ANÁLISE GEOMÉTRICA DE SIMETRIAS E SINGULARIDADES DA RELATIVIDADE GERAL

RIBEIRO, Camila Cunha[1]; **CABRAL,** Luis Antônio[2]

RESUMO

A pesquisa atual na área de gravitação tem se concentrado em compreender, por meio de cálculos análiticos, o comportamento do Buraco Negro de Schwarzschild, chegando nas equações de campo de Einstein. A Teoria da Relatividade Geral desempenha um papel importante nesse contexto, pois descreve a curvatura do espaço-tempo e a trajetória de partículas, chamadas de geodésicas, utilizando o Tensor de Riemann e contraindo o Tensor de Ricci. Este tensor é crucial para entender como a massa e a energia influenciam a geometria do espaço-tempo. Além disso, a pesquisa faz uso de métodos computacionais para comparar os resultados obtidos analiticamente, permitindo uma análise mais ampla dos cálculos analiticos.

Palavras-chaves: Buraco Negro de Schwarzschild. Métodos computacionais. Tensor de Riemann.

INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

Segundo (Misner; Thorne; Wheeler, 1973) na relatividade geral, o uso de coordenadas pode tornar o significado físico de certas quantidades difícil de interpretar. Porém, em alguns casos, como no ponto central de um sistema inercial local ou nas coordenadas de Schwarzschild para sistemas esféricos, a interpretação é mais direta. Ao analisar uma nova métrica, deve-se primeiro entender as coordenadas, em vez de focar imediatamente no campo gravitacional, já que o tensor de curvatura é mais útil para isso.

O sistema de coordenadas para Schwarzschild é (t,r,θ,ϕ), na qual a métrica representa a solução das equações de campo de Einstein, que retrata o campo gravitacional ao redor de um objeto esférico e estático podendo ser denominados por estrelas e buraco negro. A equação a seguir descreve a métrica de Schwarzschild:

$$g_{\mu\nu} = (-(1 - R_s/r), 1/(1 - R_s/r), r^2, r^2 sen^2\theta) \tag{1}$$

A Teoria da Relatividade Geral, que descreve a curvatura do espaço-tempo e as trajetórias das partículas (geodésicas) através do Tensor de Riemann. Recentemente, métodos computacionais têm sido empregados para complementar e verificar os resultados analíticos, proporcionando uma visão mais aprofundada e precisa sobre o comportamento dos buracos negros e a estrutura do espaço-tempo em sua proximidade. O Tensor de Riemann é definido como:

$$R^{\sigma}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\tau}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\tau}\Gamma^{\tau}_{\mu\beta} \tag{2}$$

BASE TEÓRICA

Segundo Cardoso (2018) Karl Schwarzschild, nascido em 1873 em Frankfurt, mostrou interesse pela astronomia, publicando teorias ainda quando adolescentes. Estudou em Estrasburgo e obteve seu doutorado em 1896, aplicando a teoria de Poincaré a corpos giratórios. Durante sua carreira, atuou em renomados observatórios e universidades. Ele fez contribuições fundamentais à relatividade geral, formulando a métrica de Schwarzschild.

De acordo com Marinho (2021), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi um matemático alemão cuja obra teve grande impacto na física teórica. Formou-se na Universidade de Göttingen em 1851. Ele fez uma palestra de 1854, chamada de "Über die

Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen". Nela, Riemann introduziu conceitos fundamentais sobre o espaço n-dimensional e o tensor de curvatura, definindo o que hoje é conhecido como espaço de Riemann. Sua obra explorou a relação entre geometria e a realidade, questionando a natureza e a dimensão do espaço.

OBJETIVOS

Objetivo geral: analisar e compreender a métrica de Schwarzschild e suas implicações na teoria da relatividade geral, para chegar no Tensor de Riemann e explorar a solução das equações de campo de Einstein.

Objetivos específico:

I. Compreender como funciona o espaço-tempo de Schwarzschild e o comportamento de objetos massivos, conhecidos como buraco negro, por meio da métrica de Schwarzschild.

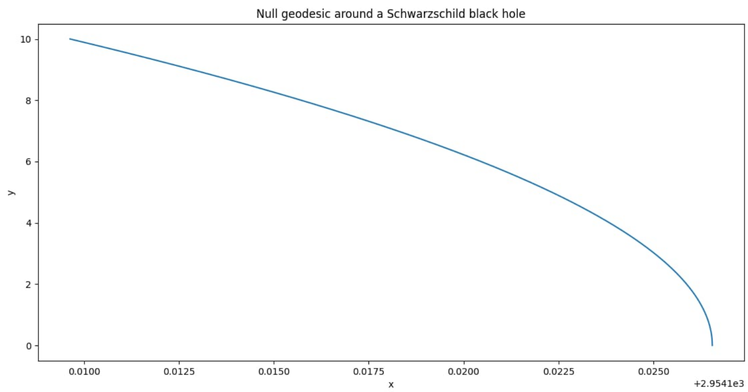
II. Explorar a Relatividade Geral através do tensor de Riemann e analisar suas componentes, utilizando métodos computacionais e análiticos.

III. Idenficar por meio do Tensor de Riemann como chegar nas equações de campo de Einstein.

METODOLOGIA

A trajetória de partículas é descrita pelas geodésicas do espaço-tempo, na pesquisa, estuda-se as partículas em torno de um buraco negro. A figura abaixo representa a trajetória dessa partícula.

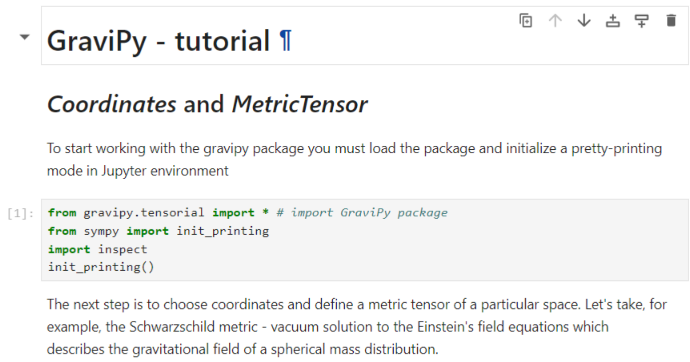
Figura 1: partícula ao redor de buraco negro.



Fonte: dados da pesquisa

Fazendo uso de Software é possível obter o resultados para os tensores de Riemann, comparando com os cálculos análiticos e ajudando na soluções desses objetos. As ferramentas utilizadas foram o Python e o Gravipy.

Figura 2: interface da página inicial do Gravipy



Fonte: Gravipy

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O tensor de Riemann é definido a partir do tensor de Christoffel, que descreve como as coordenadas curvilíneas se relacionam no espaço-tempo **(Eq.2)**. As compenentes do tensor podem ter resultados igual a zero e diferente de zero. No Gravipy, uma expansão do Python utilizando o Jupyter Lab, é possível ver os resultados das componenetes diferente de zero.

Figura 3: componentes do Tensor de Riemann.

$$R_{1212} = -\frac{2M}{r^3}$$
$$R_{1313} = \frac{M\left(-2M + r\right)}{r^2}$$
$$R_{1414} = \frac{M\left(-2M + r\right)\sin^2\left(\theta\right)}{r^2}$$
$$R_{2323} = \frac{M}{2M - r}$$
$$R_{2424} = \frac{M\sin^2\left(\theta\right)}{2M - r}$$
$$R_{3434} = 2Mr\sin^2\left(\theta\right)$$

Fonte: Gravipy

Tensor de Riemann para cálculos analiticos:

$$\mathrm{R}^{t}_{rtr} \rightarrow \mathrm{R}^{0}_{101} \tag{3}$$

Termos correspondentes: $(t = 0, r = 1, \theta = 2, \phi = 3)$

$$\mathrm{R}^{t}_{rtr} = \underbrace{\Gamma^{t}_{rr,t} - \Gamma^{t}_{rt,r}}_{\text{estão livres}} + \underbrace{\Gamma^{t}_{t\rho}\Gamma^{\rho}_{rr} - \Gamma^{t}_{r\rho}\Gamma^{\rho}_{rt}}_{\text{somatória}} = \boxed{2e^{-}2\Lambda\frac{\partial\Lambda}{\partial t}} \tag{4}$$

O tensor de Riemann tem convenção diferentes do tensor de Ricci que podem comprometer o resultado final. Sendo assim, o Gravipy tem convenção (-,-,-). A contravariante do tensor é:

$$R^{\mu\nu} \tag{5}$$

a covariante é:

$$R_{\mu\nu} \tag{6}$$

Portanto, cada detalhe ao fazer os cálculos são importantes, pois um erro pode interferir no resultado final.

CONCLUSÃO

Ademais, estudo explora a métrica de Schwarzschild no contexto da Teoria da Relatividade Geral, destacando a importância do Tensor de Riemann. Para isso foi utilizando tanto métodos analíticos quanto computacionais, para calcular as componentes não triviais do tensor, proporcionando uma verificação mais detalhada dos resultados teóricos através da expansão Gravipy do Python.

REFERÊNCIAS

[1] CARDOSO, Luciano. **Karl Schwarzschild (1873-1916).** GPET Física, Unicentro, 7 abr. 2018. Disponível em: https://www3.unicentro.br/petfisica/2018/04/07/karl-schwarzschild-1873-1916/. Acesso em: 25 ago. 2024.
[2] MARINHO, Adília. **Curiosidade sobre o matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866).** Clube da Matemática, 2021.
[3] MISNER, Charles W.; THORNE, Kip S.; WHEELER, John Archibald. **Gravitation**. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Fundação de Amparo a Pesquisa do Tocantins - FAPT pela bolsa de iniciação científica, a bolsa foi de grande ajuda durante o período de vigência. Agradeço também ao professor Luis Antônio Cabral pela orientação no projeto, consegui obter novos conhecimentos e contribuindo para minha aprendizagem acadêmica.