

## COMPARAÇÃO DE FLECHAS EM LAJES DE CONCRETO ARMADO OBTIDAS POR MEIO DE CÁLCULOS MANUAIS (SÉRIES DE BARES), MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### Comparison of reinforced concrete slab deflection obtained by manual calculation (Bares series), finite difference method and finite element method

Paula de Oliveira Ribeiro (P) (1); Lucas Teotônio de Souza (2)

(1) Engenheira Civil, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, Brasil.

(2) Engenheiro Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, Brasil.

Email para Correspondência: paula\_ribeiro@usp.br; (P) Apresentador

**Resumo:** O cálculo de flechas em lajes de concreto armado por meio do método elástico é fundamentado nas equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa e nas relações de compatibilidade de deformações do mesmo. Diversos procedimentos podem ser utilizados para a resolução da equação diferencial fundamental de placas delgadas, a saber: elementos finitos (MEF), diferenças finitas (MDF), grelha equivalente e utilização de séries. O artigo tem por objetivo estabelecer uma comparação dos valores de flechas utilizando MEF, MDF e séries. Para aplicação do MEF, a laje foi simulada no programa ABAQUS. Na aplicação do MDF, foram desenvolvidas planilhas Excel para o cálculo das matrizes. A consideração de séries foi realizada por meio de tabelas baseadas nas soluções em séries de Bares. Por fim, foi realizado um estudo paramétrico variando a resistência do concreto. Espera-se conceber um comparativo entre os procedimentos e avaliar a sensibilidade das deformações em função da resistência do concreto.

**Palavras chaves:** Lajes; flechas; MEF; MDF; séries.

**Abstract:** The calculation of reinforced concrete slab deflection using the elastic method is based on the equilibrium equations of a plate infinitesimal element and on the compatibility of deformations. Several procedures can be used to solve the fundamental differential equation of thin plates, namely finite element method (FEM), finite difference method (FDM), equivalent grid and series. The objective of this paper is to compare the values of deflection using FEM, FDM and series. For the application of FEM, the slab was simulated in the ABAQUS program. In the application of the FDM, Excel spreadsheets were developed to calculate the matrices. Consideration of series was done through tables based on solutions in Bares series. Finally, a parametric study was carried out, varying the concrete strength. It is hoped to do a comparative between the procedures and to evaluate the sensitivity of the deformations in function of the concrete strength.

**Keywords:** slabs; deflection; FEM; FDM; series.



## 1 INTRODUÇÃO

Lajes são elementos estruturais de superfície plana, em que a dimensão perpendicular à superfície, usualmente chamada de espessura, é relativamente pequena comparada às demais e sujeitas principalmente a ações normais a seu plano. O pavimento de uma edificação, que é um elemento estrutural de superfície plana, pode ser projetado com elementos pré-moldados ou moldados no local. O pavimento moldado no local pode ser composto por uma única laje, maciça ou nervurada, sem vigas, ou um conjunto de lajes apoiadas em vigas (Carvalho e Figueiredo Filho, 2014). Neste artigo, estuda-se um pavimento composto de lajes maciças de concreto armado apoiadas em vigas no contorno.

No caso de sistema construtivo convencional, a ação normalmente é transmitida para as vigas de apoio nas bordas da laje, e para as paredes no sistema de alvenaria estrutural. As lajes se deformam quando solicitadas. A verificação da flecha em lajes é uma importante avaliação a ser feita em todos os projetos e é prescrita na ABNT NBR 6118 (2014) pelo Estado Limite de Serviço de Deformação Excessiva. As deformações nas lajes podem ser divididas em imediatas e diferidas no tempo. A deformação elástica imediata ocorre por ocasião da aplicação do carregamento, enquanto a deformação lenta ocorre pelo aumento de deformação sob tensão constante. No presente trabalho serão calculadas as duas parcelas de deformação.

Existem basicamente dois métodos de cálculo para as lajes maciças, o elástico e o de ruptura. O primeiro é baseado no comportamento do elemento estrutural sob cargas de serviço e o concreto íntegro (não fissurado). O segundo se baseia nos mecanismos de ruptura da laje. No método elástico, subestimam-se os deslocamentos, pois não é considerada a fissuração do concreto. No método de ruptura, a formulação é baseada no mecanismo de ruptura da laje (teoria das charneiras plásticas), sendo difícil determinar os deslocamentos, uma vez que não é possível precisar informações sobre o comportamento da estrutura em serviço (Carvalho e Figueiredo Filho, 2014).

O método elástico, clássico ou linear é baseado nas equações de equilíbrio de um elemento finito de placa e nas relações de compatibilidade das deformações do mesmo. Segundo a ABNT NBR 6118 (2014), os métodos baseados na teoria da elasticidade podem ser utilizados nas estruturas de placas com coeficiente de Poisson  $\nu$  igual a 0,2. O método elástico é utilizado no cálculo de flechas em lajes, sendo necessário contornar as limitações do mesmo, uma forma de prever o aumento da deformação devido a fissuração é multiplicar a mesma pela relação entre a inércia bruta e fissurada.

O valor da flecha é obtido pela solução da equação diferencial fundamental de placas delgadas. Existem diversos processos para a resolução do problema, dentre eles: diferenças finitas (MDF), elementos finitos (MEF) e utilização de séries. Será realizado um estudo comparativo entre os métodos citados. Serão utilizadas planilhas em Excel para o cálculo da flecha por MDF. A resolução por MEF será realizada por modelagem no software ABAQUS. O processo de cálculo de placas por séries será baseado nas soluções desenvolvidas por Bares (1972).

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Como supracitado, as lajes maciças em estudo são placas delgadas de concreto, sendo assim aplicam-se todos os conceitos e teorias desenvolvidas para estes elementos. Algumas hipóteses são admitidas para fins práticos e simplificação de cálculo. Admite-se que as placas de concreto são constituídas de material homogêneo, elástico, isotrópico, linear fisicamente e têm pequenos deslocamentos.

A equação diferencial fundamental das placas delgadas, obtidas por equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos de um elemento infinitesimal, submetidas a uma carga  $p$  é:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{p}{D} \quad (1)$$

Onde:  $w$  é o deslocamento vertical;  $x, y$  são coordenadas de um ponto genérico da placa;  $p$  é a intensidade da carga vertical;  $D = E \cdot h^3 / [12(1-\nu^2)]$  é a rigidez à flexão da placa;  $E$  é o módulo de deformação longitudinal do concreto e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Resolvendo a Eq. (1), obtém-se a expressão para a superfície  $w = w(x, y)$ , e com suas derivadas os momentos  $m_x$  e  $m_y$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente:

$$\frac{m_x}{D} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\frac{m_y}{D} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3)$$

A determinação dos esforços e dos deslocamentos pode ser feita considerando as cargas em serviço, a partir da equação fundamental ou montando outro tipo de modelo. Há os seguintes processos de resolução: utilização de séries para a representação do valor de  $p(x, y)$ , diferenças finitas, elementos finitos e grelha equivalente. No presente estudo serão empregados os três primeiros métodos.

### 2.1 Cálculo dos deslocamentos por meio de séries

No cálculo por séries, o valor de  $p(x, y)$  é substituído por uma série composta de funções trigonométricas, obtendo-se uma solução para a integração da equação fundamental. Uma solução, desenvolvida por Navier, é representar a carga  $p(x, y)$  por uma série de Fourier dupla do tipo:

$$p = p(x, y) = \sum_m \sum_n P_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (4)$$

Onde:  $a$  e  $b$  são as dimensões da placa;  $m$  e  $n$  correspondem ao número de retângulos em que se divide a placa;  $p_{mn}$  é o valor do carregamento no centro de cada retângulo.

A linha elástica  $w(x,y)$  que tem a mesma forma do carregamento é dada por uma série dupla e obtida a partir das derivadas da equação fundamental e das condições de contorno da placa, apoiada ao longo das bordas e com rotação livre, resultando em:

$$w = \frac{p_{mn}}{\pi^4 \cdot D \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (5)$$

Os valores de  $p_{mn}$  são dados por:

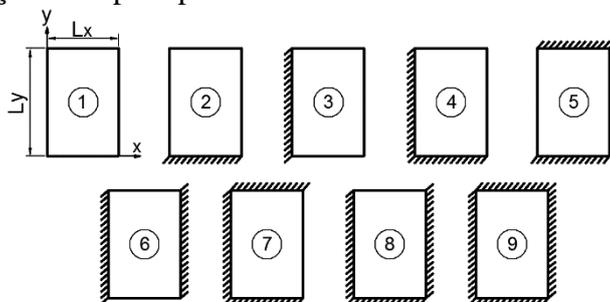
$$p_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \cdot \int_0^a \int_0^b p(x,y) \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \cdot dx \cdot dy \quad (6)$$

Com  $m$  e  $n$  ímpares (valores pares levam a  $p_{mn} = 0$ ) e com  $p(x,y) = \bar{p}$  (carga uniformemente distribuída),  $p_{mn}$  torna-se:  $p_{mn} = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^2 \cdot m \cdot n}$

Superpondo os efeitos, e substituindo o valor de  $p_{mn}$  na expressão da linha elástica, obtém-se a função  $w(x,y)$  para carga uniforme:

$$w = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^6 \cdot D} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}}{m \cdot n \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \quad (7)$$

O processo de cálculo apresentado neste item é bastante adequado para a confecção de quadros que possibilitem determinar deslocamentos máximos (flechas) de forma facilitada a partir da geometria e das condições de apoio da placa. Os pavimentos devem ser discretizados e cada laje deve ser analisada individualmente. Serão utilizados os quadros baseados nas soluções em séries desenvolvidos por Bares e devidamente adaptados para coeficiente de Poisson igual a 0,2. Os quadros utilizados estão presentes no livro de Carvalho e Figueiredo Filho (2014). As condições de apoio possíveis de serem consideradas estão na Figura 1.



**Figura 1. Situações de vinculações de placas isoladas**

Fonte: (Carvalho e Figueiredo Filho, 2014)

A flecha para lajes com carregamento uniforme e com condições de apoio de acordo com a Figura 1 é calcula pela Eq. (8). O coeficiente  $\alpha$  é obtido pelo Quadro 7.2 do livro de Carvalho e Figueiredo Filho (2014).

$$f = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100} \quad (8)$$

Onde:  $p$  é o carregamento uniformemente distribuído sobre a placa;  $\alpha$  é o coeficiente tirado do Quadro 7.2;  $l_x$  é o menor vão da laje;  $E$  é o módulo de elasticidade do concreto;  $h$  é a altura da laje ou espessura da placa.

Para encontrar o coeficiente  $\alpha$ , é necessário calcular o parâmetro geométrico  $\lambda$ , dado por:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad (9)$$

Sendo  $l_x$  a menor dimensão da superfície da laje e  $l_y$  a maior.

Para verificação do estado limite de deformação excessiva, a ABNT NBR 6118 (2014) permite utilizar o momento de inércia da seção bruta e o módulo de elasticidade secante do concreto. Os efeitos de fissuração e deformação lenta devem ser considerados segundo o item 17.3.2.1 da norma.

Para o cálculo da flecha imediata, deve-se utilizar a expressão da rigidez equivalente dada pela Eq. (10), quando a seção estiver fissurada.

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (10)$$

Onde:  $I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto;  $I_{II}$  é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II;  $M_a$  é o momento fletor na seção crítica do vão considerado;  $M_r$  é o momento de fissuração do elemento estrutural;  $E_{cs}$  é módulo de elasticidade secante do concreto.

Para o cálculo aproximado da flecha diferida no tempo deve-se multiplicar a flecha imediata pelo coeficiente  $\alpha_f$  dado pela Eq. (11).

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 \rho'} \quad (11)$$

Onde:

$$\rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d}$$

$\xi$  é um coeficiente função do tempo, que pode ser obtido por:

$$\Delta \xi = \xi(t) - \xi(t_0)$$

$$\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) \cdot t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses}$$

$$\xi(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses}$$

Portanto, a flecha final quando a estrutura se encontra no estágio II é dada pela Eq. (12):

$$f_{final} = f_{imediate} \cdot \frac{(E_{cs} I_c)}{(EI)_{eq,t0}} \cdot (1 + \alpha_f) \quad (12)$$

## 2.2 Cálculo dos deslocamentos por diferenças finitas

O cálculo dos deslocamentos verticais via método das diferenças finitas (MDF) consiste em transformar a equação diferencial fundamental de placas delgadas, Eq. (1), em um sistema de equações algébricas. O domínio é discretizado e as derivadas presentes na equação diferencial são substituídas por aproximações utilizando apenas os valores numéricos da função, empregando a fórmula de Taylor (Franco, 2006).

Em um problema bidimensional, tal como é o caso do tipo de laje analisado no presente estudo, a discretização do domínio é feita por meio de uma malha cartesiana ortogonal uniforme de dimensão  $a$ . Em cada ponto da malha é aplicado o operador de diferenças finitas (ODF – *computational molecules*), apresentado na Figura 2. Assim, as derivadas da Eq. (1) são substituídas pela Eq. (13), Eq. (14) e Eq. (15) (Ames, 1977).

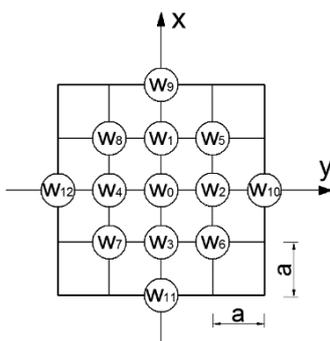


Figura 2. Operador de diferenças finitas bidimensional genérico

Fonte: (Ames, 1977)

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_0 = \frac{w_9 - 4w_1 + 6w_0 - 4w_3 + w_{11}}{a^4} \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_0 = \frac{w_{10} - 4w_2 + 6w_0 - 4w_4 + w_{12}}{a^4} \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 = \frac{w_5 - 2w_2 + w_6 - 2w_1 + 4w_0 - 2w_3 + w_8 - 2w_4 - w_7}{a^4} \quad (15)$$

Os cálculos são efetuados por meio do emprego de uma transformação adimensional, fazendo  $X = x/L$ ;  $Y = y/L$ ;  $W = w/L$ ;  $A = a/L$ , onde  $L$  é o lado da laje. Substituindo as aproximações via diferenças finitas (Eqs. 13, 14 e 15) na Eq. (1), obtém-se a Eq. (16).

$$20W_0 - 8W_{1,2,3,4} + 2W_{5,6,7,8} + W_{9,10,11,12} = A^4 \cdot \lambda \quad (16)$$

Onde:  $\lambda = L^3 \cdot p/D$ .

Ressalta-se que os coeficientes que multiplicam os valores de  $W_i$  na Eq. (16) (ou seja, 20, -8, 2 e 1) representam a contribuição do respectivo ponto  $i$  na matriz de diferenças finitas, quando o operador é aplicado no ponto 0. Se este for interno à malha resulta no operador da Figura 3(a). Quando os pontos do ODF coincidem com regiões de apoio, sua contribuição é nula, uma vez que não apresentam deslocamento vertical. Por outro lado, de acordo com as condições de contorno da placa, devem ser avaliadas as contribuições dos pontos do operador que estão externos à malha da laje. Para o caso de apoio simples, pela compatibilidade de rotações, é subtraída uma unidade (1) na contribuição do ponto central do operador (ponto 0) para cada ponto deste que seja externo à malha. Logo, o operador de um ponto próximo a apoio simples é mostrado na Figura 3(b) e próximo ao canto de apoio simples na Figura 3(c).

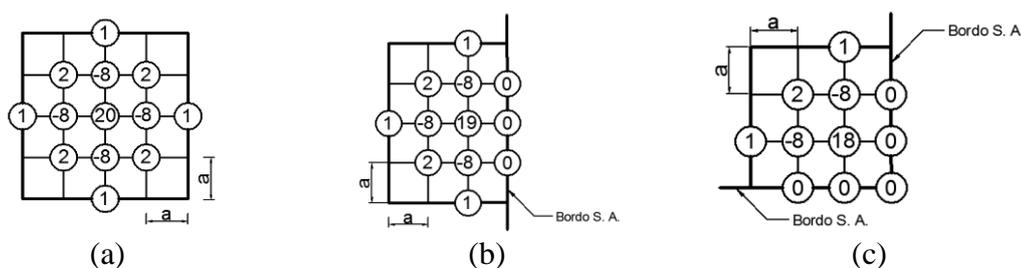


Figura 3. Operador de diferenças finitas aplicado em pontos internos (a), próximos ao apoio simples (b) e próximos ao canto de apoio simples (c)

Fonte: (Ames, 1977)

## 2.3 Cálculo dos deslocamentos por elementos finitos

No processo de elementos finitos, a placa é dividida em elementos de dimensão finita conectados por pontos nodais, nestes pontos há a imposição de compatibilidade de esforços e deslocamentos. Para esta finalidade, é utilizada a equação fundamental, exprimindo os deslocamentos  $w$  com polinômios cujos coeficientes devem ser determinados. Essas condições, aplicadas aos diversos pontos nodais dos elementos, conduzem a um sistema de equações lineares cuja solução não apresenta grandes dificuldades (Carvalho e Figueiredo Filho, 2014).

### 3 MODELO GEOMÉTRICO DE REFERÊNCIA

O modelo geométrico adotado nas análises é constituído por uma laje quadrada com vão ( $L$ ) de 6,0 m, 10,0 cm de espessura ( $h_{laje}$ ) e bordos simplesmente apoiados, Figura 4. O material constituinte é o concreto armado com resistência característica ( $f_{ck}$ ) de 25 MPa e peso específico ( $\gamma_{conc}$ ) 25 kN/m<sup>3</sup>. O piso possui revestimento em mármore com 2,0 cm de espessura ( $h_{már}$ ) e peso específico ( $\gamma_{már}$ ) 28,0 kN/m<sup>3</sup>. A espessura da argamassa de assentamento ( $h_{arg}$ ) é 2,0 cm e seu peso específico ( $\gamma_{arg}$ ) 19,0 kN/m<sup>3</sup>. De acordo com a NBR 6118 (2014), o módulo de elasticidade secante do concreto ( $E_{cs}$ ) é de 23,8 GPa ( $E_{cs} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}}$ ). O coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) é igual a 0,2.

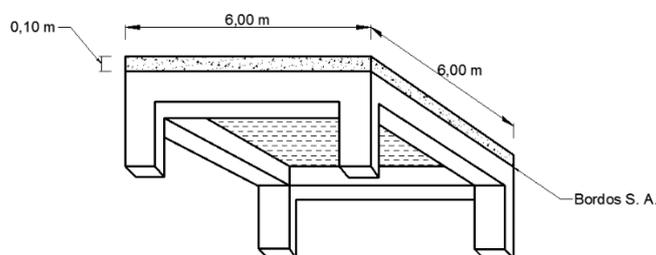


Figura 4. Modelo de laje analisado

Fonte: Autor, 2018

A estrutura é utilizada como um escritório, portanto, a carga acidental é  $q_k = 2,0 \text{ kN/m}^2$ , de acordo com a ABNT NBR 6120 (1980). A carga permanente é  $g_k = 3,44 \text{ kN/m}^2$  ( $g_k = h_{laje} \cdot \gamma_{conc} + h_{arg} \cdot \gamma_{arg} + h_{már} \cdot \gamma_{már}$ ). Com base nas tabelas 11.1, 11.2, 11.3 e 11.4 da NBR 6118 (2014) serão feitas as diversas combinações de ações, sendo fornecidos os momentos fletores em cada caso.

a. Estado limite último (ELU):

$$p_d = \gamma_g \cdot g_k + \psi_2 \cdot q_k = 1,4 \cdot 3,44 + 1,4 \cdot 2,00 = 7,62 \text{ kN/m}^2 \quad \Rightarrow \quad M_d = 12,15 \text{ kNm/m.}$$

Portanto a armadura da laje é  $\phi 8.0 \text{ c/ } 12,5 \text{ cm.}$

b. Combinações quase permanentes (CQP):

$$p_d = g_k + \psi_2 \cdot q_k = 3,44 + 0,4 \cdot 2,00 = 4,24 \text{ kN/m}^2 \quad \Rightarrow \quad M_{CQP} = 6,76 \text{ kNm/m.}$$

c. Combinações frequentes (CF):

$$p_d = g_k + \psi_2 \cdot q_k = 3,44 + 0,6 \cdot 2,00 = 4,64 \text{ kN/m}^2 \quad \Rightarrow \quad M_{CF} = 7,40 \text{ kNm/m.}$$

d. Combinações raras (CR):

$$p_d = g_k + q_k = 3,44 + 2,00 = 5,44 \text{ kN/m}^2 \quad \Rightarrow \quad M_{CR} = 8,68 \text{ kNm/m.}$$

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Comparação entre os métodos

Neste item será apresentado o cálculo da flecha do modelo geométrico da Figura 4 por meio de séries, MDF e MEF, os resultados serão comparados a fim de verificar as peculiaridades dos métodos.

#### 4.1.1 Cálculo por meio de séries

A combinação de ações utilizadas para o cálculo da flecha é a combinação quase-permanente, ou seja,  $P_d = 4,24 \text{ kN/m}^2$ . A laje em estudo é apoiada nas bordas, portanto representada pelo caso 1 de vinculação (ver Figura 1). O parâmetro geométrico  $\lambda$  é dado pela Eq. (10), como  $l_y = l_x = 6\text{m}$ , o valor de  $\lambda$  é 1. Pelo Quadro 7.2 do livro de Carvalho e Figueiredo Filho (2014) obtém-se  $\alpha = 4,67$ . Sendo assim, o valor da flecha é calculado por:

$$f_{\text{imediata}} = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100} \Rightarrow f_{\text{imediata}} = \frac{4,24 \cdot 6^4}{0,85 \cdot 5600 \sqrt{25} \cdot 10^3 \cdot 0,1^3} \cdot \frac{4,67}{100} = 0,01078\text{m} = \boxed{1,078\text{cm}}$$

A flecha calculada não considera a fissuração, uma forma simplificada de considerá-la é multiplicar a flecha pela relação entre a inércia no estágio I e a inércia equivalente dada pela Eq. (10). O primeiro passo é verificar o estado limite de serviço de formação de fissura a fim de avaliar se a estrutura está realmente fissurada.

#### a. ELS-F (Item 17.3.1 da NBR 6118:2014)

Momento de fissuração é dado por:

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ctd} \cdot I_c}{y_t} \Rightarrow M_r = \frac{1,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 25^{2/3} / 1,4 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 0,1^3 / 12}{0,05} = 3,20 \text{ kN} / \text{m}$$

Momento solicitante raro é dado por:

$$M_{d,raro} = 8,68 \text{ kN.m/m}$$

$$M_{d,raro} > M_r \therefore \text{Seção fissurada!}$$

#### b. Inércia no estágio II

Cálculo da LN:

$$\frac{b}{2} \cdot x_{II}^2 + \alpha_e \cdot A_s \cdot x_{II} - \alpha_e \cdot A_s \cdot d = 0$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} = \frac{210000\text{MPa}}{0,85 \cdot 5600 \sqrt{25}\text{MPa}} = 8,82$$

$$50x_{II}^2 + 35,46x_{II} - 265,92 = 0 \therefore x_{II} = 1,98 \text{ cm}$$

Cálculo da Inércia no estádio II:

$$I_{II} = \frac{b_w \cdot x_{II}^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2$$

$$I_{II} = \frac{100 \cdot 1,98^3}{3} + 8,82 \cdot 4,02 \cdot (1,98 - 7,5)^2 = 1339,11 \text{ cm}^4 \Rightarrow \boxed{I_{II} = 1,33911 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4}$$

### c. Inércia equivalente

Como há trechos fissurados e não fissurados, a NBR 6118 (2014) recomenda que seja utilizada a inércia equivalente, Eq. (10), na correção da flecha. Vale ressaltar que o momento atuante da Eq. (10) deve ser aquele obtido com a combinação quase permanente e o valor do momento resistente é calculado considerando  $f_{cd}$  igual a  $f_{ctm}$ . Logo, o momento atuante é  $6,76 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$  e o momento de fissuração é  $4,57 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$ .

Logo, a inércia equivalente é dada por:

$$(EI)_{eq,t0} = 23800 \cdot 10^3 \left\{ \left( \frac{4,57}{6,76} \right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 0,1^3}{12} + \left[ 1 - \left( \frac{4,57}{6,76} \right)^3 \right] \cdot 1,33911 \cdot 10^{-5} \right\} \leq 23800 \cdot 10^3 \cdot \frac{1 \cdot 0,1^3}{12}$$

$$(EI)_{eq,t0} = 833,02 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \leq 1983,33 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \therefore \boxed{(EI)_{eq,t0} = 833,02 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}$$

### d. Flecha imediata corrigida

A flecha corrigida é dada por:

$$f_{imediatea,corrigida} = f_{imediatea} \cdot \frac{E_{cs} I_c}{(EI)_{eq,t0}} = 1,078 \cdot \frac{1983,33}{833,02} = 2,57 \text{ cm}$$

### e. Flecha total

A flecha final considera a fluência. Para  $t_0 = 0$  e  $t_\infty > 70$  meses, obtém-se:

$$\xi(t=0) = 0,68 \cdot (0,996^0) \cdot 0^{0,32} = 0$$

$$\xi(t_\infty) = 2$$

$$\therefore \Delta \xi = 2$$

Como não há armadura de compressão:  $\alpha_f = 2$ . A flecha total é dada por:

$$f_{total} = f_{imediatea,corrigida} = 2,57 \cdot (1 + 2)$$

$$\therefore \boxed{f_{total} = 7,71 \text{ cm}}$$

A flecha limite é  $l/250$  que resulta em 2,4 cm, portanto a flecha total é maior que a limite. E como a contra-flecha máxima é  $l/350$  (1,70 cm), a laje não atende ao ELS-DEF.

## 4.1.2 Cálculo por diferenças finitas

Para a aplicação do MDF, a laje foi discretizada em uma malha de 8x8, 64 elementos, de lado  $a$ . Por se tratar de um problema geometricamente simétrico (placa quadrada com todos os lados simplesmente apoiados) e com carregamento uniformemente distribuído, existe simetria de deformações. Isto posto, os nós da malha foram numerados de 1 (um) a 10 (dez), aproveitando a simetria nas direções  $x$ ,  $y$  e  $xy$ , conforme apresentado na Figura 5.

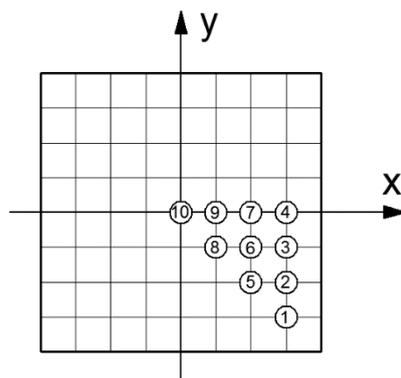


Figura 5. Malha empregada na análise via MDF e pontos analisados

Fonte: (Autor, 2018)

Aplicando adequadamente os operadores em cada nó da malha, a matriz de diferenças finitas resultante ( $\mathbf{M}$ ) é mostrada na Eq. (17), onde cada linha representa o nó que está sendo analisado e as colunas são os pontos da malha que fazem parte do operador aplicado no respectivo nó. Ressalta-se que, no nó 1 foi aplicado o operador referente à canto de bordo simplesmente apoiado, nos nós 2, 3 e 4 o operador para um ponto próximo ao apoio simples e nos demais o operador para nós internos da malha.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
 18 & -16 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -8 & 21 & -8 & 1 & -8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -8 & 20 & -8 & 2 & -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & -16 & 19 & 0 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 \\
 2 & -16 & 4 & 0 & 20 & -16 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
 0 & 3 & -8 & 2 & -8 & 23 & -8 & -8 & 3 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & -8 & 2 & -16 & 20 & 4 & -8 & 1 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -16 & 4 & 22 & -16 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -8 & -16 & 25 & -8 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & -32 & 20
 \end{bmatrix} \tag{17}$$

As deformações nos nós ( $W_i$ ) são obtidas pelo produto da inversa da matriz de diferenças finitas ( $\mathbf{M}^{-1}$ ) pelo vetor unitário ( $\mathbf{U}$  – vetor de uns) e os escalares  $A^4\lambda$ , Eq. (18).

$$\mathbf{W} = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U})A^4\lambda \tag{18}$$

As operações foram realizadas no software Excel, com auxílio a função “matriz.inverso” para a inversão da matriz e “matriz.mult” para a multiplicação da matriz inversa pelo vetor unitário. Por fim, o vetor resultante é multiplicado por  $A^4 = \frac{a}{L} = \left(\frac{1}{8}\right)^4$ . Desse modo, a deformação vertical nos nós da malha da laje é dada pela Eq. (19).

$$w_i^T = [0,663 \ 1,186 \ 1,515 \ 1,627 \ 2,134 \ 2,733 \ 2,937 \ 3,507 \ 3,770 \ 4,055] \cdot 10^{-3} \cdot \frac{(p \cdot L^4)}{D} \quad (19)$$

Com  $i$  variando de 1 a 10, representando respectivamente os nós de 1 a 10. Portanto, pelo MDF, a flecha na laje é dada pela Eq. (20). Para as mesmas condições, a literatura fornece o resultado igual a  $w_{10} = 0,00406 \cdot p \cdot L^4/D$  (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1985), portanto o erro é  $-0,12\%$ .

$$w_{10} = 0,004055 \frac{p \cdot L^4}{D} \quad (20)$$

Aplicando as características da laje em análise, a flecha imediata é:

$$f_{imediate} = 0,004055 \cdot \frac{4,24 \cdot 6^4}{\frac{0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{25} \cdot 10^3 \cdot 0,1^3}{12 \cdot (1 - 0,2^2)}} = 1,0785 \text{ cm.}$$

O efeito da fissuração é computado multiplicando o valor encontrado pela relação entre a inércia da seção bruta e equivalente, portanto a flecha imediata corrigida é 2,56 cm. Para considerar o efeito da fluência, a flecha deve ser multiplicada por três (cálculo similar ao realizado no item 4.1.1), resultando em uma flecha total de 7,70 cm. A flecha limite é  $l/250$  que resulta em 2,4 cm, portanto a flecha total é maior que a limite. Uma vez que a contra-flecha máxima é  $l/350$  (1,70 cm), a laje não atende ao ELS-DEF.

### 4.1.3 Cálculo por elementos finitos

O cálculo da flecha pelo método dos elementos finitos foi feito com a utilização do software ABAQUS. A biblioteca do programa dispõe de vários elementos finitos, tais como: elementos sólidos, de casca e de viga. Foi utilizado na modelagem o elemento Shell (casca) de quatro nós com integração reduzida, conhecido como SR4. A integração reduzida diminui consideravelmente o tempo de execução, sobretudo em problemas tridimensionais, e não compromete a precisão dos resultados obtidos. O elemento de casca de uso geral, com integração reduzida e controle de hourglass, apresenta quatro nós, cada um com seis graus de liberdade, e um ponto de integração.

O modelo possui 400 elementos e 441 nós, a malha adotada foi quadrática e está apresentada na Figura 6. Para a consideração da fissuração, foi adotado um módulo de elasticidade igual a 42% do módulo de elasticidade considerando a seção não fissurada. O valor de 42% deve-se a relação entre a inércia equivalente e a inércia da seção bruta (

833,02/1983,33 = 0,42). Portanto, na definição do material, foram adotados:  $E = 9996 \text{ MPa}$ ,  $\rho = 3440 \text{ kg/m}^3$  e  $\nu = 0,2$ . A Figura 6 apresenta a laje deformada.

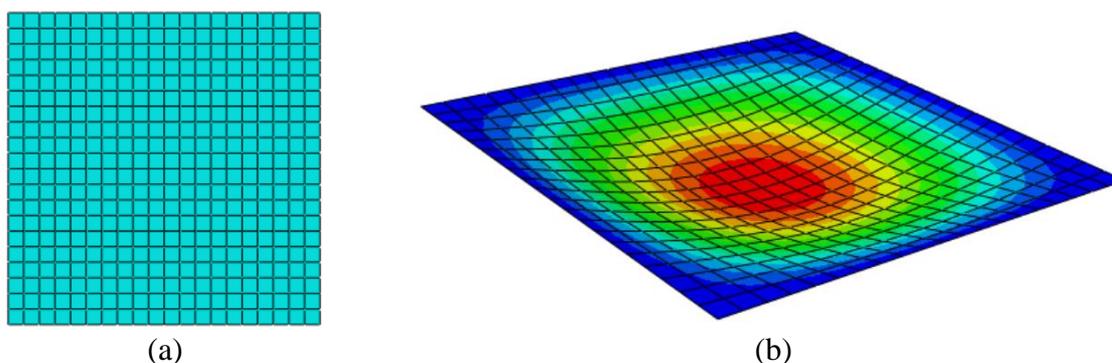


Figura 6. Malha empregada na análise via MEF (a) e deformada da laje (b)

Fonte: (Autor, 2018)

O valor encontrado para flecha pelo programa foi de  $2,63 \text{ cm}$ , para considerar o efeito da fluência a flecha deve ser multiplicada por três (cálculo similar ao realizado no item 4.1.1), resultando em uma flecha total de  $7,89 \text{ cm}$ . A flecha limite é  $l/250$  que resulta em  $2,4 \text{ cm}$ , portanto a flecha total é maior que a limite. Como a contra-flecha máxima é  $l/350$  ( $1,70 \text{ cm}$ ), a laje não atende ao ELS-DEF.

#### 4.1.4 Comparação entre os processos de cálculo

O resumo dos resultados encontrados para flecha pelos diferentes processos encontra-se na Tabela 1. Como pode ser observado, os valores foram bem próximos. Considerando o cálculo por séries como referência, a variação em relação ao cálculo por método das diferenças finitas foi  $-0,13\%$  e em relação ao método dos elementos finitos foi  $2,33\%$ . Portanto, os resultados mostram a coerência e precisão dos processos utilizados na resolução da equação diferencial de placas delgadas.

Tabela 1. Comparação das flechas para os diferentes processos de cálculo

Processo	Flecha total (cm)	Contra-flecha (cm)	Flecha resultante (cm)	Valor aceitável (cm)	Atende ao ELS-DEF?
Séries	7,71	1,70	6,01	2,40	Não
MDF	7,70	1,70	6,00	2,40	Não
MEF	7,89	1,70	6,19	2,40	Não

## 4.2 Análise paramétrica

A análise paramétrica foi feita com o auxílio do software ABAQUS, portanto a flecha foi calculada pelo método dos elementos finitos. A análise teve por objetivo encontrar o valor mínimo da resistência do concreto para que o estado limite de deformação excessiva fosse atendido. A Figura 7 mostra o gráfico com os resultados da análise paramétrica, observa-se que a flecha diminui com o aumento da resistência. O gráfico apresenta a curva da flecha total, da flecha resultante (flecha total menos contra-flecha) e da flecha limite. É possível concluir que para atender ao ELS-DEF, o valor mínimo da resistência do concreto deve ser 35 MPa.

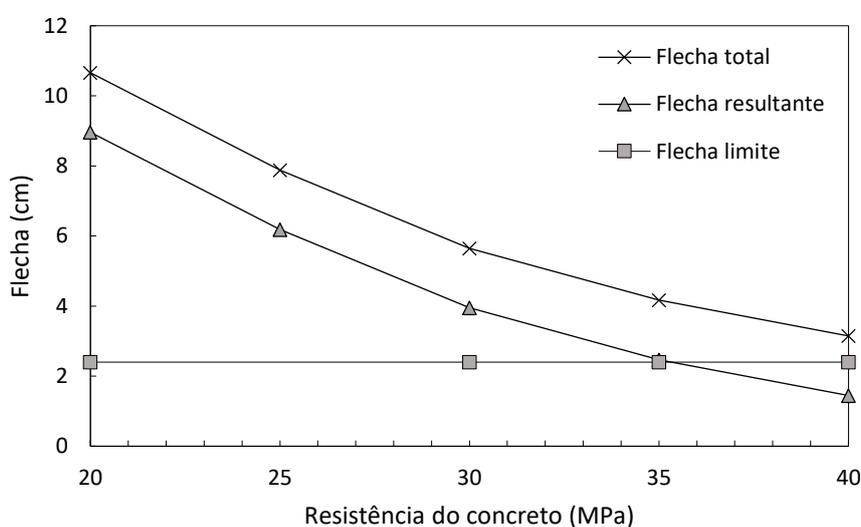


Figura 7. Variação da flecha em função da resistência do concreto

Fonte: (Autor, 2018)

## 5 CONCLUSÕES

Com base nos resultados encontrados, os processos de cálculo de flechas por meio de séries, método das diferenças finitas e elementos finitos possuem semelhante precisão, uma vez que os resultados ficaram bastante próximos. Além disso, a análise paramétrica feita com auxílio do software Abaqus foi capaz de fornecer a resistência mínima para que a laje em estudo atendesse ao ELS-DEF, sendo uma alternativa viável para tal análise. Outras análises podem ser feitas de forma similar, variando, por exemplo, a espessura da laje a fim de obter a altura mínima para atendimento ao estado limite de serviço.



---

## REFERÊNCIAS

Ames, W. F., 1977. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2. Ed. Academic Press, INC. New York.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118, 2014. *Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento*. Rio de Janeiro.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6120, 1980. *Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações*. Rio de Janeiro.

Bares, R., 1972. *Tablas para el cálculo de placas y vigas parede*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili.

Carvalho, R. Chust e Figueiredo Filho, J. Rodrigues, 2014. *Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado*. 4ª Ed. EduFSCar. São Carlos, São Paulo.

Franco, N. B., 2006. *Cálculo numérico*. 1ª Ed. Person Prentice Hall. São Paulo.

Timoshenko, S. e Woinowsky-Krieger, S. 1985. *Theory of plates and shells*. 2ª Ed. McGraw-Hill. New York.