

## MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS: UM ESTUDO DA APLICAÇÃO EM PROBLEMAS DE FRATURA ELÁSTICA 3D

### Generalized Finite Element Method: A Study about the Application to Elastic Fracture 3D models

Karla Fernanda dos Santos (1)(P); Felício Bruzzi Barros (2)

(1) Engenheira Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.

(2) Prof. Dr., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.

E-mail para Correspondência: karlaf@ufmg.br; (P) Apresentador

**Resumo:** O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) foi consolidado no campo científico como uma ferramenta muito útil na resolução de modelos estruturais complexos usando uma abordagem aproximada efetiva para representar a existência de trincas e outros microdefeitos. Trata-se de uma formulação não-convencional do Método dos Elementos Finitos (MEF), na medida em que há a expansão do campo de soluções a partir da utilização de funções de enriquecimento associadas aos nós. As funções de enriquecimento podem ser funções singulares derivadas de deduções analíticas, funções polinomiais ou mesmo funções resultantes de outros processos de solução, como a estratégia Global-Local. O INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) é uma plataforma computacional em desenvolvimento do Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e tem como objetivo analisar estruturas de interesse da engenharia. Em sua atual versão, é capaz de resolver problemas através de diversos modelos de análise de qualquer dimensão utilizando o MEFG. Este trabalho apresenta a expansão do sistema para contemplar a possibilidade de utilizar diferentes funções de enriquecimento em modelos tridimensionais, como, por exemplo, aquelas obtidas com a abordagem da técnica Global-Local. Os exemplos numéricos da Mecânica de Fratura Elástica Linear são apresentados para validar a implementação proposta. Assim, demonstra-se a eficiência da análise de modelos tridimensionais que desenvolvem campos de tensões contendo singularidades utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados, aliados à técnica Global-Local, e sugere-se, então, que esta metodologia seja aplicada a modelos com configurações ainda mais complexas do ponto de vista espacial.

**Palavras chaves:** *Método dos Elementos Finitos; Método da Partição da Unidade; Método dos Elementos Finitos Generalizados; Global-Local; INSANE.*

**Abstract:** The Generalized Finite Element Method (GFEM) was consolidated in the scientific field as a very useful tool in the resolution of complex structural models using an effective approximate approach to represent the existence of cracks and other micro-defects. This is a non-conventional formulation of the Finite Element Method (FEM), in that there is an expansion of the solution space from the use of enrichment functions associated with the nodes. The enrichment functions can be singular functions derived from analytic deductions, polynomial functions, or even functions resulting from other solution processes, such as the Global-Local strategy. The INSANE (INteractive Structural



ANalysis Environment) is a computational platform of the Department of Structural Engineering (DEES) of the Federal University of Minas Gerais (UFMG) and aims to analyze structures of engineering interest. In its current version, it is able to solve problems through several analysis models of any dimension using GFEM. This work proposes the expansion of the system to consider the possibility of using different enrichment functions in three-dimensional models, such as those obtained under the Global-Local technique approach. Numerical examples from the Linear Elastic Fracture Mechanics are presented to validate the proposed implementation. Thus, it is demonstrated the efficiency of the analysis of three-dimensional models that present stress fields containing singularities using the Generalized Finite Element Method, allied to the Global-Local technique, and it is therefore suggested that this methodology be applied to models with even more complex configurations from the spatial point of view.

**Keywords:** *Finite Element Method; Partition of the Unit Method; Generalized Finite Element Method; Global-Local; INSANE.*

## 1 INTRODUÇÃO

De acordo com Fish e Belytschko (2007), muitos fenômenos da engenharia como, por exemplo, da engenharia de estruturas em geral, podem ser descritos em termos de equações diferenciais parciais. Para modelos mais simples, soluções analíticas podem ser facilmente encontradas. A maior parte, porém, dos problemas de interesse são compostos por geometrias altamente complexas o que inviabiliza a busca pela solução analítica via soluções das equações diferenciais do modelo.

O método dos Elementos Finitos (MEF) é uma estratégia para solução aproximada, geralmente numérica, muito utilizada nos casos complexos descritos anteriormente, pois o modelo é dividido em elementos e neles as equações diferenciais parciais são resolvidas de forma aproximada descrevendo a solução total do sistema. Do ponto de vista da engenharia, essa ferramenta pode ser utilizada para resolver problemas de análise de tensão-deformação, transferência de calor, escoamento de fluido, propagação de trincas e várias outras simulações computacionais (Fish e Belytschko, 2007).

Uma alternativa ao MEF, que pode ser considerada uma formulação não-convencional do mesmo, é o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), (Strouboulis et al., 2000), que trata a presença de singularidades no campo de tensões, não pelo refinamento da malha, mas sim pelo enriquecimento da função de forma associadas aos nós que estão próximos a essas singularidades com funções previamente conhecidas. Cria-se, então, um novo espaço de solução enriquecido a partir de uma base de funções ou um conjunto de soluções particulares conhecidas *a priori*, reduzindo os custos computacionais envolvidos no processo.

De acordo com Fonseca (2008), o Sistema INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), é um software que tem o objetivo de ser capaz de resolver diversos modelos via aproximações numéricas. É um programa concebido para ser dinâmico, possibilitando, portanto, várias expansões e está aberto para que com pequenas modificações novos métodos sejam agregados ao seu arcabouço numérico. Na presente versão



do sistema INSANE, o Método dos Elementos Finitos Generalizados foi implementado para diversos modelos de análise e quaisquer dimensões segundo Alves et al. (2013). A expansão do sistema INSANE para a realização de análises considerando-se a estratégia global-local, conforme Kim et al. (2010), foi contemplada também por Alves et al. (2013). Esta implementação, contudo, encontra-se limitada a problemas bidimensionais.

Propõe-se, no presente trabalho, apresentar uma nova expansão do sistema INSANE, generalizando-o, de tal forma, que problemas tridimensionais da Mecânica da Fratura Linear Elástica possam ser analisados adequadamente pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados. A expansão foi realizada através da generalização no que se refere à dimensão do problema analisado, da estratégia Global-Local para a obtenção de funções resultantes da solução numérica de um ou mais problemas locais, e enriquecedoras da aproximação do problema. Pela própria forma como o sistema foi concebido, foi possível aproveitar a estrutura existente e com modificações pontuais e mapeáveis alcançar o resultado desejado.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados foi o recurso de solução escolhido para resolver os modelos tridimensionais abordados nesse trabalho. Nas seções que se seguem ele será contextualizado, conceituado e formulado. Ele foi escolhido devido a sua flexibilidade e acurácia, que possibilita tratar modelos complexos utilizando menos recursos computacionais.

### 2.1 Conceitos Gerais

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) utiliza funções do tipo Partição da Unidade para gerar o espaço de solução enriquecido pelo produto com outras funções definidas de acordo com o tipo de problema analisado (Duarte et al., 2000).

No MEFG, a depender da característica do problema, funções devidamente escolhidas, polinomiais ou não, multiplicam as funções de Partição da Unidade, aumentando a base de aproximação de elementos finitos já existente, expandindo o espaço de solução (Strouboulis et al., 2000). As funções de Partição da Unidade, discutidas na próxima seção, tipicamente utilizadas são as próprias funções de forma do MEF, de modo a facilitar a integração numérica e conseguir recuperar a imposição direta das condições de contorno do modelo.

### 2.2 Formulação do MEFG

A formulação do MEFG baseia-se no conceito da Partição da Unidade (PU). Uma definição rigorosa para estas funções pode ser encontrada em Oden e Reddy (2011). No contexto do MEFG, esta definição é flexibilizada e são utilizadas funções de Lagrange lineares, representadas por  $N_j(x)$  associadas a cada nó, que somam a unidade, para o problema com  $n$  pontos nodais:

$$\sum_{j=1}^n N_j(x) = 1 \quad (1)$$

Segundo Alves (2012), um conjunto de funções de enriquecimento local,  $L_{ji}(x)$ , que são específicas para cada problema a ser analisado, é composta por  $q_j$  funções linearmente independentes para cada nó  $x_j$ , com suporte na nuvem de elementos  $\omega_j$ :

$$\{L_{ji}(x)\}_{i=1}^{q_j} = \{L_{j1}(x), L_{j2}(x), \dots, L_{jq_j}(x)\}, \quad \text{com } L_{j1}(x) = 1 \quad (2)$$

O conjunto de funções de enriquecimento local multiplica a PU a fim de criar o conjunto de funções enriquecidas,  $\varphi_{ji}(x)$  (Alves, 2012):

$$\{\varphi_{ji}(x)\}_{i=1}^{q_j} = N_j(x) \times \{L_{ji}(x)\}_{i=1}^{q_j} \quad (3)$$

sem somatório em  $j$ .

Com base na formulação apresentada, uma aproximação genérica  $\tilde{u}(x)$  é obtida através da combinação linear das funções de forma:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) \{u_j + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(x) b_{ji}\} \quad (4)$$

onde  $u_j$  e  $b_{ji}$  são parâmetros nodais associados com cada componente  $N_j(x)$  do MEF e  $N_j(x) \cdot L_{ji}(x)$  do MEFG, respectivamente.

Devido à forma como o enriquecimento é realizado, ou seja, de maneira independente em cada elemento, mesmo se os tipos de enriquecimentos forem diferentes entre os elementos da malha constrói-se uma aproximação “sem costura”. Isso significa que não há a necessidade de se estabelecer condições de restrição que garantam a continuidade entre os campos aproximadores de cada elemento (Duarte et al., 2000).

### 3 TÉCNICA GLOBAL-LOCAL

A técnica Global-Local será utilizada como forma de enriquecimento dos modelos abordados, dentro do MEFG. Portanto, ela será conceituada e formulada nas seções que se seguem.

#### 3.1 Conceitos Gerais

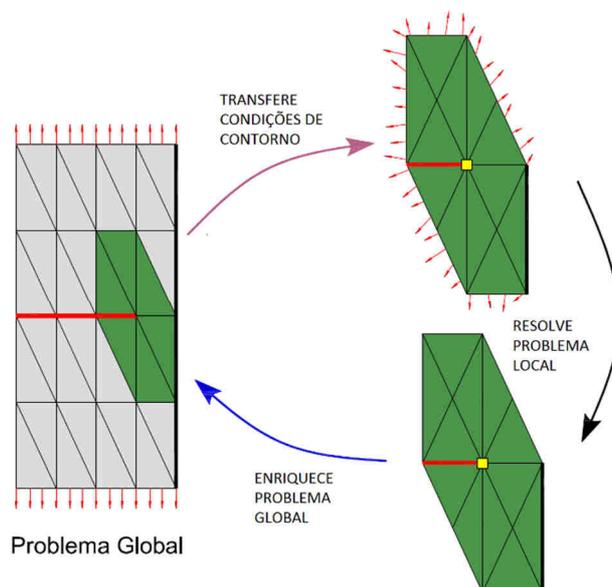
As funções de enriquecimento utilizadas no MEFG podem ser quaisquer, tais como uma função polinomial, uma função representando uma singularidade, ou até mesmo uma função advinda de um outro processo de solução resolvido *a priori*, como por exemplo a técnica Global-Local, proposta por Duarte e Kim (2008) quando aliada ao MEFG. A técnica Global-Local é muito utilizada nos casos em que há fenômenos geradores de concentração de tensão nos modelos analisados.

Segundo Duarte e Kim (2008), a eficácia do MEFG está intimamente ligada a escolha das funções de enriquecimento mais adequadas para determinado problema. Dentro desse contexto, é proposto o MEFG acrescido da técnica Global-Local, no qual uma função de enriquecimento personalizada é criada a partir da análise local das regiões de concentração de tensões do problema e essa é utilizada dentro da análise via MEFG do problema completo. Trata-se de um recurso importante, porque muitas vezes funções de enriquecimento polinomiais e singulares

não são capazes de descrever de maneira satisfatória o comportamento de determinadas estruturas ou particularidades das mesmas.

A técnica Global-Local consiste em realizar três etapas distintas e complementares. Na primeira etapa soluciona-se um problema denominado “global”. Trata-se, preferencialmente, de um problema com malha de discretização grosseira que compreende todo o domínio do modelo e, geralmente, não são descritos os fenômenos geradores das concentrações de tensões, ou seja, nenhuma singularidade precisa ser descrita, via enriquecimento, nessa etapa. Em seguida, na segunda etapa, define-se o problema denominado “local” que abrange a região onde se estima que vão ocorrer as concentrações de tensão. Refina-se a malha dessa região e aplicam-se como condições de contorno os deslocamentos e/ou tensões calculadas no problema “global” neste problema “local” que, nesta etapa, é resolvido em separado. Por fim, na última etapa, a solução numérica “local” pode ser utilizada para enriquecer o domínio “global” com o objetivo de realizar uma análise final do problema (Alves, 2012).

A Figura 1 mostra, resumidamente, as etapas da estratégia Global-Local. Nota-se ainda na Figura 1, que deve ser transmitida a solução do problema global como condições de contorno para o domínio local. Estas condições de contorno podem ser de Neumann (apenas tensões), Dirichlet (apenas deslocamentos) ou Cauchy (deslocamentos e tensões). A transmissão pode ser feita via método da penalidade e diversos estudos foram realizados a fim de se chegar à conclusão de qual a melhor forma de transmitir essas condições de contorno, tais como em Kim et al. (2010) e Alves (2012).



**Figura 1. Estratégia Global Local (Adaptada)**

**Fonte: (Alves, 2012)**

Para reduzir erros advindos da utilização da solução de um problema Global com malha grosseira, a imposição das condições de contorno para o problema Local, utilizando a técnica Global-Local pode ser feito de forma iterativa. Assim, na primeira iteração, o modelo local será analisado considerando-se as condições de contorno retiradas do problema global com

aproximação grosseira. Depois de obtida a solução do problema global enriquecido, esse agora servirá de base para a descrição de novas condições de contorno e o problema Local será reprocessado e assim o problema global será novamente solucionado com esse novo enriquecimento. Pode-se impor uma tolerância a ser alcançada determinando o fim do processo iterativo. Em geral, poucas iterações no processo Global-Local são necessárias até se alcançar a convergência de resultados, em Gupta (2012) é possível observar que em média duas iterações são suficientes.

## 3.2 Formulação da Técnica Global-Local

A formulação dos três problemas que envolvem a técnica Global-Local, ainda que semelhantes, apresenta particularidades que merecem ser destacadas e que facilitam o entendimento de cada uma das etapas de resolução do problema, isoladamente. Por isso, trata-se nessa seção as formulações do problema Global, Local e Global Enriquecido separadamente.

### 3.2.1 Problema Global

Para a solução do problema global, via MEF<sub>G</sub> considera-se o problema de elasticidade bidimensional, cujo contorno do domínio global é decomposto em  $\partial\Omega_G = \partial\Omega_G^u \cup \partial\Omega_G^\sigma$  com  $\partial\Omega_G^u \cap \partial\Omega_G^\sigma = \emptyset$ , sendo  $u$  e  $\sigma$  referentes às regiões em que as condições de contorno de Dirichlet e Neumann são, respectivamente, aplicadas. A Figura 2 apresenta esses contornos, para um modelo hipotético, que mostra uma chapa, que em seu centro há uma trinca horizontal e está submetida a uma força distribuída em parte do domínio  $\Omega_G^\sigma$  e, também, há uma restrição em seu lado direito, ou seja, no domínio  $\Omega_G^u$ .

Considerando-se ausentes as forças de corpo, as equações de equilíbrio para o problema global, em tensões, são representadas como:

$$\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega_G \quad (5)$$

Na Eq. (5), as relações constitutivas são dadas pela lei de Hooke generalizadas, uma vez que se considera material elástico-linear. Assim, o tensor de tensões:

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon \quad (6)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o tensor de Hooke e  $\varepsilon$  é o tensor de deformações.

Conforme Figura 2, as condições de contorno são prescritas em  $\partial\Omega_G$ :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \partial\Omega_G^u \quad (7)$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \partial\Omega_G^\sigma \quad (8)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal para  $\partial\Omega_G^\sigma$  e  $\bar{\mathbf{t}}$  e  $\bar{\mathbf{u}}$  são, respectivamente, carregamentos e deslocamentos prescritos.

Além das condições de contorno descritas nas Eq. (7) e Eq. (8) utiliza-se a solução  $u$  aproximada por  $u_G^0$  através da Eq. (4), chega-se assim na solução para o problema Global:

$\text{Encontre } \mathbf{u}_G^0 \in \chi_G^0(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \quad \forall \mathbf{v}_G^0 \in \chi_G^0(\Omega_G)$ $\int_{\Omega_G} \sigma(\mathbf{u}_G^0) : \varepsilon(\mathbf{v}_G^0) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_G^0 dS \quad (9)$
---

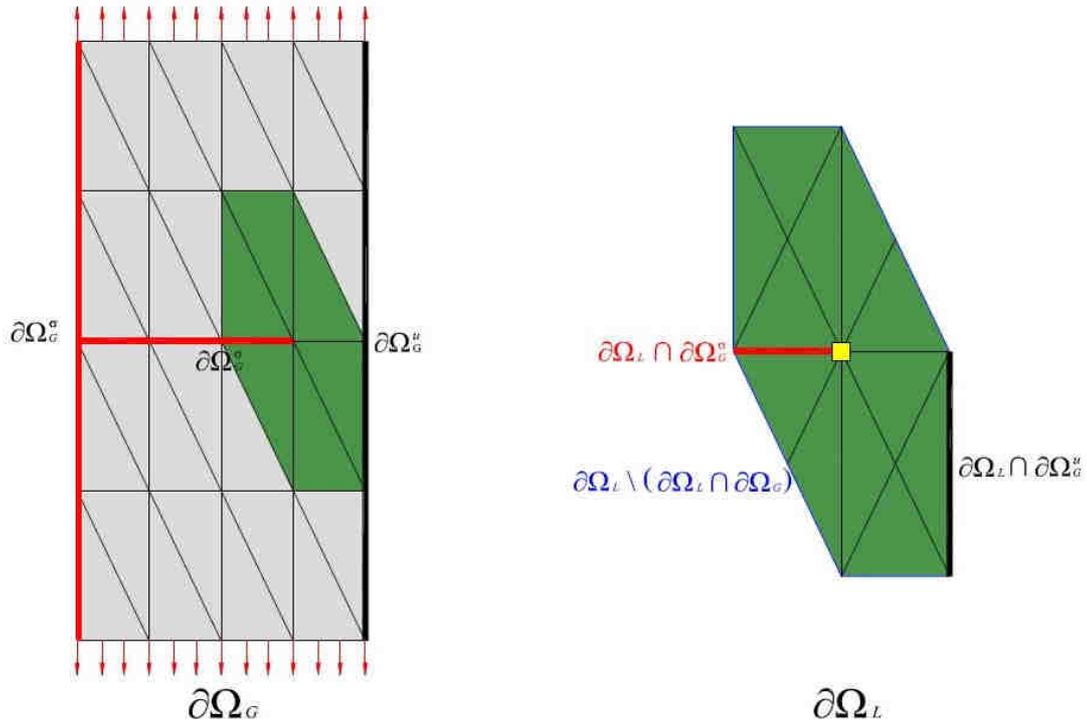


Figura 2. Domínios Global e Local de um problema genérico com os respectivos contornos

Fonte: (Alves, 2012)

Na Eq. (9), à esquerda da igualdade está o trabalho das forças internas e à direita o das forças externas. Tem-se que  $\chi_G^0(\Omega_G)$  é a discretização de  $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$ , um espaço de Hilbert de ordem 1 definido em  $\Omega_G$ , construído pelo método discreto utilizado (MEF ou MEFM). Os símbolos  $\varepsilon, \sigma$  correspondem aos tensores que representam o campo de deformações e do campo de tensões, respectivamente. Além disso, é importante ressaltar que embora a Figura 2 ilustre um exemplo bidimensional, a equação aqui apresentada é para modelos tridimensionais uma vez que a integral e  $dS$  percorre toda a superfície do contorno em questão.

### 3.2.2 Problema Local

Considera-se, inicialmente, o subdomínio Local  $\Omega_L$  que está contido no domínio Global  $\Omega_G$ . O problema Local é resolvido no domínio  $\Omega_L$  depois que a primeira etapa global foi resolvida e se dispõe da solução global inicial  $u_G^0$ . Nesta segunda etapa, busca-se a solução do problema local  $u_L$ , dada pela Eq. (4). Os contornos do domínio Local são compreendidos pelos domínios:  $\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^u$ ,  $\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^\sigma$  e  $\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)$ , a Figura 2 ilustra esses contornos.

Acrescentando as grandezas oriundas do problema Global a formulação do problema Local, segue:

$$\begin{aligned} & \text{Encontre } \mathbf{u}_L \in \chi_L(\Omega_L) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_L) \quad \forall \mathbf{v}_L \in \chi_L(\Omega_L) \\ & \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L) dx + \kappa \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \mathbf{u}_L \cdot \mathbf{v}_L dS = \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^u} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_L dS + \\ & \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} (\mathbf{t}(\mathbf{u}_G^0) + \kappa \mathbf{u}_G^0) \cdot \mathbf{v}_L dS \end{aligned} \quad (10)$$

Na Eq. (10), à esquerda da igualdade está o trabalho das forças internas e à direita o das forças externas, adicionados às parcelas referentes ao método de penalidade. Tem-se que  $\chi_L(\Omega_L)$  é a discretização de  $\mathcal{H}^1(\Omega_L)$ , um espaço de Hilbert de ordem 1 definido em  $\Omega_L$ , construído pelo método discreto utilizado (MEF ou MEFG). Já  $L$  refere-se aos parâmetros Locais e  $G$  aos parâmetros Globais e  $\kappa$  é o parâmetro de Cauchy.

Para a formulação do problema Local, segundo Kim et al. (2010), define-se que tipo de condições de contorno serão transmitidas do problema Global para o Problema Local. Conforme mencionado anteriormente podem ser transmitidos três tipos de condições de contorno: de Neumann (apenas tensões,  $\kappa=0$ ), Dirichlet (apenas deslocamentos  $\kappa \gg 1$ ) ou Cauchy (deslocamentos e tensões, valor intermediário para  $\kappa$ ).

### 3.2.3 Problema Global Enriquecido

De posse da solução  $u_L$ , retorna-se ao problema global a fim de utilizar essa solução como enriquecimento da PU deste mesmo problema global e assim obter a sua solução  $u_G^E$ .

Substituindo a solução  $u$  por  $u_G^E$ , na Eq. (4):

$\text{Encontre } \mathbf{u}_G^E \in \chi_G^E(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \quad \forall v_G^E \in \chi_G^E(\Omega_G)$ $\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G^E) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_G^E) dx = \int_{\partial\Omega_G^t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_G^E dS \quad (11)$
---

Tem-se que  $\chi_G^E(\Omega_G)$  é a discretização de  $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$ , um espaço de Hilbert de ordem 1 definido em  $\Omega_G$ , construído, neste caso, pelas funções de aproximação originais do problema global, acrescidas daquelas enriquecidas com a solução do problema local.

## 4 PLATAFORMA COMPUTACIONAL

O INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) é um sistema computacional em desenvolvimento do Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), implementado em linguagem de programação JAVA e que utiliza o paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO) (Fonseca, 2008). O INSANE foi expandido no trabalho de Alves (2012) para permitir análises pelo MEFG e considerando a abordagem Global-Local. Ainda que concebida de forma genérica, a expansão realizada por Alves (2012) ficou restrita aos modelos de análise de barras unidimensionais, de estado plano de tensão e de deformação e tridimensionais. O enriquecimento com funções advindas do uso da técnica Global-Local, foram validados apenas para os problemas de estado plano de tensão e de deformação. Coube ao presente trabalho, conforme detalhado a seguir, a generalização e validação do MEFG utilizando funções de aproximação local da estratégia Global-Local para modelos tridimensionais.

O INSANE pode ser dividido em três aplicações, pré-processador, processador e pós-processador. O primeiro e o último são responsáveis, respectivamente, pelas entradas e saídas de dados do programa, via interface-gráfica e arquivo, ou seja, fazem a interação homem-máquina. Já o processador é a parte do programa responsável pela resolução dos modelos já que representa o núcleo numérico do sistema para os diversos métodos de resolução, como, por exemplo, o próprio MEFG.

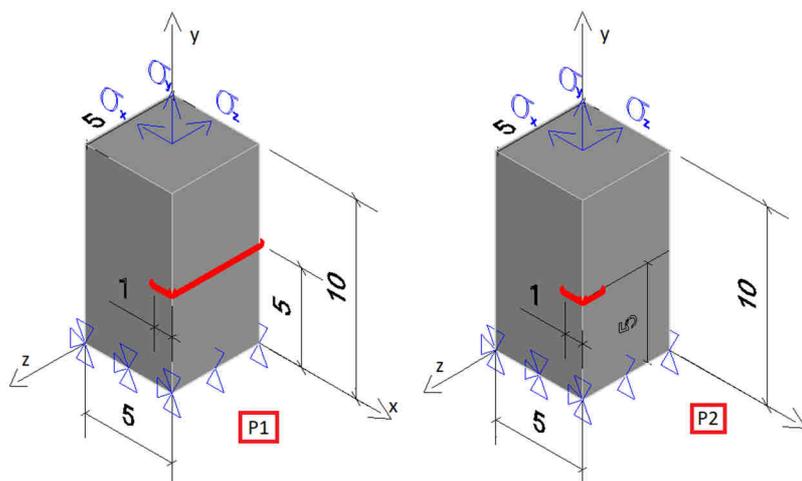
Uma classe abstrata importante para esse trabalho é a *EnrichmentType*. A referida classe reúne, de forma geral, os métodos necessários para realizar o enriquecimento das funções de forma via MEFM, independentemente do tipo de função de enriquecimento local utilizada. Nela é possível chamar métodos que retornam as funções de enriquecimento multiplicadoras da PU e suas derivadas nas três direções. Um desses tipos de enriquecimentos, possível de ser utilizado, é o Global-Local, obtido através da classe *GlobalLocalEnrichment* que estende de *EnrichmentType*.

A ampliação realizada no sistema INSANE se refere a possibilidade de utilização da técnica Global-Local em modelos tridimensionais. Algumas alterações e acréscimos foram implementados para viabilizar essa funcionalidade.

## 5 ANÁLISE DE MODELOS ESTRUTURAIS VIA MEFM E TÉCNICA GLOBAL-LOCAL

### 5.1 Problemas Abordados

Com a finalidade de validar as implementações no sistema INSANE, dois problemas tridimensionais foram sugeridos. Trata-se de dois blocos idênticos, que diferem apenas da trinca que cada um contém. O primeiro problema foi nomeado “P1” e o segundo “P2”, a Figura 3 os ilustram.



**Figura 3 - Problemas Abordados P1 e P2**

Ainda na Figura 3, P1, considera-se um bloco de dimensões (10.00 x 5.00 x 5.00), com uma pré-trinca de dimensões (1.00 x 5.00). Ele está completamente restringido na face inferior, tendo, portanto, todos os deslocamentos nesta face impedidos. O material possui módulo de elasticidade (E) igual a 1000 e módulo de Poisson ( $\nu$ ) igual a 0.3. Mostra-se, ainda, os eixos cartesianos, “x”, “y” e “z” adotados, cuja origem encontra-se na face inferior do bloco, no canto anterior esquerdo. Seguindo essa convenção, foi abordada uma solicitação na face superior do bloco, com a aplicação de tensão de 1.00 no sentido positivo de “y” (1), aqui denominada

“Tração em y”. As mesmas considerações aplicam-se ao P2, com exceção da pré-trinca que tem dimensões de (1.00 x 1.00).

Todos os dados apresentados ao longo desse capítulo estão em unidades consistentes (u.c.) e, da mesma forma, os resultados, sendo omitidas, então, as unidades ao longo do texto.

## 5.2 Modelagem dos Problemas Abordados

Como resultado de referência para os problemas P1 e P2, foi utilizado o software ANSYS®, modelando-os com uma malha bastante refinada.

Foram utilizados três tipos de malhas globais. A primeira, nomeada MG1, mostrada na Figura 4 contém 250 elementos finitos hexaédricos e os nós que demarcam a abertura da trinca estão duplicados. A superfície de trinca coincide com a face de alguns elementos da malha. A segunda, nomeada MG2, é muito semelhante a MG1, tendo como única diferença o fato de que não há nós duplicados, e, portanto, nenhuma trinca é descrita nessa malha. A terceira, nomeada MG3, também representada na Figura 4, é muito semelhante a MG1 tendo como única diferença o fato de que um único nó de canto, que demarca a abertura da trinca, está duplicado. Apenas na MG1 e na MG3, a superfície de trinca é descrita geometricamente nas referidas malhas e coincide com as faces dos elementos. Na malha MG2 a descrição da trinca é realizada por meio das funções de enriquecimento obtidas da solução do problema local (Seção 3.2.2), sendo que a trinca tem coincidência com as faces dos elementos.

Foram realizadas duas iterações no procedimento da técnica Global-Local, e apresentam-se nesse trabalho as resoluções da segunda iteração, pois somente até esta iteração, os resultados sofrem variações significativas. Transferiu-se condições de contorno de Dirichlet (apenas deslocamentos) e o parâmetro  $\kappa$  utilizado foi de 1.25E10.

Com a MG1 e a MG3 foram construídos os modelos, neste trabalho denominados, sem enriquecimento, para P1 e P2, respectivamente. Tratam-se de modelos que apenas contêm a discretização geométrica da trinca, sem nenhum tipo de enriquecimento via funções oriundas da técnica Global-Local. Para cada um dos problemas P1 e P2 foram obtidas as energias de deformação do modelo e nas seções pertinentes esses valores são apresentados como comparativo para os modelos enriquecidos via técnica Global-Local.

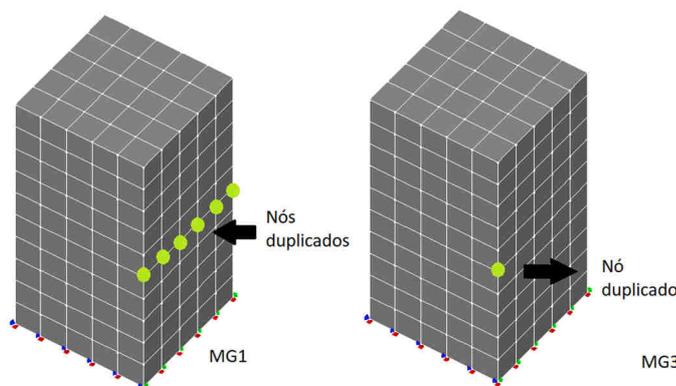


Figura 4. MG1 - Malhas Globais de 250 elementos com 6 e 1 nós que descrevem a trinca duplicados, MG1 e MG3, respectivamente

Todos os domínios locais utilizados têm tamanho de (3.00 x 4.00 x 5.00) e se situam entre as coordenadas “x” 2.00 e 5.00, as coordenadas “y” 3.00 e 7.00 e as coordenadas “z” 0.00 e 5.00.

Cinco tipos de malhas regulares locais foram utilizados, em situações diferentes, para discretizar o domínio Local. Essas malhas são denominadas ML1, ML2, ML3, ML4 e ML5, sendo que cada uma delas contém, respectivamente, 480, 3840, 7500, 15360 e 24000 elementos locais. Os elementos locais de cada uma delas possui dimensões (0.500 x 0.500 x 0.500), (0.250 x 0.250 x 0.250), (0.200 x 0.200 x 0.200), (0.125 x 0.125 x 0.250) e (0.100 x 0.100 x 0.250), também respectivamente, sendo que as faces que contém a trinca, para cada um dos problemas P1 e P2, de acordo com a Figura 3, possuem seus nós duplicados.

Foram calculados os valores da diferença relativa percentual dos modelos analisados, com relação à solução de referência,  $E_r(\%)$ :

$$E_r(\%) = 100 \cdot \frac{|(\bullet)_r - (\bullet)_h|}{|(\bullet)_r|} \tag{12}$$

onde  $(\bullet)_h$  é a grandeza aproximada pelo MEFG e  $(\bullet)_r$  a grandeza da solução de referência.

### 5.3 P1 - Trinca Coincidente com as Faces dos Elementos Globais

Foi utilizado o software ANSYS® para criar o modelo de referência para o P1. Assim, utilizou-se uma malha de 112382 elementos finitos tetraédricos quadráticos (10 nós), concentrados na vizinhança da frente da superfície de trinca.

Nessa seção foi utilizada a malha global MG2. Trata-se de uma modelagem analisada via MEFG com técnica Global-Local. Para tanto foram variadas as malhas locais, de ML1 a ML5, de maneira a observar a influência do refinamento da malha local no resultado do modelo. Além disso, duas quantidades de nós enriquecidos via Global-Local foram estudados, a Figura 5 mostra o posicionamento e a quantidade desses nós, a saber, 6 e 54 nós, próximos à frente de trinca. A configuração de 6 nós enriquecidos, diz respeito àqueles que estão na frente de trinca, já a de 54 nós são todos os nós, compreendidos no domínio local.

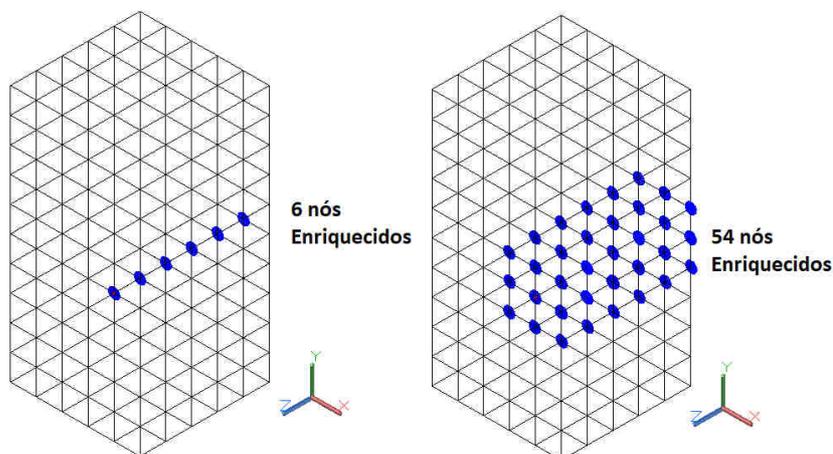


Figura 5. Desenho esquemático dos nós a serem enriquecidos do modelo

### 5.3.1 Bloco Tractionado em y

Nesta etapa é considerada a modelagem com a carga de tração de 1 em “y”.

O resultado de referência encontrado no software ANSYS® para a energia de deformação foi de 0.134346027. A componente de tensão de referência  $\sigma_{yy}$ , encontrada próxima à frente de trinca, na coordenada (3.9995, 5.0000, 0.0000) foi de 5.427. Já a abertura da trinca, em  $x=5$  e  $z=0$  entre  $y=4.999$  e  $y=5.001$ , no modelo de referência foi de 6.89E-03.

Os valores de energia de deformação, tensão  $\sigma_{yy}$  e abertura de trinca para cada uma das análises descritas nessa seção foram reunidos na Tabela 1, respectivamente.

**Tabela 1. MEFG<sup>GL</sup>: P1 com trinca coincidente com as faces dos elementos Globais: Energia de deformação,  $\sigma_{yy}$  e Abertura de Trinca - Tração y-**

Tipo de Modelagem	Energia	Diferença Energia (%)	$\sigma_{yy}$	Diferença $\sigma_{yy}$ (%)	Abertura	Diferença Abertura (%)
Referência	0.134346		5.427		6.89E-03	
S/ Enriquecimento	0.129206	3.83				
6 nós enriquecidos - ML1	0.124098	7.63	2.335	56.97	1.00E-05	99.85
54 nós enriquecidos - ML1	0.130325	2.99	2.830	47.85	5.41E-03	21.43
6 nós enriquecidos - ML2	0.124322	7.46	2.695	50.34	0.00E+00	100.00
54 nós enriquecidos - ML2	0.131401	2.19	3.495	35.60	5.95E-03	13.59
6 nós enriquecidos - ML3	0.124376	7.42	2.845	47.58	0.00E+00	100.00
54 nós enriquecidos - ML3	0.131648	2.01	3.765	30.62	6.04E-03	12.29
6 nós enriquecidos - ML4	0.124463	7.36	3.350	38.27	0.00E+00	100.00
54 nós enriquecidos - ML4	0.132038	1.72	4.710	13.21	6.20E-03	9.96
6 nós enriquecidos - ML5	0.124494	7.33	3.615	33.39	0.00E+00	100.00
54 nós enriquecidos - ML5	0.132174	1.62	5.205	4.09	6.25E-03	9.24

Na Tabela 1, os resultados mostram que, ao enriquecer mais nós, sobretudo circundando toda a trinca, menor é a diferença na energia, em  $\sigma_{yy}$  e na abertura da trinca, calculados, quando comparados à referência. Percebe-se que a solução converge com o refinamento da malha local, apresentando uma taxa maior para o caso de 54 nós enriquecidos. O modelo global inicial não consegue descrever a descontinuidade dos deslocamentos. Isso ocorre, pois os nós ao longo da superfície de trinca não são duplicados no modelo global. Assim, apenas quando um número maior de nós são enriquecidos, de tal forma que o suporte de suas funções de PU contenham toda a superfície de trinca (que é o caso dos 54 nós enriquecidos) é que a abertura da trinca de fato pode ser descrita no modelo.

### 5.4 P2- Trinca Coincidente com as Faces dos Elementos Globais

Foi utilizado o software ANSYS® para criar o modelo de referência para o P2. Assim, utilizou-se uma malha de 130877 elementos finitos tetraédricos quadráticos (10 nós), concentrados na vizinhança da frente da superfície de trinca.

Nessa seção foi utilizada a malha global MG2. Trata-se de uma modelagem analisada via MEFG com técnica Global-Local. Para tanto foram variadas as malhas locais de maneira a observar a influência do refinamento da malha local no resultado do modelo. Além disso, duas

quantidades de nós enriquecidos via Global-Local foram estudados, a Figura 6 mostra o posicionamento e a quantidade desses nós, a saber, 4 e 27 nós, próximos à frente de trinca. A configuração de 4 nós enriquecidos, diz respeito àqueles que estão no contorno da superfície de trinca, já a de 27 nós, são todos os nós, compreendidos uma camada a mais em cada direção do contorno da trinca, ou seja, são os nós pertencentes aos elementos que definem a superfície de trinca.

Os modelos foram analisados com as malhas locais, ML1, ML2, ML3 e ML4. Não foi possível modelar o problema local com a malha ML5 devido a problemas de instabilidade numérica no algoritmo implementado no INSANE.

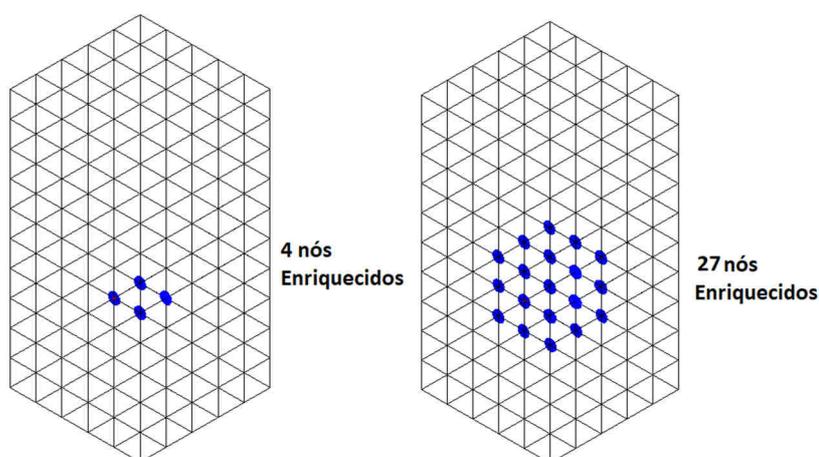


Figura 6. Desenho esquemático dos nós a serem enriquecidos do modelo

### 5.4.1 Bloco Tracionado em y

Nesta etapa é considerada a modelagem com a carga de tração de 1 em “y”.

O resultado de referência encontrado no software ANSYS® para a energia de deformação foi de 0.124143513. A componente de tensão de referência  $\sigma_{yy}$  encontrada próxima à frente de trinca, na coordenada (3.9995, 5.0000, 5.0000) foi de 4.878. Já a abertura da trinca, em  $x=5$  e  $z=5$  entre  $y=4.999$  e  $y=5.001$ , no modelo de referência foi de 3.95E-03.

Os valores de energia de deformação, tensão  $\sigma_{yy}$  e abertura de trinca para cada uma das análises descritas nessa seção foram reunidos nas Tabela 2, respectivamente.

Na Tabela 2, os resultados mostram que, ao enriquecer mais nós, menor é a diferença na energia e na abertura da trinca, calculados, quando comparados à referência, porém os resultados mostram que ao enriquecer mais nós maior é a diferença em  $\sigma_{yy}$ , contrariando as expectativas. Esse fenômeno é observado apenas e excepcionalmente nesta e exclusivamente para o caso da tensão. Ainda que inesperado, deve ser destacado que a diferença entre as soluções com 4 e 27 nós enriquecidos tende a se reduzir à medida que a malha local é refinada. Isso é um indicativo da tendência favorável ao grau de refinamento empregado.

**Tabela 2. MEFG<sup>GL</sup>: P2 com trinca coincidente com as faces dos elementos Globais: Energia de deformação - Tração y-**

Tipo de Modelagem	Energia	Diferença Energia (%)	$\sigma_{yy}$	Diferença $\sigma_{yy}$ (%)	Abertura	Diferença Abertura (%)
Referência	0.124144		4.878		3.95E-03	
S/ Enriquecimento	0.123112	0.83				
4 nós enriquecidos - ML1	0.123108	0.83	2.310	52.64	3.07E-03	22.20
24 nós enriquecidos - ML1	0.123192	0.77	2.145	56.03	3.04E-03	22.96
4 nós enriquecidos - ML2	0.123227	0.74	2.880	40.96	3.41E-03	13.58
27 nós enriquecidos - ML2	0.123323	0.66	2.735	43.93	3.44E-03	12.82
4 nós enriquecidos - ML3	0.123254	0.72	3.090	36.65	3.45E-03	12.57
27 nós enriquecidos - ML3	0.123352	0.64	2.960	39.32	3.49E-03	11.56
4 nós enriquecidos - ML4	0.123268	0.71	3.685	24.46	3.47E-03	12.06
27 nós enriquecidos - ML4	0.123369	0.62	3.645	25.28	3.52E-03	10.80

## 6 CONCLUSÃO

O MEFG vem se mostrando uma ferramenta poderosa para a modelagem de problemas estruturais com a presença de concentração de tensões e de descontinuidades no campo de deslocamentos, como é o caso da análise de meios com a presença de trincas. Simulações via MEFG, graças à técnica de enriquecimento da aproximação, são capazes de reproduzir os fenômenos inerentes a estes problemas, de forma mais adequada do que o MEF para uma mesma malha de elementos. Torna-se possível descrever a concentração de tensões na vizinhança da frente de trinca e a descontinuidade no campo de deslocamentos, em malhas grosseiras e sem a necessidade de se fazer a duplicação dos nós ao longo da superfície de trinca.

A técnica Global-Local, utilizada para a obtenção de uma função de aproximação personalizada para o modelo, dentro da abordagem do MEFG, mostrou-se, de fato, uma estratégia muito interessante para modelos tridimensionais. Nas análises realizadas nas Seções 5.3.1 e 5.4.1, foram registrados bons resultados em termos de convergência para a solução de referência, tanto em termos de energia de deformação quanto de tensão  $\sigma_{yy}$  e abertura de trinca.

Foi observado, de uma maneira geral, que quanto maior a região enriquecida com a solução local, mais a solução de energia de deformação, tensão  $\sigma_{yy}$  e abertura de trinca convergem para a solução de referência à medida que se refina a malha local. É importante, contudo, selecionar adequadamente quais os nós cujas funções de PU serão enriquecidas, para que não sejam introduzidos erros numéricos ao sistema.

O refinamento da malha local não onera computacionalmente a solução do modelo global, pois é independente deste não demandando a compatibilização entre elementos de tamanhos diferentes. Para melhor capturar o gradiente elevado do campo de deslocamentos na região da frente de trinca, estas malhas devem acompanhar o gradiente com a redução drástica no tamanho dos elementos. Torna-se, portanto, necessário o emprego de um gerador de malhas não uniformes para domínios tridimensionais.

Concluindo, sugere-se também para trabalhos futuros a implementação de geradores de superfícies de trinca para automatizar sua inclusão no modelo local. A definição do problema



local e sua discretização também precisam ser estabelecidos independentemente do usuário para possibilitar análises mais complexas. Feito isso, sugere-se que o solucionador, no INSANE, da propagação de trincas, seja generalizado para descrever a propagação de uma superfície de trinca em um domínio tridimensional.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro em forma de fomento à pesquisa concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (grant 308932/2016-1) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) (pela bolsa de mestrado, projeto APQ-02460-16 e financiamento da participação).

## REFERÊNCIAS

- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Alves, P. D., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L. S., 2013. An object-oriented approach to the generalized finite element method. *Advances in Engineering Software*, vol. 59, pp. 1-18.
- Duarte, C. A., Babuška, I. e Oden, J. T., 2000. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, vol. 77, pp. 215-232.
- Duarte, C. A. e Kim, D.-J., 2008. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 197, pp. 487-504.
- Fish, J. e Belytschko, T., 2007. *A First Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons, Inc., West Sussex, England.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Gupta, V., Kim, D.-J. e Duarte, C. A., 2012. Analysis and improvements of global-local enrichments for the generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 245-246, pp. 47-62.
- Kim, D.-J., Pereira, J. P. e Duarte, C. A., 2010. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized fem meshes. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 81, pp.335-365.
- Oden, J. T. e Reddy, J. N., 2011. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Finite Element Method*. Dover.
- Strouboulis, T., Babuška, I. e Copps, K., 2000. The design and analysis of the generalized finite element method'. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 181, pp. 43-69.