



MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO A PROBLEMAS DA MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Generalized Finite Element Method applied to Linear Elastic Fracture Mechanics Problems

Gabriela Marinho Fonseca (1); Humberto Alves da Silveira Monteiro (2); Larissa Novelli (3); Felício Bruzzi Barros (4); Roque Luiz da Silva Pitangueira (5)

- (1) Engenheira Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.(P)
 - (2) Engenheiro Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.
 - (3) Engenheira Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.
 - (4) Prof., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.
 - (5) Prof., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.
- Email para Correspondência: gmarinhfonseca@gmail.com; (P) Apresentadora

Resumo: O presente trabalho avalia a solução de problemas bidimensionais no contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica através do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Trata-se de um método numérico proposto como alternativa ao Método dos Elementos Finitos (MEF) tradicional, apresentando vantagens especialmente para o tratamento de problemas cuja solução não é suave. Para essa classe de problemas, o já consolidado MEF pode apresentar limitações, sendo necessário elevado grau de refinamento para representar o comportamento das grandezas físicas envolvidas. A abordagem do MEFG, que permite a inclusão de novas funções (previamente definidas ou numericamente obtidas) na aproximação numérica, torna-se capaz de obter respostas para modelos estruturais complexos, conforme comprovado em diversos exemplos da literatura. Busca-se, neste trabalho, descrever o comportamento de problemas bidimensionais com a presença de trincas – em análise linear elástica – através de diferentes estratégias de enriquecimento na análise do MEFG. São utilizadas funções enriquecedoras previamente definidas, a exemplo das funções polinomiais e funções de singularidade, e também funções numericamente obtidas através da solução de outro problema de valor de contorno (enriquecimento Global-Local aplicado ao MEFG). São propostas diferentes combinações de funções enriquecedoras para a avaliação dos resultados, buscando contribuir para as investigações recentes acerca da aplicação do MEFG na descrição de fenômenos localizados.

Palavras chaves: Método dos Elementos Finitos Generalizados; Enriquecimento Global-Local, Mecânica da Fratura.



Abstract: The present work evaluates the solution of two-dimensional Linear Elastic Fracture Mechanics problems using Generalized Finite Element Method (GFEM). GFEM is a numerical method proposed as an alternative to the traditional Finite Element Method (FEM), presenting advantages especially for the treatment of problems with non-smooth solutions. For these problems, the traditional FEM presents limitations, requiring a high degree of mesh refinement to represent the behavior of the physical quantities involved. The GFEM approach, which allows the inclusion of new functions (previously defined or numerically obtained) in the numerical approximation, is able to obtain answers to complex structural models, as verified in several examples in the literature. In this work, we describe the behavior of two-dimensional problems with the presence of cracks - in linear elastic analysis - through different enrichment strategies in the GFEM analysis. Pre-defined enrichment functions, such as polynomial functions and singularity functions, are used, as well as numerical functions obtained by solving another boundary value problem (Global-Local enrichment). Different combinations of enriching functions are proposed for the evaluation of the results, seeking to contribute to the recent investigations about the application of GFEM in the description of localized phenomena.

Keywords: *Generalized Finite Element Method; Global-Local Enrichment; Linear Elastic Fracture Mechanics.*

1 INTRODUÇÃO

Diversos problemas de engenharia podem ser descritos através de modelos matemáticos nos quais variáveis de campo sofrem mudanças rápidas ao longo de pequenas escalas do domínio. Na modelagem desses fenômenos, a solução numérica resultante tradicionalmente envolve descontinuidades, singularidades ou gradientes elevados. No caso da Mecânica dos Sólidos, são encontrados exemplos de tais soluções em problemas com a presença de trincas, orifícios ou inclusões no domínio.

Para o tratamento de problemas cuja solução não é suave, o tradicional Método dos Elementos Finitos (MEF) pode apresentar limitações. Isso ocorre em virtude do uso de espaços polinomiais para a construção da aproximação numérica, que exige um processo oneroso de geração da malha para capturar as singularidades das grandezas envolvidas. Torna-se necessário, dessa forma, o desenvolvimento de estratégias numéricas alternativas que utilizem abordagens mais adequadas para essa classe de problemas.

Nesse contexto, o Método dos Elementos Finitos Generalizados – MEFG (Strouboulis et al., 2000) constitui uma alternativa ao MEF convencional, uma vez que define a aproximação com certa liberdade em relação à malha de elementos finitos (Barros, 2002). O MEFG pode ser considerado um produto das formulações de métodos sem malha dos anos 90 (Alves, 2012), distinguindo-se destes ao utilizar as funções de forma



do MEF na definição da Partição da Unidade (PU). A aproximação é construída sobre uma malha de elementos finitos, valendo-se da grande estrutura computacional já desenvolvida para a forma convencional do MEF. Na estratégia denominada enriquecimento, as funções de PU são multiplicadas por funções aproximadoras previamente determinadas (funções enriquecedoras), com o objetivo de representar o comportamento esperado do problema analisado.

Na aproximação do MEF^G, o uso de funções enriquecedoras previamente definidas permite a obtenção de respostas para modelos estruturais complexos. Entretanto, o refinamento excessivo da malha ainda se faz necessário quando existem fenômenos concentrados em pequenas regiões do domínio, como no caso de problemas tratados pela Mecânica da Fratura. Com o objetivo de tratar essa dificuldade, Duarte e Kim (2008) propuseram o Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local – identificado neste texto como MEF^{G-L}. Tal abordagem explora a flexibilidade do enriquecimento do MEF^G com o emprego de funções enriquecedoras construídas em cada posição de interesse a partir de soluções geradas em subregiões previamente definidas. A solução de um problema através do MEF^{G-L} é dividida em três etapas, sendo a primeira realizada com uma discretização grosseira de todo o domínio. Na segunda etapa, um problema local, abrangendo apenas a região que envolve o fenômeno localizado, é resolvido utilizando como condições de contorno a solução da primeira etapa. A resposta numérica deste problema local é então introduzida na forma de enriquecimento na terceira etapa da análise, buscando representar adequadamente o comportamento físico do problema desejado.

O presente trabalho se insere no contexto do MEF^{G-L}, propondo sua utilização na modelagem de problemas com a presença de trincas no meio material. São analisados exemplos contemplados pela Mecânica da Fratura Linear Elástica, buscando confirmar a adequação da estratégia Global-Local para a solução de problemas que envolvem diferentes escalas de análise. A implementação computacional foi desenvolvida no sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Enviroment*), um projeto de software livre implementado em linguagem Java e desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

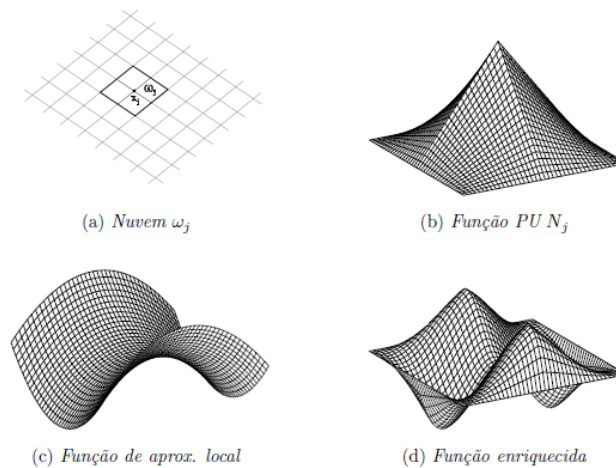
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados - MEF^G

Segundo Barros (2002), o MEF^G pode ser considerado uma formulação não-convencional do MEF. Sua estratégia consiste no uso das funções de forma do MEF como funções de Partição da Unidade (PU), que multiplicadas por funções enriquecedoras definem as funções de forma do MEF^G. É importante ressaltar que o MEF^G e o XFEM (*eXtended Finite Element Method*), proposto em paralelo por Belytschko e Black (1999) são atualmente entendidos como métodos equivalentes, conforme consta em Belytschko et al. (2009).

A estratégia de construção das funções de forma do MEFG é ilustrada na Figura 1, referente à aproximação de um domínio bidimensional. O termo nuvem (ω_j , na Figura 1(a)), representa no MEFG o conjunto de elementos finitos que compartilham o mesmo ponto nodal x_j . A Partição da Unidade é definida pelas funções de forma do MEF convencional - a exemplo das funções de Lagrange lineares (representadas por N_j na Figura 1(b)). Tais funções formam a base de uma PU, pois, em qualquer posição do domínio:

$$\sum_{j=1}^n N_j = 1 \quad (1)$$



**Figura 1 - Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j .
Barros (2002)**

O conjunto I_j de funções enriquecedoras (representadas na Figura 1(c)) é composto por q_j funções linearmente independentes definidas para cada nó x_j com suporte na nuvem ω_j , conforme mostra a Eq. (2):

$$I_j \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ 1, L_{j1}(x), L_{j2}(x) \dots, L_{jq_j}(x) \right\} \quad (2)$$

A princípio podem ser utilizadas quaisquer funções enriquecedoras, sendo definidas, por exemplo, a partir de um conhecimento antecipado do comportamento do problema analisado. A grande vantagem da estratégia do MEFG consiste em sua capacidade de utilizar funções enriquecedoras não-polinomiais e, em especial, funções resultantes da solução de um problema de valor de contorno local (Duarte e Kim, 2008).

Utilizando as funções de forma definidas pelo produto entre as Eq. (1) e (2), constrói-se a aproximação genérica do MEFG através da seguinte combinação linear:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) \left(\mathbf{u}_j + \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(x) b_{ji} \right) \quad (3)$$

na qual u_j e b_{ji} são parâmetros nodais associados a cada componente $N_j(x)$ do MEF e $N_j(x)L_{ji}(x)$ do MEFG, respectivamente.

2.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local (MEFG^{G-L})

Conforme já mencionado, a abordagem do MEFG^{G-L} é particularmente atraente para a solução de problemas que demandam dois ou mais níveis de discretização, devido à existência de um fenômeno localizado em uma pequena região do domínio. Além disso, o conhecimento antecipado de funções enriquecedoras, previamente definidas na abordagem clássica do MEFG, é restrito a uma pequena gama de problemas relevantes de engenharia (Gupta et al., 2012). Nesse contexto, Duarte e Kim (2008) propuseram o MEFG^{G-L}, que combina o clássico conceito do Método dos Elementos Finitos Global-Local (Noor, 1986) com o MEFG.

A solução de um problema através do MEFG^{G-L} baseia-se nas seguintes etapas:

- Inicialmente é obtida a solução do problema global, utilizando uma discretização grosseira para todo o domínio, sem a descrição do fenômeno gerador dos gradientes localizados.
- Define-se um problema local, abrangendo a região na qual tais gradientes ocorrem, utilizando como condições de contorno a solução do problema global inicial (em termos de tensões e/ou deslocamentos). No domínio local é utilizada uma malha mais refinada para representar mais precisamente o fenômeno desejado.
- A solução numérica local é utilizada em uma nova análise do modelo global, com o objetivo de obter a resposta final do problema. Nesta etapa, o enriquecimento dos nós do problema global é feito com funções enriquecedoras $L_{ji}(x)$ obtidas da solução do problema local.

A seguir, são apresentadas as formulações das três etapas da solução de um problema através do MEFG^{G-L} segundo em Duarte e Kim (2008) e Kim et al. (2010). As equações foram adaptadas de seu formato original para representar a abordagem implementada no sistema INSANE.

2.2.1 Problema Global Inicial

Seja o domínio $\bar{\Omega}_G = \Omega_G \cup \partial\Omega_G$ em R^n , cujo contorno é dividido em $\partial\Omega_G = \partial\Omega_G^u \cup \partial\Omega_G^\sigma$ com $\partial\Omega_G^u \cap \partial\Omega_G^\sigma = \emptyset$. Os índices u e σ indicam as regiões onde são aplicadas as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, segundo as Eq. (4) e (5):

$$\mathbf{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega_G^u \text{ (homogênea por simplificação)} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ em } \partial\Omega_G^\sigma \quad (5)$$

sendo \mathbf{u} o vetor de deslocamentos, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões, \mathbf{n} o vetor unitário normal para $\partial\Omega_G^\sigma$ e $\bar{\mathbf{t}}$ o vetor das tensões de superfície prescritas.

A solução aproximada do problema global inicial é dada por $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$ na Eq. (6), tanto em análise via MEF quanto em análise via MEFG (caso sejam utilizadas funções enriquecedoras no problema global inicial):

$$\boxed{\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_G^0 \in \tilde{\chi}_G^0(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G) \forall \mathbf{v}_G^0 \in \tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)}$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_G^0) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_G^0 ds \quad (6)$$

na qual $\tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)$ é a discretização de $H^1(\Omega_G)$, um espaço de Hilbert definido em Ω_G construído com as funções de forma do método utilizado (MEF ou MEFG) e que atende às condições de contorno homogêneas de Dirichlet (conforme a Eq. (4)).

2.2.2 Problema Local

Seja Ω_L um subdomínio de Ω_G correspondente ao domínio local, definido de modo a conter o fenômeno singular de interesse. O seguinte problema é resolvido após a obtenção da solução global $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$:

$$\boxed{\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_L \in \chi_L(\Omega_L) \subset H^1(\Omega_L) \forall \mathbf{v}_L \in \chi_L(\Omega_L)}$$

$$\int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L) d\mathbf{x} + \kappa \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{u}}_L \cdot \mathbf{v}_L d\mathbf{x} \\ = \kappa \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \bar{\mathbf{t}} \mathbf{v}_L ds + \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} (\bar{\mathbf{t}}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) + \kappa \tilde{\mathbf{u}}_G^0) \cdot \mathbf{v}_L ds \quad (7)$$

em que $\chi_L(\Omega_L)$ é a discretização de $H^1(\Omega_L)$, um espaço de Hilbert definido em Ω_L construído com as funções de forma do MEFG.

A transferência das condições de contorno do problema global inicial para o problema local é controlada pelo parâmetro κ , cujo valor assumido pode produzir a transferência apenas de forças ($\kappa = 0$), deslocamentos ($\kappa \gg 1$), ou forças e deslocamentos (valores intermediários para κ) – correspondendo às condições de contorno de Neumann, Dirichlet e Cauchy, respectivamente.

2.2.3 Problema Global Enriquecido

Nesta última etapa, a solução $\tilde{\mathbf{u}}_L$ obtida do problema local é utilizada como enriquecimento em uma nova análise do problema global, buscando a resposta final para o problema analisado. A solução do problema global enriquecido, $\tilde{\mathbf{u}}_G^E$, é obtida através da Eq.(8):

$$\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_G^E \in \tilde{\chi}_G^E(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G) \forall \mathbf{v}_G^E \in \tilde{\chi}_G^E(\Omega_G)$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^E) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_G^E) dx = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_G^E ds \quad (8)$$

na qual $\tilde{\chi}_G^E(\Omega_G)$ é o espaço $\tilde{\chi}_G^0(\Omega_G)$ aumentado com as funções de enriquecimento global-local.

2.2.4 Ciclos Global-Local

Conforme Ohara et al. (2009), a solução do problema global inicial ($\tilde{\mathbf{u}}_G^0$) pode apresentar erros significativos em problemas contendo gradientes localizados, mesmo em regiões do domínio distantes do fenômeno singular. Desse modo, o problema local torna-se sujeito a condições de contorno deficientes e o erro associado à sua solução deixa de ser controlado apenas pelo refinamento da malha ou pelos enriquecimentos nodais adotados. Para resolver esse entrave, os autores propõe a realização de ciclos adicionais, nos quais a solução do problema global enriquecido ($\tilde{\mathbf{u}}_G^E$) é utilizada como condição de contorno para o problema local e, em seguida, o processo segue a mesma sequência tradicional da análise Global-Local.

Trabalhos como Kim et al. (2011), Gupta et al. (2012) e Malekan (2017) confirmam a eficiência da estratégia de ciclos para diversos modelos, incluindo problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica. De acordo com Malekan (2017), o uso de 3 ciclos é suficiente para a correção das condições de contorno e obtenção de resultados satisfatórios - com base na experiência do autor.

A implementação proposta neste trabalho inclui a utilização de ciclos Global-Local como melhoramento das condições de contorno transferidas ao problema local. Mais detalhes são apresentados no Item 4.

3 ESTRATÉGIA DE ENRIQUECIMENTO PARA A REPRESENTAÇÃO DE TRINCAS

Utilizando a estratégia do MEEG, a representação de fissuras no meio material pode ser feita através de uma abordagem cinemática, na qual a inclusão de descontinuidades no modelo é feita sem a necessidade de alterações na geometria ou nível de refinamento da malha. Trincas podem ser descritas, desse modo, utilizando combinações de funções enriquecedoras capazes de reproduzir o seu comportamento no contexto da aproximação numérica.



O presente trabalho utiliza o esquema de enriquecimento adotado por Malekan (2017), no qual a descontinuidade no campo de deslocamentos é representada através da forma clássica da função de Heaviside (Eq. (9)):

$$H(x) = \begin{cases} 1, \forall \xi > 0 \\ 0, \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (9)$$

na qual ξ representa a posição da descontinuidade assumida em $\xi = 0$.

Já a singularidade do campo de tensões nas proximidades da ponta da trinca é descrita pela solução exata em deslocamentos apresentada em Szabó e Babuska (1991), que, para o caso de Modo I de abertura, correspondem a:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2G} r^{\lambda_1} \{[\kappa - Q_1(\lambda_1 + 1)] \cos \lambda_1 \theta - \lambda_1 \cos(\lambda_1 - 2)\theta\} \\ u_y &= \frac{1}{2G} r^{\lambda_1} \{[\kappa + Q_1(\lambda_1 + 1)] \sin \lambda_1 \theta + \lambda_1 \sin(\lambda_1 - 2)\theta\} \end{aligned} \quad (10)$$

sendo:

- G o módulo de elasticidade transversal;
- $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ para Estado Plano de Tensões e $(3 - 4\nu)$ para Estado Plano de Deformações;
- $Q_1 = 0,333$ e $\lambda_1 = 0,5$ constantes determinadas para o problema com a presença da trinca;
- r e θ coordenadas polares definidas com origem na ponta da trinca, com o ângulo θ medido no sentido anti-horário.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de validar a implementação proposta para a solução de modelos com a presença de trincas, são apresentados nesta seção dois exemplos de problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica. Os resultados são apresentados em termos do Fator de Intensidade de Tensão, parâmetro que representa as condições de solicitação ao redor da ponta da trinca e depende do tamanho da mesma, tensão atuante e geometria do problema.

Nos dois modelos apresentados, a solução é obtida através do MEF^{G-L}, sendo a trinca representada apenas no problema local através do esquema de enriquecimento descrito no Item 3. Desse modo, é possível extrair soluções a partir de um modelo global com discretização grosseira, sendo o comportamento singular capturado pelo enriquecimento

global-local. Uma vez que, para problemas bidimensionais, tal enriquecimento adiciona apenas dois graus de liberdade a cada nó global enriquecido, o problema global final é resolvido com número total de graus de liberdade reduzido (independentemente do nível de refinamento adotado para o problema local).

Valendo-se da solução através do MEF^{G-L}, Fatores de Intensidade de Tensão (K_I e K_{II}) foram calculados no modelo local (onde a trinca é representada), utilizando o método energético da Integral de Interação, já implementado no sistema INSANE. Mais detalhes a respeito da implementação deste método podem ser encontrados em Malekan (2017). Para os dois exemplos apresentados, o raio da região adotada para o cálculo da Integral de Interação equivale ao dobro do diâmetro do elemento que contém a ponta da trinca.

4.1 Chapa Tracionada em Modo I de Abertura

Neste exemplo é analisada uma chapa tracionada com a presença de uma trinca de borda, conforme mostra a Figura 2. A existência da trinca induz à singularidade do campo de tensões nas proximidades da ponta, comportamento este que se deseja representar através do MEF^{G-L}. O problema é analisado considerando Estado Plano de Tensões e material com $E = 1,0$ e $\nu = 0,3$ (em unidades consistentes).

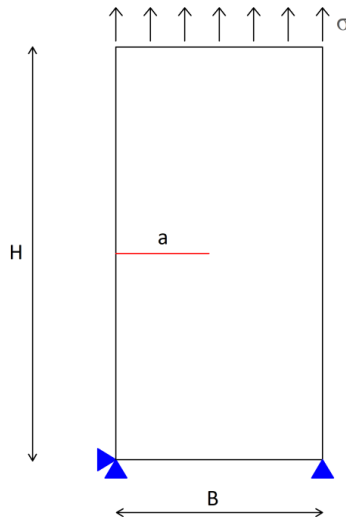


Figura 2 - Geometria da chapa tracionada com uma trinca de borda. Os parâmetros utilizados são $H = 20$, $B = 10$, $\sigma = 1$ e $a = 4,5$ (em unidades consistentes).

A Figura 3 ilustra as malhas adotadas para os problemas global e local. A malha global é composta por 78 elementos quadrilaterais de 4 nós, com dimensão máxima de 1,66, sendo, portanto, uma discretização incapaz de descrever os gradientes localizados. A malha local, por sua vez, é definida em tempo de processamento de modo a envolver somente a região que contém a trinca, sendo composta por um total de 108 elementos quadrilaterais de 4 nós, com dimensão máxima de 0,55. Os elementos locais são obtidos a partir da subdivisão de arestas dos elementos globais, configurando uma malha

refinada o bastante para a representação da trinca através da estratégia de enriquecimento descrita no Item 3. É adotado também um enriquecimento polinomial de grau 1 (aproximação quadrática) para todos os nós de ambos os modelos, buscando melhorar a descrição da parcela suave da solução.

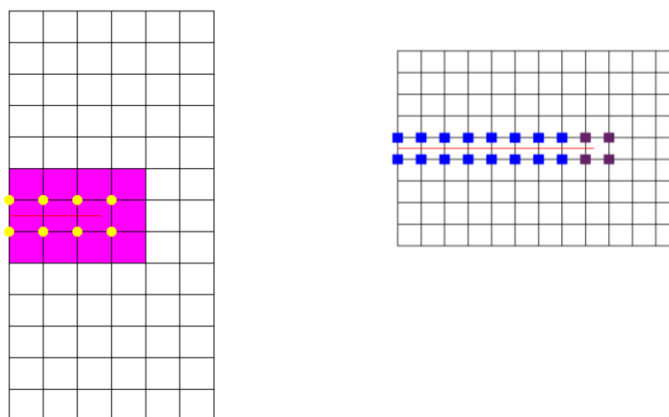


Figura 3 - Malha do problema global (à esquerda) e do problema local (à direita). A região do problema local é representada no domínio global pela cor magenta e em amarelo são indicados os nós globais enriquecidos com a solução local. À direita, são mostrados em azul os nós locais enriquecidos com a função de Heaviside (Eq. (9)) e em roxo os nós enriquecidos com as funções de singularidade (Eq. (10)) para a trinca de tamanho $a = 4,5$.

No que diz respeito à integração numérica, são adotados 4×4 pontos de Gauss em todos os elementos do modelo global. O mesmo ocorre no modelo local, com exceção dos elementos cortados pela trinca. Nesses elementos, adotam-se 10×10 pontos de Gauss com o objetivo de descrever de maneira mais adequada o comportamento das funções descontínuas e singulares usadas na representação da trinca. Para a solução do problema global enriquecido, elementos locais são utilizados como células de integração, conforme proposto por Duarte e Kim (2008). Foram utilizadas condições de contorno de Dirichlet, adotando o fator κ da Eq. (8) igual a 1×10^{10} .

Para a geometria da Figura 2, Tada et al. (2000) apresentam a seguinte solução empírica para K_I , com precisão de 0,5% para $a/B < 0,6$:

$$K_I = F(a/B)\sigma\sqrt{\pi a} \tag{11}$$

na qual o parâmetro F é dado por:

$$F(a/B) = 1,112 - 0,231(a/B) + 10,550(a/B)^2 - 21,710(a/B)^3 + 30,382(a/B)^4 \tag{12}$$

A Tabela 1 mostra os resultados obtidos para K_I e K_{II} e o erro em relação à solução empírica dada pela Eq. (11). Com o objetivo de verificar a influência das condições de contorno transferidas ao problema local, foi adotada a estratégia de ciclos Global-Local descrita no Item 2.2.4, conforme indicado na tabela.

Tabela 1 - Resultados obtidos para os Fatores de Intensidade de Tensão considerando ciclos Global-Local.

	1 ciclo	2 ciclos	3 ciclos
K_I	1.4542	8.8525	9.0479
K_{II}	8.49E-09	-2.04E-03	-2.97E-03
Erro (K_I)	84.01%	2.68%	0.54%

Os resultados encontrados mostram que a estratégia de ciclos Global-Local impacta significativamente na resposta obtida para o problema, em virtude da melhor descrição das condições de contorno advindas do problema global. Observa-se que a solução utilizando apenas 1 ciclo não é capaz de representar adequadamente o comportamento esperado, apresentando erro bastante elevado. Isso se deve ao fato de que, no primeiro ciclo, as condições de contorno transferidas ao problema local contêm apenas a descrição da tração pura imposta ao modelo. A partir do segundo ciclo, o enriquecimento Global-Local leva a representação da trinca ao modelo global, que passa a reproduzir o comportamento esperado para o problema.

A precisão dos valores de K_I obtidos com o uso de 2 e 3 ciclos demonstra a eficiência da abordagem do MEFG^{G-L} proposta neste trabalho, comprovando a capacidade da mesma em extrair Fatores de Intensidade de Tensão na condição de Modo I de abertura. Os resultados de K_{II} , conforme o esperado, foram próximos de zero devido à inexistência de tensão cisalhante no problema.

4.2 Chapa Tracionada em Modo Misto de Abertura

A Figura 4 apresenta a geometria analisada neste exemplo, que corresponde a uma chapa tracionada com a presença de uma trinca inclinada em seu centro (proposta por Moes et al. (1999)). A inclinação da trinca induz o surgimento do mecanismo de Modo II de abertura, configurando um problema de sollicitação em modo misto. A análise foi feita considerando Estado Plano de Tensões com as mesmas propriedades materiais, esquema de integração numérica e transferência de condições de contorno do Exemplo 4.1.

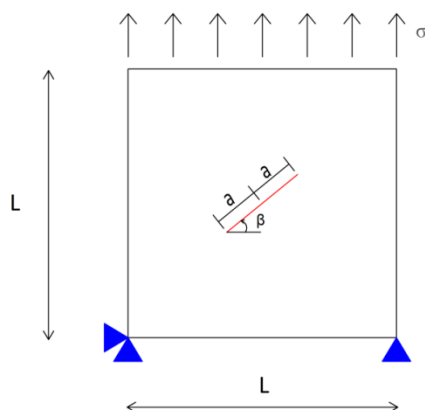


Figura 4 - Geometria da chapa tracionada com uma trinca inclinada em seu centro. Os parâmetros utilizados são $L = 10$, $\sigma = 1$ e $a = 0,5$ (em unidades consistentes).

Conforme sugerido por Moes et al. (1999), o tamanho reduzido da trinca em relação às dimensões da chapa permite o uso da solução analítica para o modelo de chapa infinita. Neste caso, a solução analítica da Mecânica da Fratura é dada pelas Eq. (13) e (14), segundo o mesmo autor:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cos^2(\beta) \quad (13)$$

$$K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a} \sin(\beta)\cos(\beta) \quad (14)$$

sendo β o ângulo de inclinação da trinca em relação à horizontal.

Para a análise via MEF^{G-L}, a Figura 5 ilustra as malhas adotadas para os problemas global e local considerando o ângulo $\beta = 30^\circ$. A malha global é composta por 81 elementos quadrilaterais de 4 nós com dimensão máxima de 1,11, sendo, novamente, uma discretização incapaz de descrever a trinca no meio material. Já o modelo local, definido automaticamente de forma a englobar a trinca no centro do problema, é formado por 81 elementos quadrilaterais de 4 nós com dimensão máxima de 0,37. Assim como no Exemplo 4.1, foi adotado o enriquecimento polinomial de grau 1 em todos os nós de ambos os modelos.

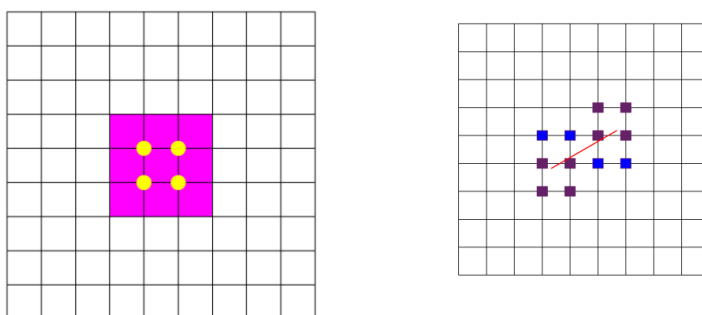


Figura 5 - Malha do problema global (à esquerda) e do problema local (à direita). A região do problema local é representada no domínio global pela cor magenta e em amarelo são indicados os nós globais enriquecidos com a solução local. À direita, são mostrados em azul os nós locais enriquecidos com a função de Heaviside (Eq. (9)) e em roxo os nós enriquecidos com as funções de singularidade (Eq. (10)) para a trinca de tamanho $a = 0,5$ e ângulo $\beta = 30^\circ$.

Na Tabela 2 são apresentados os resultados obtidos para K_I e K_{II} , considerando a geometria da Figura 5 para $\beta = 30^\circ$. A tabela exhibe também os erros calculados em relação à solução analítica das Eq. (13) e (14).

Tabela 2 – Valores obtidos para os Fatores de Intensidade de Tensão, considerando $\beta = 30^\circ$.

	1 ciclo	2 ciclos	3 ciclos
K_I	0.8310	0.9471	0.9488
K_{II}	0.5066	0.5503	0.5489
Erro (K_I)	11.60%	-0.76%	-0.93%
Erro (K_{II})	6.65%	-1.40%	-1.14%

Os resultados obtidos reafirmam as conclusões do Exemplo 4.1 e comprovam a habilidade estratégica do MEF^{G-L} em extrair Fatores de Intensidade de Tensão para o caso de modo misto de abertura. Os erros em relação à solução analítica diminuem com o aumento do número de ciclos, conforme o esperado, exceto para o valor de K_I avaliado com 3 ciclos. Tal resultado consiste em uma oscilação numérica e não invalida as conclusões já mencionadas.

A Figura 6 apresenta valores encontrados para os Fatores de Intensidade de Tensão considerando uma faixa de valores para o ângulo β (variando entre 0 e 90°). Os valores extraídos do modelo (obtidos através de 2 ciclos Global-Local) são confrontados com as curvas correspondentes à solução analítica.

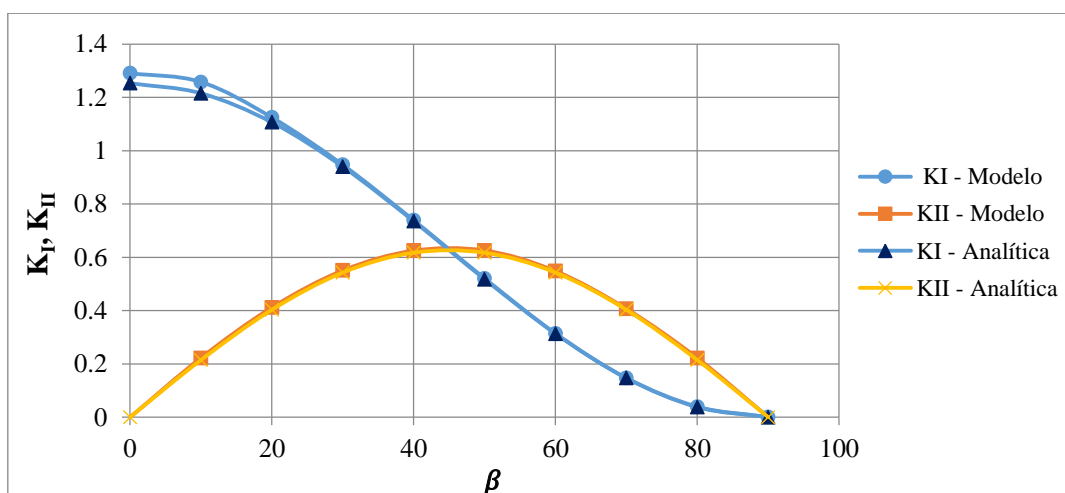


Figura 6 – Fatores de Intensidade de Tensão para uma faixa de valores do ângulo β .

As curvas obtidas exibem ótima concordância com os valores exatos, ratificando a eficácia da implementação proposta neste trabalho. Conforme o esperado, os valores de K_I diminuem com o aumento do ângulo β , à medida que a tensão normal torna-se menos significativa no problema. Já os resultados de K_{II} crescem até o ângulo $\beta = 45^\circ$, valor no qual a tensão cisalhante é máxima, retornando ao valor nulo quando $\beta = 90^\circ$.

5 CONCLUSÕES

O presente artigo apresentou uma proposta de aplicação do MEF^{G-L} na análise de problemas com a presença de trincas, dentro do contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica. A estratégia implementada consiste na representação da trinca somente no modelo local, sendo a malha global mantida com refinamento grosseiro. As respostas obtidas em termos dos Fatores de Intensidade de Tensão foram bastante satisfatórias e comprovaram a aplicabilidade da implementação realizada para representação de fenômenos singulares localizados.



Além dos bons resultados encontrados para os Fatores de Intensidade de Tensão – grandeza essencial para o estudo da Mecânica da Fratura – foram confirmadas tendências já observadas em outros trabalhos da literatura a respeito das condições de contorno advindas do problema global. A estratégia de ciclos Global-Local mostrou-se essencial para a convergência dos resultados, contribuindo significativamente para a diminuição dos erros em relação às soluções de referência. As conclusões aqui obtidas reforçam, portanto, a indicação de uso da abordagem do MEF^{G-L} como ferramenta relevante para a análise de problemas com a presença de singularidades.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) – bolsa de mestrado e projeto 308932/20161, pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) – projeto APQ-02460-16 e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

REFERÊNCIAS

ALVES, P. D. Estratégia Global-Local Aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Maio 2012.

BABUSKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special Finite Element Methods for a Class of Second Order Elliptic Problems with Rough Coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, n. 4, p. 945–981, 1994. ISSN 0036-1429.

BARROS, F. B. Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. Tese (Doutorado) — EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil, 2002.

BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 45, n. 5, p. 601–620, 1999. ISSN 0029-5981.

BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/ generalized finite element methods for material modeling. 2009.

DUARTE, C. A.; KIM, D. J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, n. 6-8, p. 487–504, 2008. ISSN 00457825.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. Hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problem. [S.l.], May 1995. Technical Report.

GUPTA, V.; KIM, D. J.; DUARTE, C. A. Analysis and improvements of global-local enrichments for the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 245-246, p. 47–62, 2012. ISSN 00457825.



- GUPTA, V.; KIM, D.J.; DUARTE, C. A. Analysis and improvements of global–local enrichments for the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 245-246, p. 47–62, 2012.
- KIM, D. J.; PEREIRA, J. P.; DUARTE, C. A ; SOBH, N. A. Parallel Simulations of Three-dimensional Cracks Using the Generalized Finite Element Method. *Computational Mechanics*, 47(3), p. 265–282, 2010.
- KIM, D. J.; PEREIRA, J. P.; DUARTE, C. A. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 81, n. 3, p. 335–365, 2010. ISSN 00295981.
- MALEKAN, M. Crack Propagation Modeling in Plane Structures Using Two-Scale Generalized/Extended Finite Element Method. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Agosto 2017.
- MOES, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 46:131, 1999
- NOOR, A. K. Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 2, p. 333–346, 1986.
- OHARA, P.; DUARTE, C. A.; EASON, T. Generalized Finite Element Analysis of Three-Dimensional Heat Transfer Problems exhibiting Sharp Thermal Gradients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 1857-1871, 2009.
- STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, n. 1, p. 43–69, 2000. ISSN 00457825.
- SZABO, B.; BABUSKA, I. Finite Element Analysis. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- TADA H, PARIS PC, IRWIN GR .The Stress Analysis of Cracks Handbook, 3rd edn, 2000. ASME Press 78, 79