos negros;
- Escrever pelo menos um White Paper (artigo científico) contendo os resultados da pesquisa;
- Leituras em inglês para escrita de artigos científicos.

IV. METODOLOGIA

Os principais métodos utilizados foram revisão bibliográfica e hierarquia de aprendizagem. Na revisão bibliográfica, o orientador auxilia na leitura em inglês, de acordo com o nível de aprendizagem e desenvolvimento cognitivo do estudante, e na estruturação do idioma estrangeiro. Além disso, identificam-se os pré-requisitos imediatamente anteriores aos conceitos envolvidos em um artigo científico especializado e registram-se esses pré-requisitos, pesquisando em bibliografias adequadas para a compreensão dos mesmos.

Outros métodos utilizados incluem a reprodução de cálculos dos artigos científicos e livros estudados a fim de propor novos modelos de representação para publicação em revistas científicas, apresentações para exercitar no estudante as técnicas de comunicação e estruturação dos recursos de multimídia, quando necessário, e reuniões semanais para acompanhamento do desenvolvimento do projeto, discussões em grupo com o orientador e demais membro do grupo, e orientações recorrentes. Além disso, a produção textual é exigida pelo orientador periodicamente como forma de aprimoramento da escrita da língua portuguesa e escrita científica para a produção de artigos.

V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para provar o Teorema Pasting, precisamos revisar alguns conceitos antes.

Topologia: Seja S um conjunto e T uma coleção de subconjuntos de S, T é dito ser uma topologia em S se as seguintes três propriedades são satisfeitas:

1. $\emptyset \in T$ e $S \in T$.
2. Se $X \subseteq T$, então $\bigcup X \in T$ (T é fechado sob uniões arbitrárias).
3. Se $Y \subseteq T$ e Y é finito, então a $\bigcap Y \in T$ (T é fechado quando há infinitas interseções).

Espaço Topológico: Um espaço topológico é um par ordenado (X, T), onde X é um conjunto qualquer e T é uma coleção de subconjuntos de X, chamados de abertos, que satisfazem as seguintes propriedades:

1. O conjunto vazio e X são abertos em T.
2. A interseção finita de abertos em T é aberta em T.
3. A união arbitrária de abertos em T é aberta em T.

Os elementos de T são chamados de "abertos" e seus complementares são chamados de "fechados".

Conjunto aberto: Um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é considerado aberto em $\mathbb{R}$ se, para cada número real $x \in X$, existe um intervalo aberto (a, b) contendo $x \in (a, b)$ e $(a, b) \subseteq X$.

Conjunto fechado: Dado um complementar aberto de X em $\mathbb{R}$, então X é fechado em $\mathbb{R}$. Definição: $(\mathbb{R} \backslash X \equiv \ aberto\ em\ \mathbb{R}) \longrightarrow (X \equiv fechado\ em\ \mathbb{R})$

Função contínua: Sejam $(X, T_1)\ e\ (Y, T_2)$ espaços topológicos. Dizemos que $f: X \longrightarrow Y$ é contínua se $f^{-1}(A)$ é fechado sempre que A for fechado. Podemos dizer que a função contínua preserva a estrutura topológica dos espaços independente do caminho feito.

Agora, podemos apresentar o resultado principal da pesquisa.

Teorema *Pasting*: Sejam (X, T) e (Y, U) espaços topológicos, onde A, B são subconjuntos fechados de X tais que $X = A \cup B$, e $f\colon A \to Y$ e $g: B \to X$ são funções contínuas, suponhamos que para todo $x \in A \cap B,\ f(x) = g(x)$. Seja $h: X \to Y$ definido por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \in A \\ g(x) & se\ x \in B \end{cases}$$

Então, h é contínuo.

A seguir, apresentamos as ideias centrais da demonstração.

Demonstração:

1. Seja $x \in h^{-1}[C]$, $\quad x \in C'$

2. $h(x) \in C$

3. $X = A \cup B,\ \ x \in C' \subseteq X,\ \ x \in X,\ \ x \in A\ ou\ x \in B$

4. Assuma que $x \in A\ e\ x \notin B$

5. $h(x) = f(x)$

6. (2), $h(x) \in\ C,$ (5), $h(x) = f(x),$ $f(x) \in C$

7. $x \in f^{-1}[C]$

8. Assuma que $x \in A \cap B$

9. De (7) e (8), $x \in f^{-1}[C] \cup g^{-1}[C]$

10. De (1), $x \in h^{-1}[C]$, x é arbitrário

11. Se $x \in h^{-1}[C]$, então $x \in f^{-1}[C] \cup g^{-1}[C]$

12. Portanto, $h^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[C] \cup g^{-1}[C]$

13. Mostra-se que $f^{-1}[C] \cup g^{-1}[C] \subseteq h^{-1}[C]$

14. De (12) e (21), temos que $h^{-1}[C] = f^{-1}[C] \cup g^{-1}[C]$. ∎

VI. CONCLUSÃO

Com base no nosso estudo aprofundado sobre o Teorema do Pasting e funções contínuas em espaços topológicos, podemos concluir que esses conceitos desempenham um papel crucial na análise e compreensão das propriedades das funções em contextos topológicos abstratos. Durante a pesquisa, exploramos como o Teorema do Pasting estabelece uma importante relação entre a continuidade de funções em partes de um espaço topológico e a continuidade resultante da função global. Essa teoria oferece ferramentas poderosas para estudar funções em espaços mais gerais, indo além dos espaços métricos.

Além disso, nossa investigação enfatizou a relevância da topologia na matemática e em várias áreas da ciência. Funções contínuas são essenciais para modelar fenômenos naturais e sistemas complexos, garantindo que as propriedades topológicas sejam preservadas nas representações matemáticas. Isso torna a teoria das funções contínuas em espaços topológicos uma base sólida para diversas aplicações, desde análise matemática até teoria das categorias e topologia algébrica.

No entanto, é importante reconhecer que nosso estudo é apenas uma introdução a esses tópicos fascinantes e que existem desafios e extensões significativos a serem explorados. A topologia é um campo em constante evolução, com aplicações em matemática pura e ciência aplicada. Pesquisas futuras podem se concentrar em estender esses conceitos para espaços topológicos mais complexos, abrindo caminho para novas descobertas e avanços no entendimento das funções contínuas e do Teorema do Pasting.

Em suma, nosso estudo destaca a importância de uma compreensão sólida dos fundamentos da topologia e das funções contínuas. Esses conceitos não têm apenas aplicações práticas em diversas disciplinas científicas, mas também buscam uma base teórica sólida para a matemática e a teoria dos espaços topológicos. Ao continuar a explorar esses tópicos e a enfrentar os desafios que surgem, contribuímos para o avanço do conhecimento matemático e para a solução de problemas complexos em diversos campos. A pesquisa futura nessa área promete revelar novas conexões e informações.

VII. REFERÊNCIAS

WARNER, Steve. **Topology for Beginners**. GET 800, 2019.

LOBO, Matheus Pereira. **Theorems in Topology**. 2022. https://doi.org/10.31219/osf.io/zm56w

WARNER, Steve. **Pure Mathematics for Beginners**. GET 800, 2018.

LOBO, Matheus Pereira. **Intersection of Open Sets in the Reals**. 2023. https://doi.org/10.31219/osf.io/4kjdq

VIII. AGRADECIMENTOS

Agradeço...

Ao meu orientador Matheus Lobo, que sempre deu todo apoio necessário até aqui, mesmo após seu afastamento para sua especialização de pós-doutorado, se manteve presente e atencioso. Além de orientador, se tornou um amigo e por vezes ajudou até financeiramente quando precisei, sempre serei grata por tudo.

Ao professor José Carlos que se tornou orientador na metade do projeto, mas que desde o início do curso me acompanhou, além disso, foi ele quem me indicou como orientanda para o professor Matheus. Se não fosse por ele, talvez não tivesse tido a chance de viver essa experiência que mudou completamente a minha vida. Ambos são professores maravilhosos.

Aos meus pais Edilson e Esmeralda por serem tão amorosos e cuidadosos comigo, sua primogênita. Durante toda minha vida me apoiam em tudo e sempre trabalharam para dar conforto para suas filhas e ainda garantir que tivesse a chance de ingressar em um curso superior, eles são a base da minha formação pessoal e do caráter profissional. Tudo é feito pensando neles, por trás de toda minha dedicação, lá estão eles dando apoio emocional, financeiro e psicológico. Eu os amo muito e espero poder recompensá-los em breve.

Ao meu namorado Kauã Motta, que todos os dias se esforça para tornar a rotina mais leve, me motiva, estuda comigo e está sempre presente nos momentos bons e ruins, desde as comemorações até o choro e surtos diários querendo desistir do curso. Sou feliz por compartilhar tantas conquistas (mesmo que pequenas) com ele.

Por fim, mas não menos importante, a todos os meus amigos, mas em especial Gustavo, Olegário e Amanda. Eles se tornaram minha segunda família e foram essenciais no meu processo de adaptação tanto na Universidade quanto na cidade desde que me mudei. Sempre que tenho a oportunidade, faço questão de demonstrar o quanto eles significam para mim, então não preciso repetir tudo aqui de novo. Enfim, amo vocês e obrigada por tudo.

Obrigada a todos, vocês são muito importantes em minha vida!