



UMA FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MEF PARA ANÁLISE DE SÓLIDOS 2D COM MATERIAL ELASTO-PLÁSTICO E GRANDES DEFORMAÇÕES

A POSITIONAL FEM FORMULATION FOR LARGE STRAIN 2D ELASTO-PLASTIC SOLID ANALYSIS

Péricles Rafael Pavão Carvalho (1); Humberto Breves Coda (2); Rodolfo André Kuche Sanches (3)

(1) Mestrando em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, Brasil.

Email para Correspondência: periclescarvalho@usp.br; (P) Apresentador

(2) Dr. Prof., Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, Brasil.

Resumo: Diversos processos industriais envolvendo metais e polímeros necessitam de grandes deformações plásticas para que o sólido obtenha o formato desejado. Análises numéricas de tais problemas elasto-plásticos são desafiadoras e demandam, além da consideração de grandes deslocamentos, a implementação de um modelo constitutivo válido para o regime de grandes deformações. Neste trabalho, desenvolve-se um código computacional utilizando uma formulação posicional do Método dos Elementos Finitos, que se difere das tradicionais por usar como parâmetros nodais as posições ao invés de deslocamentos. Esta abordagem é baseada em uma descrição Lagrangiana total e naturalmente inclui a não-linearidade geométrica, abordando portanto casos de grandes deslocamentos. O modelo constitutivo elasto-plástico adotado é baseado na decomposição multiplicativa do gradiente da mudança de configuração. Essa consideração, além da aplicação de uma lei hiper-elástica neo-Hookeana para a parcela elástica da deformação, permite que o modelo seja aplicado em análises de grandes deformações. Adota-se o critério de von Mises para identificar regiões com comportamento plástico. São considerados modelos de encruamento isotrópico e cinemático baseados na lei de Armstrong-Frederick, e aplica-se o método de Euler implícito para resolver as leis de evolução. Um operador tangente consistente elasto-plástico é obtido de forma a preservar a taxa de convergência do método de Newton-Raphson durante a resolução do sistema não-linear. Para uma aplicação bidimensional do método, são consideradas as aproximações do Estado Plano de Deformação e Estado Plano de Tensão, onde o último resulta em um sistema não-linear para as deformações, o qual foi resolvido neste trabalho por um procedimento de Newton-Raphson local. Por fim, exemplos numéricos são realizados tanto para validação quanto aplicação do método proposto.

Palavras chaves: MEF posicional; Grandes deslocamentos; Grandes deformações; Elasto-plasticidade.

Abstract: Several industrial forming processes involving metal and polymers imposes large plastic strains in order to give a solid its desired shape. Numerical analysis of such



XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



elasto-plastic problems are challenging and requires, besides from the consideration of large displacements, the implementation of a constitutive model valid for the finite strain regime. In this work, we develop a computational code using a position based finite element formulation, that differs from traditional ones by using as nodal parameters the positions instead of displacements. This approach is based on a total Lagrangian description and naturally includes geometrical non-linearity, being therefore applicable to large displacements cases. The elasto-plastic constitutive model is based on the multiplicative decomposition of the deformation gradient. This consideration, along with a neo-Hookean hyper-elastic law for the elastic parcel of strains, allows the model to be applied in finite strain analysis. We adopt von Mises yield criteria to identify regions with plastic behavior. Isotropic and kinematic hardening based on Armstrong-Frederick law are considered, and the backward Euler method is applied for solving the evolution laws. A consistent tangent elasto-plastic operator is obtained in order to preserve the convergence rate of the Newton-Raphson method while solving the resulting nonlinear system. Two-dimensional applications of the constitutive model follow Plane Strain State and Plane Stress State approximations. The latter results in a non-linear system for strains, solved in this work by a local Newton-Raphson procedure. Finally, numerical examples are performed both for validation and application of the proposed method.

Keywords: Positional FEM; Large displacements; Large strains; Elasto-plasticity.

1 INTRODUÇÃO

O recente avanço tecnológico tem levado ao desenvolvimento de sistemas e materiais cada vez mais complexos e otimizados, tornando-se indispensável a representação de fenômenos não-lineares em análises mais elaboradas. Nesse escopo, pode-se citar por exemplo a consideração de grandes deslocamentos e deformações. Em materiais elasto-plásticos como os metais e polímeros, que possuem notável aplicação na indústria da manufatura, observam-se ainda comportamentos altamente não-lineares associados ao caráter dissipativo do modelo constitutivo, que permite o surgimento de deformações residuais após o descarregamento.

Para realizar tais análises, sabe-se que abordagens experimentais são custosas, e soluções analíticas, quando não impraticáveis, estão restritas a casos muito específicos. Dessa forma, a alternativa numérica se destaca pela sua generalidade e praticidade.

Com isso em vista, desenvolve-se neste trabalho uma ferramenta numérica computacional utilizando o método dos elementos finitos posicional, desenvolvido por Bonet et al. (2000) e Coda e Greco (2004), que destaca-se por adotar como parâmetros nodais as posições, ao invés dos deslocamentos. Tal método parte de uma abordagem Lagrangiana total e considera naturalmente não-linearidades geométricas. Para uma descrição mais detalhada, pode-se consultar Coda e Paccola (2009) e Coda (2018).

Implementa-se ainda um modelo constitutivo elasto-plástico baseado na energia de dissipação, onde utiliza-se a conjugação termodinâmica entre a taxa de deformação plástica e o denominado tensor de Mandel, conforme abordado por Svendsen (1998) e Pascon e Coda (2013). A formulação adotada parte da decomposição de Kröner-Lee (Kröner,

1960; Lee, 1969), onde assume-se que o gradiente da função mudança de configuração é decomposto multiplicativamente entre suas parcelas elástica e plástica. Tal consideração garante que o modelo possa ser aplicado a casos de grandes deformações, ao contrário de decomposições aditivas como a de Green-Naghdi (Eterovic; Bathe, 1991). Além disso, considera-se um modelo de encruamento cinemático baseado na lei de Armstrong-Frederick (Armstrong; Frederick, 1966), que foi generalizado para o caso de deformações finitas no trabalho de Dettmer e Reese (2004), e para a parcela elástica do modelo constitutivo utiliza-se uma lei neo-Hookeana.

2 CINEMÁTICA DOS CORPOS DEFORMÁVEIS

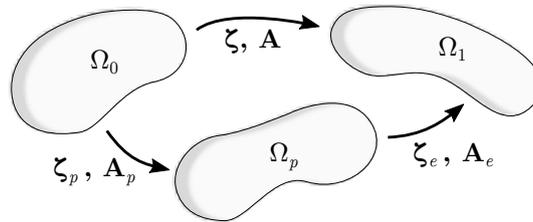


Figura 1. Configurações inicial, deformada e intermediária de um sólido

Sejam Ω_0 e Ω_1 , respectivamente, as configurações inicial e final de um sólido, e seja ζ a função mudança de configuração, que associa cada ponto de Ω_0 a seu respectivo par em Ω_1 . Denotando por \mathbf{A} o gradiente de ζ na configuração inicial, podemos definir o alongamento à direita de Cauchy-Green e o tensor de deformações de Green-Lagrange, respectivamente, por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad \text{e} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (2)$$

Denota-se por \mathbf{D} a taxa de deformação linear, que relaciona-se com a taxa do tensor de deformações de Green-Lagrange por meio da equação

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{A}^{-1}. \quad (3)$$

Para materiais elasto-plásticos, introduz-se o conceito de configuração intermediária: suponha que o corpo é descarregado de forma que chegue a um estado de tensões nula, denotado por Ω^p . Nessa situação, as únicas deformações presentes no sólido serão as residuais, ou plásticas. Seja \mathbf{A}_p o gradiente da função ζ_p mapeando de Ω_0 a Ω_p , e \mathbf{A}_e o gradiente da função ζ_e mapeando de Ω_p a Ω_1 (ver Figura 1). Então, pode-se utilizar a decomposição de Kröner-Lee, dada por:

$$\mathbf{A} = \nabla(\zeta) = \nabla(\zeta^e \circ \zeta^p) = \mathbf{A}^e \mathbf{A}^p. \quad (4)$$

Analogamente às Eqs. (1) e (2), definem-se os tensores

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{A}_e^T \mathbf{A}_e, \quad (5)$$

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_p, \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_e - \mathbf{I}) \quad e \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_p - \mathbf{I}), \quad (8)$$

de onde resulta a seguinte relação:

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{A}_p^{-T}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_p)(\mathbf{A}_p)^{-1}. \quad (9)$$

Denota-se por \mathbf{D}_p a taxa de deformação plástica, de forma que, analogamente à Eq. (3), pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{A}_p^{-T} \dot{\mathbf{E}}_p \mathbf{A}_p^{-1}. \quad (10)$$

Finalmente, define-se o jacobiano (ou deformação volumétrica), por

$$J = \det(\mathbf{A}) = J_e J_p, \quad (11)$$

onde

$$J_e = \det(\mathbf{A}_e) \quad e \quad (12)$$

$$J_p = \det(\mathbf{A}_p). \quad (13)$$

3 MECÂNICA DOS SÓLIDOS E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

O problema da mecânica dos sólidos neste trabalho é resolvido por meio de uma abordagem energética. Para tal, escreve-se a energia mecânica total do sistema, que, no caso estático, é dada por

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext}, \quad (14)$$

onde Π_{int} é a energia de deformação, expressa pela integral da energia livre de Helmholtz ψ ao longo do volume inicial, isto é,

$$\Pi_{int} = \int_{V_0} \psi dV_0, \quad (15)$$

e Π_{ext} é a energia potencial das forças externas, dada por

$$\Pi_{ext} = - \int_{S_0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} dS_0 - \int_{V_0} \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} dV_0, \quad (16)$$



XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



na qual \mathbf{y} é o campo de posições, \mathbf{p} é a carga aplicada no contorno S_0 e \mathbf{b} é a força de volume aplicada no domínio do sólido.

A solução pode ser obtida pela condição de estacionariedade da Eq. (14), isto é,

$$\delta\Pi = \delta\Pi_{int} + \delta\Pi_{ext} = 0. \quad (17)$$

De forma a resolver a Eq. (17) numericamente, aplica-se o métodos dos elementos finitos posicional, no qual escreve-se a Eq. (14) em termos das posições nodais. Denota-se por \mathbf{x}^α e \mathbf{y}^α , respectivamente, os vetores de posições iniciais e finais de um nó α . Dessa forma, dentro do domínio de um elemento finito, pode-se realizar as seguintes interpolações:

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_\alpha(\xi_1, \xi_2)\mathbf{x}^\alpha \quad \text{e} \quad (18)$$

$$\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_\alpha(\xi_1, \xi_2)\mathbf{y}^\alpha. \quad (19)$$

onde φ_α é a função de forma associada ao nó α e ξ_j são as coordenadas adimensionais a partir dos quais mapeiam-se os elementos.

A equação de equilíbrio pode ser então obtida pelas derivadas da energia com relação às posições nodais \mathbf{y}^α , resultando no sistema não-linear

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{y}^\alpha} = \mathbf{f}_{int}^\alpha + \mathbf{f}_{ext}^\alpha = \mathbf{0}, \quad (20)$$

na qual \mathbf{f}_{int}^α e \mathbf{f}_{ext}^α representam, respectivamente, as forças internas e externas atuando no nó α , e são dadas por

$$\mathbf{f}_{int}^\alpha = \frac{\partial\Pi_{int}}{\partial\mathbf{y}^\alpha} = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{y}^\alpha} dV_0 \quad \text{e} \quad (21)$$

$$\mathbf{f}_{ext}^\alpha = \frac{\partial\Pi_{ext}}{\partial\mathbf{y}^\alpha} = - \int_{S_0} \varphi^\alpha \varphi^\beta \mathbf{p}^\beta dS_0 - \int_{V_0} \varphi^\alpha \varphi^\beta \mathbf{b}^\beta dV_0, \quad (22)$$

onde \mathbf{S} representa o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, conjugado energético do tensor de deformações de Green-Lagrange, obtido por meio da lei constitutiva, a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}}. \quad (23)$$

Para obter o gradiente da função mudança de configuração, pode-se realizar o mapeamento de cada elemento finito na configuração inicial e final por meio das funções ζ^0 e ζ^1 , respectivamente, a partir de um elemento definido em coordenadas adimensionais,

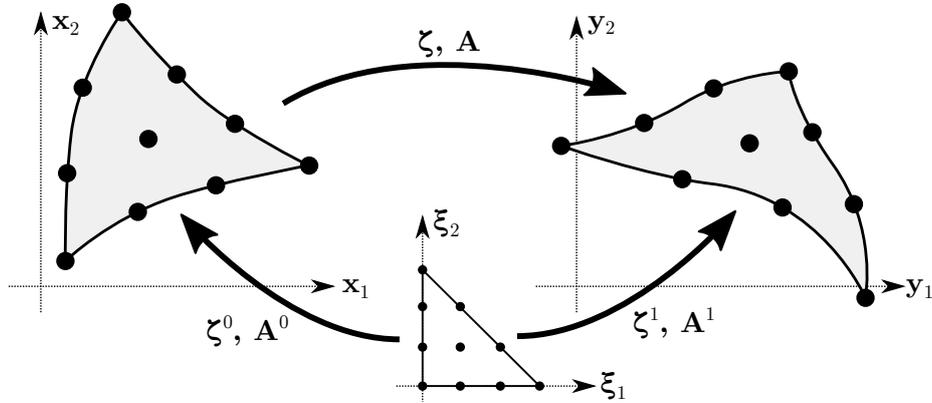


Figura 2. Mapeamento da configuração inicial e final de um elemento

conforme indica a Figura 2. Dessa forma, calcula-se

$$\mathbf{A} = \nabla (\zeta^0 \circ (\zeta^1)^{-1}) = \mathbf{A}^1 (\mathbf{A}^0)^{-1}, \text{ onde:} \quad (24)$$

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi_j} x_i^\alpha \text{ e} \quad (25)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi_j} y_i^\alpha. \quad (26)$$

O sistema não-linear da Eq. (20) é resolvido, neste trabalho, pelo processo iterativo de Newton-Raphson, onde, para cada iteração $l + 1$, aplica-se uma correção $\Delta \mathbf{y}_{l+1}$ calculada conforme o sistema linear

$$\mathbf{H}_l(\Delta \mathbf{y})_{l+1} = -\mathbf{g}_l. \quad (27)$$

onde \mathbf{g} é o vetor resíduo do sistema e \mathbf{H} é denominada matriz hessiana, ou rigidez tangente, e é dada, para cada par de nós α, β e de direções i, j pela expressão

$$H^{\alpha\beta ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} = \int_{V_0} \left[\left(\mathbf{c} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_j^\beta} \right) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_i^\alpha} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} \right] dV_0, \quad (28)$$

sendo o tensor de quarta ordem \mathbf{c} denominado operador tangente consistente da lei constitutiva, dado por

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}. \quad (29)$$

4 MODELO CONSTITUTIVO ELASTO-PLÁSTICO

4.1 Energia e tensão

Baseado em modelos reológicos, considera-se a decomposição aditiva da energia livre de Helmholtz (Svendsen, 1998), isto é,

$$\psi = \psi_e + \psi_p, \quad (30)$$

onde ψ_p é a parcela plástica da energia e ψ_e é a parcela elástica, dada, neste trabalho, por uma lei neo-Hookeana na forma

$$\psi_e = \frac{\Lambda}{2} \ln(J_e)^2 + \frac{\mu}{2} [\text{tr}(\mathbf{C}_e) - 3 - 2 \ln(J_e)]. \quad (31)$$

Associadas à parcela plástica, definem-se as tensões de retorno na configuração inicial e intermediária, respectivamente, por

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{E}_p} \quad \text{e} \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{A}_p \mathbf{X} \mathbf{A}_p^T. \quad (33)$$

Associadas à parcela elástica, define-se a tensão elástica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de Mandel como

$$\mathbf{S}_e = \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e} = \Lambda \ln(J_e) \mathbf{C}_e^{-1} + \mu (\mathbf{I} - \mathbf{C}_e^{-1}) \quad \text{e} \quad (34)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}_e \mathbf{S}_e. \quad (35)$$

O tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie pode ser obtido, então, pela expressão

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{S}_e \mathbf{A}_p^{-T}, \quad (36)$$

e a taxa de dissipação por

$$d = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{\Psi} = (\mathbf{M} - \boldsymbol{\chi}) : \mathbf{D}_p - \frac{\partial \psi_p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0, \quad (37)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ representa os parâmetros de encruamento. De acordo com a Eq. (37), o tensor $(\mathbf{M} - \boldsymbol{\chi})$ é termodinamicamente conjugado à taxa de deformação plástica \mathbf{D}_p (Svendsen, 1998), relação utilizada como base para definir o critério de plastificação e as leis de evolução da formulação adotada.

4.2 Leis de evolução

Para controlar a evolução plástica, utiliza-se a condição de Kuhn-Tucker

$$\dot{\gamma}\Phi = 0, \quad (38)$$

onde $\dot{\gamma}$ é um multiplicador a ser determinado durante o processo e Φ é o critério de plastificação. Neste trabalho, utiliza-se o critério de von Mises, dado por

$$\Phi = \|(\mathbf{M} - \boldsymbol{\chi})^D\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y(\kappa) \leq 0, \quad (39)$$

onde $(\bullet)^D$ denota a parcela desviadora de um tensor e σ_y é a função de escoamento, que depende do parâmetro de encruamento isotrópico κ

Além disso, assume-se que as variáveis plásticas evoluem de acordo com as equações

$$\dot{\mathbf{A}}_p = \dot{\gamma}\mathbf{N}_p\mathbf{A}_p, \quad (40)$$

$$\dot{\kappa} = \dot{\gamma}\sqrt{2/3} \quad \text{e} \quad (41)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\gamma}\mathbf{D}_\mathbf{X}, \quad (42)$$

onde

$$\mathbf{N}_p = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} = \frac{(\mathbf{M} - \boldsymbol{\chi})^D}{\|(\mathbf{M} - \boldsymbol{\chi})^D\|}, \quad (43)$$

$$\mathbf{D}_\mathbf{X} = \mathbf{A}_p^{-1}\mathbf{D}_\mathbf{X}\mathbf{A}_p^{-T} - \text{sim}(2\mathbf{A}_p^{-1}\mathbf{N}_p\mathbf{A}_p\mathbf{X}) \quad \text{e} \quad (44)$$

$$\mathbf{D}_\boldsymbol{\chi} = c\mathbf{N}_p - b\boldsymbol{\chi}. \quad (45)$$

As Eqs. (44) e (45) são deduzidas por Dettmer e Reese (2004), e tratam-se de uma generalização da lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick, sendo a notação $\text{sim}(\bullet)$ utilizada para representar a parcela simétrica de um tensor, e os parâmetros c e b constantes de encruamento do material. Já a evolução da deformação plástica, representada pela Eq. (40), foi baseada no trabalho de Pascon e Coda (2013). Pode-se provar que esta garante a hipótese fundamental da conservação de volume plástico, isto é,

$$\dot{J}_p = 0. \quad (46)$$

4.3 Implementação computacional

No algoritmo desenvolvido, aplica-se um processo de previsão elástica e correção plástica, isto é, assume-se inicialmente que não há evolução das variáveis plásticas ($\dot{\gamma} = 0$) e verifica-se o critério da Eq. (39). Caso esse não seja atendido, assume-se que há evolução plástica, isto é, $\dot{\gamma} > 0$. Pela Eq. (38) (condição de Kuhn-Tucker), isso implica que

$$\Phi = \|(\mathbf{M}^{s+1} - \boldsymbol{\chi}^{s+1})^D\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y(\kappa^{s+1}) = 0. \quad (47)$$

Para resolver as equações de evolução, aplica-se neste trabalho o método de Euler implícito, também conhecido como algoritmo de retorno radial, no qual as Eqs. (40), (41) and (44) são aproximadas por

$$\Delta \mathbf{A}_p = \mathbf{A}_p^{s+1} - \mathbf{A}_p^s = \Delta \gamma \mathbf{N}_p^{s+1} \mathbf{A}_p^{s+1}, \quad (48)$$

$$\Delta \kappa_p = \kappa^{s+1} - \kappa^s = \Delta \gamma \sqrt{2/3}, \text{ e} \quad (49)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}^{s+1} - \mathbf{X}^s = \Delta \gamma \mathbf{D}_X^{s+1}, \quad (50)$$

onde os índices $s + 1$ e s indicam, respectivamente, o passo atual e anterior da pseudo-discretização temporal. As Eqs. (47), (48), (49) e (50) formam um sistema não-linear para encontrar as variáveis $\Delta \gamma$, \mathbf{A}_p^{s+1} , κ^{s+1} e \mathbf{X}^{s+1} . No presente trabalho, tal sistema é resolvido pelo método de Newton-Raphson.

Conforme discutido por Dettmer e Reese (2004), a principal desvantagem do método de Euler implícito é que este pode causar erros na propriedade da conservação de volume, indicada na Eq. (46). Para evitar esse problema, deve-se aplicar uma discretização de tempo mais refinada quando comparada com outras estratégias de integração temporal (Vladimirov; Pietryga; Reese, 2007).

Para a implementação 2D do modelo constitutivo adotado, foram consideradas as aproximações do estado plano de deformações (EPD) e estado plano de tensões (EPT). No primeiro, assume-se que as deformações associadas ao terceiro eixo são nulas ($E_{13} = E_{23} = E_{33} = 0$). Já no EPT, isso é assumido para as tensões, isto é, $S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0$. Uma vez que o modelo considerado é isotrópico, as condições $S_{13} = S_{23} = 0$ são automaticamente cumpridas caso seja assumido que $E_{13} = E_{23} = 0$. Entretanto, a condição $S_{33} = 0$ resulta em uma equação não-linear para E_{33} de complexa solução analítica. Dessa forma, neste trabalho ela é resolvida numericamente, e utiliza-se novamente um procedimento baseado no método de Newton-Raphson, que se destaca pela sua generalidade, podendo ser aplicado em qualquer modelo constitutivo onde se conheça o operador tangente consistente \mathcal{C} (Zienkiewicz; Taylor; Fox, 2014).

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para os exemplos apresentados, dois materiais são considerados: um metal (*Mild Steel Ck15*), cujos parâmetros são dados por Lührs, Hartmann e Haupt (1997), e um polímero (PET orientado), cujos parâmetros são dados por Dettmer e Reese (2004). Em ambos, considera-se que não há encruamento isotrópico, isto é, a função de escoamento σ_y é constante. Todos os parâmetros são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros dos materiais utilizados nos exemplos de validação

Material	Λ (MPa)	μ (MPa)	σ_y (MPa)	c (MPa)	b
Metálico	173 333	80 000	300	1 900	8.5
Polimérico	320	80	35	100	2.7

Para a geração da malha, visualização do pós-processamento e geração de gráficos, utilizam-se, respectivamente, os *softwares Open-Source* Gmsh (Geuzaine; Remacle, 2009), Paraview (Ayachit, 2015) e Gnuplot (Williams; Kelley; many others, 2013).

5.1 Chapa sob tensão uniaxial

O primeiro exemplo, extraído de Dettmer e Reese (2004) e Pascon e Coda (2013), tem como intuito definir o diagrama tensão-deformação de uma barra sujeita a tensão uniaxial. Considera-se uma chapa com geometria indicada na Figura 3, sujeita a deslocamento prescrito na sua face direita, com gráfico de evolução apresentado também na Figura 3, sendo o valor máximo u_1 igual a 0.5m para material metálico e 1.5m para o material polimérico. A análise é realizada em 1200 passos e, nesse caso, considera-se estado plano de tensão.

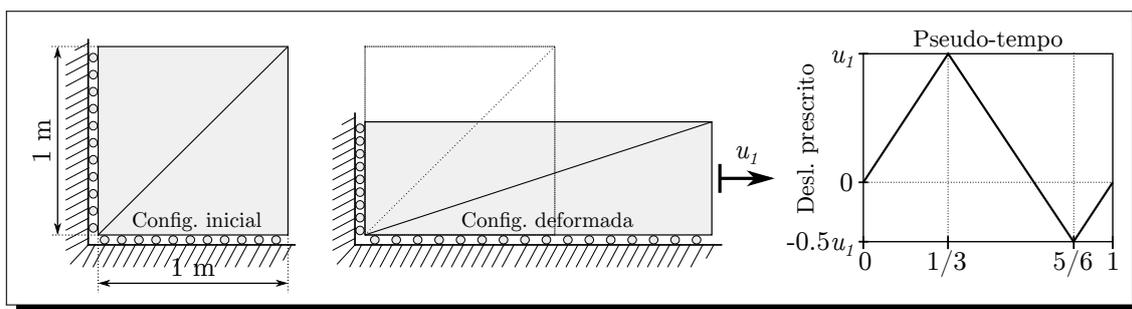


Figura 3. Chapa sob tensão uniaxial

De forma a obter campos de tensão e deformação constantes ao longo do domínio e assim poder estabelecer uma relação adequada entre os dois, adotam-se elementos finitos de 3 nós e ordem linear, com o menor refinamento de malha possível. Utiliza-se apenas 1 ponto de integração em cada elemento, onde são medidas as variáveis de interesse.

Na Figura 4 são traçados os gráficos de tensão-deformação linear para cada material considerado. A tensão de Cauchy foi obtida conforme a equação

$$\sigma = \frac{1}{J} \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T, \quad (51)$$

e a deformação linear nesse caso é dada por u/L , onde L é o comprimento inicial da chapa (1 m) e u é valor do deslocamento prescrito. Os gráficos foram comparados com os de Dettmer e Reese (2004), mostrando resultados satisfatórios e atestando a validade do código desenvolvido, em especial no que diz respeito ao EPT, uma vez que a fonte utilizou o modelo constitutivo completo com elementos tridimensionais.

Na Figura 5 são traçados os gráficos da tensão de retorno na direção longitudinal. Alguns valores para o caso de material metálico são comparados com os de Pascon e Coda (2013), mostrando novamente boa concordância. Observa-se que o material polimérico apresenta um regime elástico maior quando comparado com o metálico, gerando trechos perceptíveis onde a tensão de retorno se mantém constante.

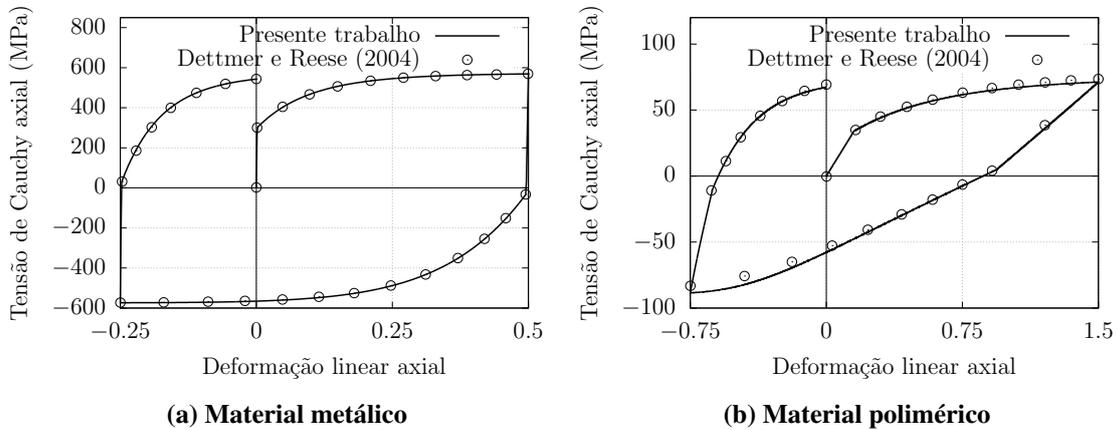


Figura 4. Diagramas tensão-deformação para o exemplo de tensão uniaxial

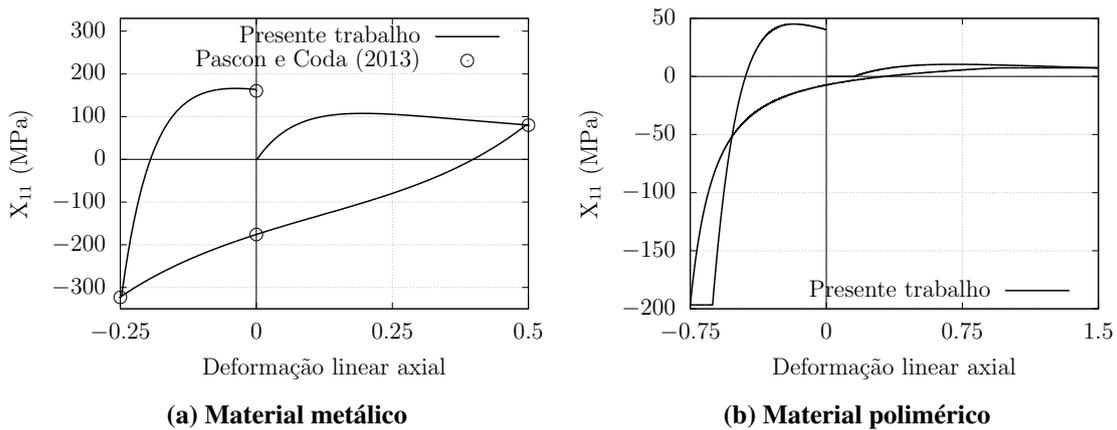


Figura 5. Diagrama de tensão de retorno para o exemplo de tensão uniaxial

5.2 Chapa sob cisalhamento simples

No próximo exemplo, também extraído de Dettmer e Reese (2004) e Pascon e Coda (2013), pretende-se obter a relação tensão-deformação de um sólido sujeito a cisalhamento simples. Considera-se uma chapa com geometria indicada na Figura 6, e aplica-se deslocamento prescrito horizontal na face superior de valor máximo $u_1 = 1\text{m}$ para o material metálico e $u_1 = 4\text{m}$ para o material polimérico. Novamente, a análise é realizada em 1200 passos, e a malha é equivalente à do exemplo anterior.

Os gráficos de tensão-deformação para cada material são mostrados na Figura 7, e comparados com os de Dettmer e Reese (2004). Novamente, a tensão de Cauchy foi obtida conforme a Eq. (51), e a deformação linear nesse caso é dada por $u/2h$, onde h é a altura inicial da barra (1 m) e u é valor do deslocamento prescrito. Na Figura 8, são traçados os gráficos da tensão de retorno, sendo alguns valores do material polimérico comparados com os de Pascon e Coda (2013).

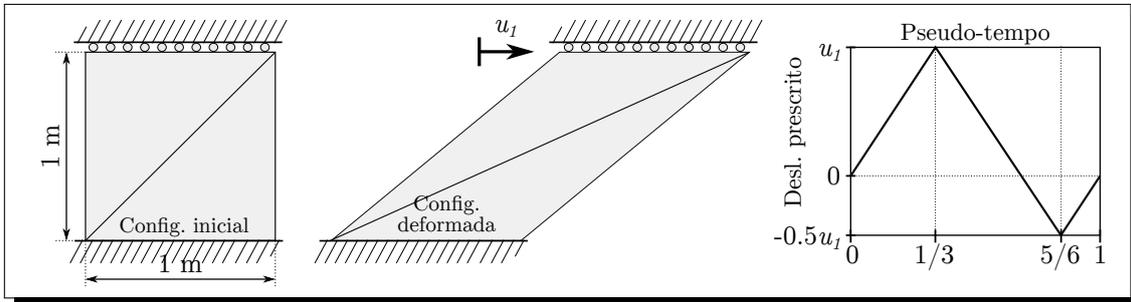


Figura 6. Chapa sob cisalhamento simples

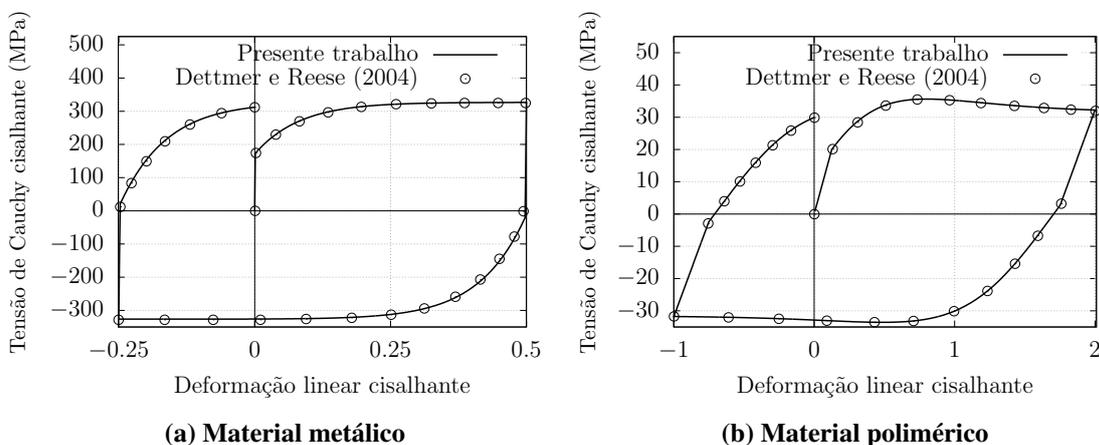


Figura 7. Diagramas tensão-deformação para o ensaio de deformação cisalhante simples

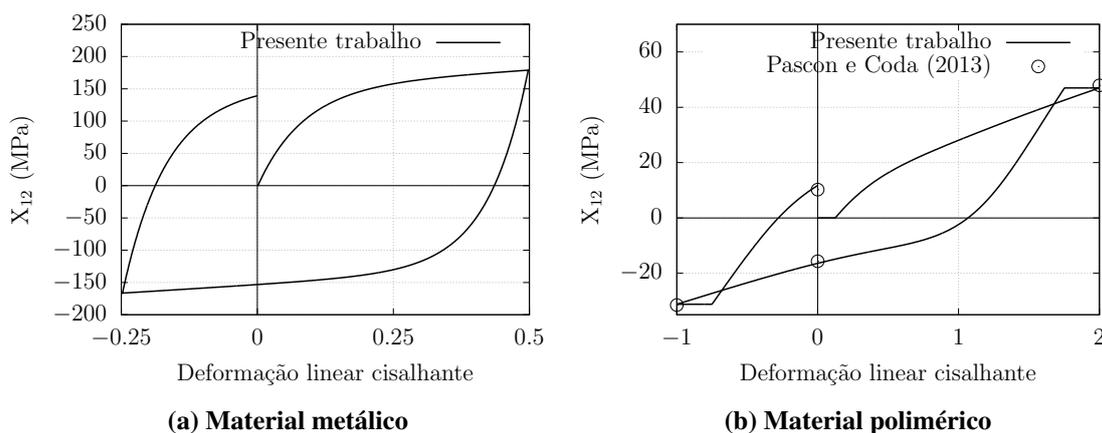


Figura 8. Tensão de retorno para o ensaio de deformação cisalhante simples

5.3 Bloco parcialmente carregado

Neste exemplo, propõe-se a análise de um bloco com material polimérico (ver Tabela 1) sujeito a um carregamento distribuído parcial conforme a Figura 9. Devido à si-

metria, apenas metade do problema é discretizado, sendo adotada uma malha composta por 512 elementos triangulares de aproximação cúbica e 2401 nós.

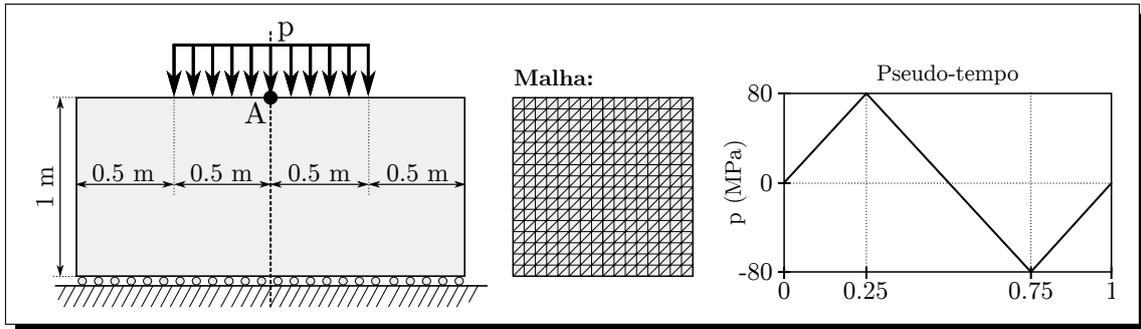
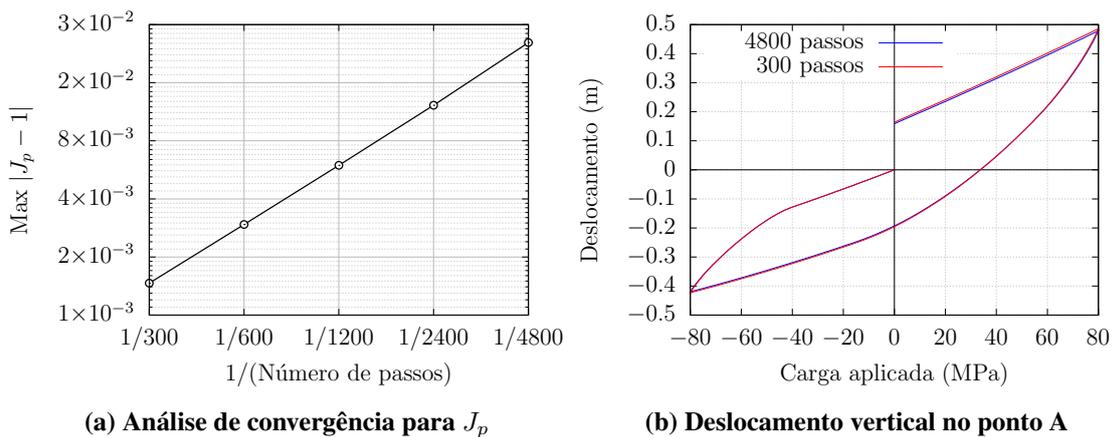


Figura 9. Bloco parcialmente carregado

Conforme discutido na Subseção 4.3, o método de Euler implícito apresenta erros numéricos com relação à propriedade da conservação do volume plástico. Dessa forma, foi realizada uma análise de convergência para o valor do jacobiano plástico J_p e considerou-se, neste exemplo, 5 discretizações de tempo diferente: 300, 600, 1200, 2400 e 4800 passos. Os resultados dessa análise são mostrados na Figura 10a, em uma escala logarítmica na base 2. A inclinação da reta obtida é de 1.03526328855, indicando convergência de primeira ordem. Na prática, isso implica que o erro é reduzido pela metade à medida que o número de passos é dobrado.



(a) Análise de convergência para J_p

(b) Deslocamento vertical no ponto A

Figura 10. Resultados para o bloco parcialmente carregado

Na Figura 10b, apresenta-se o gráfico de deslocamentos verticais no ponto A para os casos de 300 e 4800 passos, onde não foram observadas diferenças significativas, mostrando que, para aplicações práticas, o erro na propriedade da conservação de volume pode ser desprezado. Na Figura 11, são mostradas as configurações deformadas para a análise de 4800 passos, com o valor da tensão de retorno vertical representada no mapa de cores.

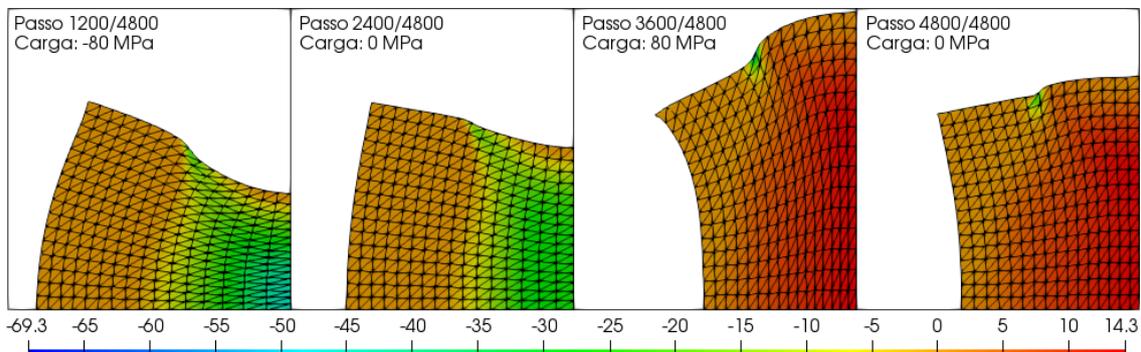


Figura 11. Configuração deformada e mapa de cores com valores de X_{22}

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro dado a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Armstrong, P. J., & Frederick, C., 1966. *A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect*. Central Electricity Generating Board [and] Berkeley Nuclear Laboratories, Research & Development Department Berkeley.
- Ayachit, U., 2015. *The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application*. Kitware, Inc.
- Bonet, J. et al., 2000. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n. 5, pp. 579 – 595.
- Coda, H., & Greco, M., 2004. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, n. 33, pp. 3541 – 3557.
- Coda, H. B., 2018. *O Método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas – não linearidade geométrica e dinâmica*. EESC/USP.
- Coda, H. B., & PACCOLA, R. R., 2009. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Dettmer, W., & Reese, S., 2004. On the theoretical and numerical modelling of armstrong-frederick kinematic hardening in the finite strain regime. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, n. 1, pp. 87 – 116.
- Eterovic, A. L., & Bathe, K. J., 1991. A note on the use of the additive decomposition of the strain tensor in finite deformation inelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 93, n. 1, pp. 31 – 38.



XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



Geuzaine, C., & Remacle, J.-F., 2009. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, pp. 1309 – 1331.

Kröner, E., 1960. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 4, n. 4, pp. 273–334.

Lee, E. H., 1969. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 36, n. 1, pp. 1–6.

Lührs, G., Hartmann, S., & Haupt, P., 1997. On the numerical treatment of finite deformations in elastoviscoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 144, n. 1, pp. 1–21.

Pascon, J., & Coda, H., 2013. Large deformation analysis of elastoplastic homogeneous materials via high order tetrahedral finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 76, pp. 21 – 38.

Svendsen, B., 1998. A thermodynamic formulation of finite-deformation elastoplasticity with hardening based on the concept of material isomorphism. *International Journal of Plasticity*, vol. 14, n. 6, pp. 473 – 488.

Vladimirov, I. N., Pietryga, M. P., & Reese, S., 2007. On the modelling of non-linear kinematic hardening at finite strains with application to springback – comparison of time integration algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 75, n. 1, pp. 1–28.

Williams, T., Kelley, C., & many others, 2013. *Gnuplot 4.6: an interactive plotting program*. <<http://gnuplot.sourceforge.net/>>.

Zienkiewicz, O., Taylor, R., & Fox, D., 2014. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Butterworth-Heinemann.