

## ANÁLISE DE DIFERENTES RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA CONCRETO NO TRECHO PÓS-PICO E CONSIDERAÇÕES SOBRE O EFEITO DE ESCALA

### Analysis of different post-peak constitutive relations for concrete and considerations about size effect

Mateus Brasilino (1); Cristiane Zuffo da Silva Marasca (2)

(1) Engenheiro Civil, Universidade Paranaense, Francisco Beltrão - PR, Brasil.

(2) M.<sup>a</sup> Profa., Universidade Paranaense, Francisco Beltrão - PR, Brasil

Email para Correspondência: mateusbrasilinoeng@gmail.com; (1) Apresentador

**Resumo:** Com os avanços tecnológicos os desenvolvimentos de estruturas esbeltas tornaram-se cada vez mais populares, assim é necessário o conhecimento do comportamento do concreto quando o mesmo ultrapassa sua tensão máxima. O fenômeno de fissuração é observado em vários materiais empregados na engenharia, como cerâmicas, metais e principalmente o concreto. Sabendo que a fissura influencia no desempenho global da estrutura, esse estudo tem como objetivo analisar estruturas de concreto simples com diferentes relações constitutivas no trecho pós-pico, e, analisar o efeito de escala. A formulação baseia-se no método dos elementos finitos junto com as teorias da mecânica da fratura não linear elástica. Os modelos de fratura abordados serão fissuras incorporadas, nesses modelos são implementados no elemento finito padrão descontinuidades de deslocamentos, com isso a aparição de fissuras acontece em qualquer sentido e direção, e os resultados tem pouca interferência da malha. As relações constitutivas são usadas a fim de mostrar o comportamento da fissura nas regiões ascendente e pós-pico. Utilizou-se para a região ascendente um modelo elástico linear. Para o trecho pós-pico, utilizaram-se dois modelos constitutivos: bilinear e biexponencial. Para simular a capacidade do comportamento dos elementos fissurados, foi utilizado exemplos à flexão e com peças de diferentes geometrias, comparadas com resultados experimentais encontrado na literatura. Com relação aos métodos constitutivos do trecho pós-pico, os modelos bilinear e biexponencial mostraram-se eficiente, simulando corretamente o comportamento de estruturas de concreto com diferentes tamanhos.

*Palavras chaves:* Mecânica da fratura. Método dos elementos finitos. Modelo de fissuras incorporadas. Concreto simples.

**Abstract:** With advances in technology the development of thin structures have become increasingly popular, so it becomes necessary to know the behavior of concrete when it exceeds its maximum tension. The phenomenon of cracking is observed in several materials used in engineering, such as ceramics, metals and especially concrete. Knowing that the fissure influences the overall performance of the structure, this study aims to analyze concrete structures with different constitutive relations in the post-peak stretch, and, analyze the effect of scale on simple concrete. The formulation is based on the finite element method along with



the theory of nonlinear elastic fracture mechanics. The fracture models addressed will be incorporated cracks, in these models are implemented in the finite element standard discontinuities of displacements, with this the occurrence of cracks happens in any direction and direction, and the results have little mesh interference. The constitutive relations are used to show the behavior of the crack in the ascending and post-peak regions. A linear elastic model was used for the ascending region. For the post-peak stretch, two constitutive models were used: bilinear and biexponential. In order to simulate the behavioral capacity of the cracked elements, bending examples were used and parts of different geometries were compared with experimental results found in the literature. Regarding the constitutive methods of the post-peak stretch, bilinear and biexponential models proved to be efficient, simulating correctly the behavior of concrete structures with different sizes.

**Keywords:** *Fracture mechanics; Finite element method; Embedded discontinuities model; Plain concrete.*

## 1 INTRODUÇÃO

O concreto é uma combinação de cimento, água, agregados miúdos e graúdos, e, é o material mais empregado na construção civil (Mehta e Monteiro, 1994). Sua importância se deve especialmente pela disponibilidade e baixo custo de seus componentes. Além do mais, a sua produção pode ser relativamente simples e seu emprego envolve uma variedade ampla de construções e obras de infraestruturas (Dutra, 2012).

Nos últimos anos, o desenvolvimento do concreto tem tomado moderno rumos pela busca de um material de alta performance. As características aprimoradas não são apenas a resistência mecânica, mas também a durabilidade, resistência a agentes agressivos, trabalhabilidade e fadiga. Porém, o concreto oferece como desvantagem sua fragilidade a esforços de tração e à abertura de fissuras. Neste sentido, a análise do comportamento no trecho pós-pico desempenha um papel importante para estruturas de concreto (Brandt, 2008).

O concreto é um material avaliado como quase frágil. Esse material se distingue por apresentar como propriedade um regime elástico até sua tensão de pico, acompanhando por um regime não elástico após a tensão de pico. No regime não elástico ocorre uma diminuição de tensões a cada aumento de deformação, esse fenômeno é conhecido como processo de amolecimento (Silva, 2015). O processo de amolecimento acarreta no desenvolvimento de fissuras, essas fissuras têm início devido à segregação, retração e expansão térmica da pasta de cimento.

No concreto simples, devido ao procedimento de amolecimento, as deformações tendem a se encontrar em uma pequena zona da estrutura, chamada banda de fissuração. A determinação da largura desta banda de fissuração chamou a atenção de muitos pesquisadores nas últimas décadas (D'Avila, 2003).

Neste contexto, uma ferramenta eficaz para entender o que ocorre a partir do instante em que o material alcança sua carga de pico é a mecânica da fratura não linear elástica.

Na mecânica da fratura não linear elástica os modelos que representam o processo de fissura são os classificados em fissuras discretas, distribuídas e as fissuras incorporadas (Silva, 2015).

Os primeiros modelos a representar o processo de fissuras foram os modelos discretos, logo em seguida surgiram os modelos distribuídos. O problema desses modelos é que a malha dos elementos finitos tem pouca objetividade. Para solucionar esse problema foram criados os modelos incorporados, onde a fissura é incorporada no interior da malha de elementos finitos, podendo implementar descontinuidades de deformação. Estes modelos chamam a atenção de muitos pesquisadores, por suprimir os inconvenientes dos métodos discretos e distribuídos. Outra vantagem destes métodos é sua aplicação em códigos de elementos finitos já desenvolvidos (D'Avila, 2003).

Estes três modelos admitem a inclusão de fenômenos como o da não linearidade da relação tensão-deformação, a fissuração, a fluência, a retração do concreto, entre outras. O grau de precisão dos resultados permite que se acompanhe a respostas de uma

estrutura de concreto, desde os estágios iniciais de cargas até as imediações da ruptura, como boa precisão (Planas et al., 2003).

O concreto está submetido ao efeito de escala, e os modelos de mecânica da fratura tem a capacidade de identificar esse efeito. O efeito de escala ou também conhecido por efeito de tamanho, é definido como a influência das dimensões da estrutura sobre as propriedades mecânicas com estrutura heterogênea. A ductilidade e a resistência mecânica são as principais propriedades afetadas pelo efeito de escala, no sentido que suas dimensões são inversamente proporcionais á ductilidade e resistência (Neme et al., 2015).

Para avaliar a estrutura de concreto, os métodos dos elementos finitos se tornaram o instrumento mais utilizado ultimamente, apesar de diversos métodos já tenham sido criados, esse ainda é um tópico avançado no meio científico.

O objetivo geral deste trabalho é estudar diferentes relações constitutivas para concreto no trecho pós-pico e analisar o efeito de escala em estruturas de concreto simples, utilizando a mecânica da fratura e método dos elementos finitos, numa abordagem com fissura incorporada, em complemento à abordagem desenvolvida por (Silva, 2015).

Para tal, investigou-se as variáveis que influenciam no comportamento de peças de concreto simples submetidas à flexão, implementaram-se diferentes relações constitutivas no trecho pós-pico e analisou-se a influencia dos parâmetros utilizados nos diferentes tamanhos de vigas. Além disso, analisou-se a capacidade do código computacional em simular o efeito de escala.

## 2 COMPORTAMENTO DO CONCRETO

De um modo simples, o concreto é modelado como um material de duas fases, sendo elas o agregado e a pasta de cimento. Porém para uma melhor compreensão do comportamento mecânico e propriedade de permeabilidade, é preciso entender o concreto como um material com três fases. A terceira fase é a zona de transição interfacial entre a pasta de cimento e as partículas de agregados graúdos (Silva, 2000).

Assim, é preciso ressaltar que as propriedades mecânicas do concreto não devem depender somente das propriedades da pasta de cimento e do agregado graúdo, mais também das propriedades da zona de transição (Golçalves, 2003).

Apesar de ter a mesma constituição, existem diferenças entre a microestrutura da zona de transição da matriz de argamassa. Em concreto recém-compactado ocorre acúmulo de água ao redor dos agregados. Devido a esse acúmulo de água ao redor dos agregados graúdos, os cristais desenvolvidos na zona de transição são considerados grandes, assim formando uma estrutura mais porosa do que na matriz de argamassa (Mazo, 1980) apud (Mehta e Monteiro, 1994).

A estrutura da zona de transição é responsável pelo comportamento elastoplástico do concreto, aonde ocorre à formação e propagação das fissuras. Constata-se isso quando os elementos constituintes proporcionam comportamento elástico até a ruptura quando ensaiados (Mehta e Monteiro, 1994).

As microfissuras na zona de transição são responsáveis pela pouca resistência do concreto a tração (Neville, 1997). A força necessária para a formação e propagação de fissuras na matriz de argamassa é maior para carregamentos à compressão em relação à tração, isso torna o concreto frágil à tração e dúctil à compressão (Mehta e Monteiro, 1994).

A formação da fissura no concreto ocorre em três modos. O modo I ocorre em esforços de tração, sendo que a formação da fissura ocorre perpendicular ao do carregamento. No modo II acontece o esforço de cisalhamento, onde o deslocamento ocorre em paralelo ao carregamento. No modo III é representado pelo esforço de rasgamento, marcado pelo deslocamento perpendicular à fissura (Anderson, 2005). Neste estudo irá ser usado o modo I para as análises.

### 3 MODELOS INCORPORADOS PARA FISSURAÇÃO NO CONCRETO

Os modelos incorporados se tornaram uma opção para simular o comportamento do concreto simples e armado. A principal ideia destes modelos é a implantação de descontinuidades de deslocamentos na parte interior dos elementos finitos padrões. O surgimento de fissuras nestas formulações ocorre em qualquer sentido e direção e o resultado final tem pouca interferência da malha (Jirásek, 2000).

Um dos primeiros estudos com modelos incorporados se deu por Ortil et al. (1987). Neste trabalho pretendia-se modificar a área de deformação, para que uma descontinuidade pudesse ser simulada. Outra sugestão era incorporar ao elemento finito padrão uma banda de localização. Assim, a banda de fissuração não depende da dimensão do elemento e pode ser analisada como um parâmetro do material.

A popularização dos modelos incorporados se deu pela facilidade de aplicar diferentes equações constitutivas para simular diferentes comportamentos em sólidos e a facilidade de incorporação em código existente (D' Avila, 2003). Para demonstrar essa versatilidade dos modelos incorporados, Dujc et al. (2010) criou um código capaz de simular a zona de processo de fissuração em concreto, falha em materiais dúcteis e a delaminação em materiais compostos.

### 4 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

As leis constitutivas relacionam variáveis que regem o comportamento de um material. Portanto, para uma análise não linear é importante conhecer o comportamento dos materiais, a fim de definir um modelo que possa ser aplicado numa análise computacional.

Para o concreto simples, existem modelos que simulam o comportamento nos trechos ascendente e pós-pico, através das relações tensão x deformação e tensão x abertura de fissura, respectivamente.

Para o trecho ascendente os modelos tensão x deformação descrevem melhor esse fenômeno. O primeiro estudo nessa área foi desenvolvido por Hooke conforme apresentado por Hibbeler (2010), sendo que a relação constitutiva desenvolvida por esse autor esta expressa na Eq (1).

$$\sigma = E \times \varepsilon . \quad (1)$$

Onde:

- $\sigma$  = Tensão de ruptura
- $E$  = Módulo de elasticidade
- $\varepsilon$  = Deformação específica.

Os modelos tensão x abertura de fissura, onde a abertura da fissura é um deslocamento, representam os fenômenos nos trechos pós-pico. Um dos primeiros estudos nessa área se deu por Petersson (1981), onde criou um modelo bilinear, o qual é esquematizado na figura 1. Nesse modelo a tensão que abre a fissura decresce de forma bilinear até atingir o valor de zero. As equações que representam esta relação constitutiva são dadas pelas Eq (2) e (3).

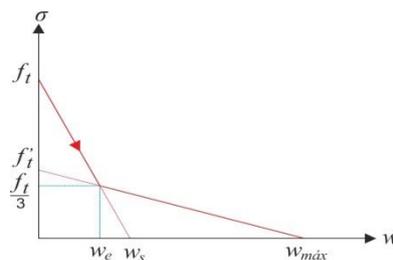


Figura 1 – Relação constitutiva bilinear criada pro Petersson (1981).  
 Fonte: (Autoria própria, 2018).

$$\sigma = f_t \left( 1 - \frac{W}{W_s} \right) \text{ Se } 0 \leq W \leq W_e \quad (2)$$

$$\sigma = f'_t \left( 1 - \frac{W}{W_{máx}} \right) \text{ Se } W_e \leq W \leq W_{máx} \quad (3)$$

Onde:

- $\sigma$  = Tensão transmitida na fissura;
- $f_t$  = Resistência à tração;
- $f'_t$  = Deslocamento da resistência à tração;
- $W$  = Abertura normal da interface.
- $W_{máx}$  = Máxima abertura de fissura;
- $W_e = 2 / 9$  de  $W_{máx}$ ;
- $W_s$  = Deslocamento da abertura da ponta da fissura.

Outra relação constitutiva para o trecho pós-pico é o modelo biexponencial desenvolvido por Linder (2007), esse modelo é observado na figura 2. Nesse modelo a tensão que abre a

fissura decresce de forma biexponencial até atingir o valor de zero. As Eq (4) e (5) demonstra esta relação constitutiva.

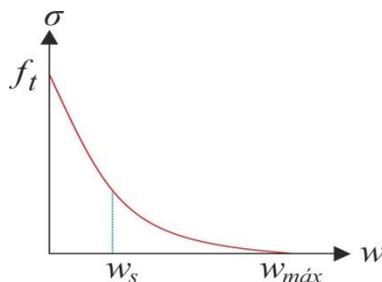


Figura 2 – Relação constitutiva biexponencial criada por Linder (2007).  
Fonte: (Autoria própria, 2018).

$$\sigma = f_t \left( 1 - \left( \frac{W_s}{W_{m\acute{a}x}} \right)^K \left( \frac{W}{W_s} \right) \right) \text{ Se } W < W_s \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{f_t}{1 - \left( \frac{W_s}{W_{m\acute{a}x}} \right)^K} \left( 1 - \left( \frac{W}{W_{m\acute{a}x}} \right)^K \right) \text{ Se } W \geq W_s \quad (5)$$

Onde:

$\sigma$  = Tensão transmitida na fissura;

$f_t$  = Resistência à tração;

$W_s$  = Deslocamento da abertura da ponta da fissura;

$W_{m\acute{a}x}$  = Máxima abertura de fissura;

$K$  = Expoente na relação de abertura da fissura;

$W$  = Abertura normal da interface.

## 5 EFEITO DE ESCALA EM CONCRETO SIMPLES

O efeito de escala leva em conta a relação entre o tamanho das estruturas com uma dimensão característica. Leonardo da Vinci nos anos 1500 analisou essa situação em cabos, onde observou que havia uma relação oposta entre tamanho e tensão, ou seja, um cabo longo irá se romper antes de um cabo curto com a mesma carga (Santos et al., 2015).

Os primeiros estudos realizados nesta área são as teorias de Weibull (1939) resultando na mecânica da fratura com dano distribuído, mas esse método não era aplicável a concreto.

Como o concreto é um dos materiais mais utilizados atualmente, foram desenvolvidos estudos para aplicar o efeito de escala nesse material. Um dos primeiros estudos realizado foi por Jenq (1985), o qual mostrou experimentalmente que o valor de resistência à fratura depende da dimensão da peça. Essa dependência de tamanho e geometria da peça pode ser atribuída ao crescimento lento da fissura e a não linearidade devido aos efeitos de bloqueio geométrico.

## 6 METODOLOGIA

Nessa pesquisa foi desenvolvido um programa para analisar estruturas de concreto com diferentes relações constitutivas no trecho pós-pico, e analisar o efeito de escala. A formulação baseia-se no método dos elementos finitos e nas teorias da mecânica da fratura não linear elástica. O método de fratura abordado será de fissuras incorporadas, implantado por (Silva, 2015)

Os modelos constitutivos implementados nesse estudo foram para o trecho ascendente a leis de Hooke mostrada por Hibbeler (2010), e para o trecho pós-pico os modelos bilinear de Petersson (1981) e biexponencial de Linder (2007), sendo que para o trecho pós-pico será observado qual modelo representa mais realisticamente o comportamento do concreto.

Foram analisadas vigas submetidas à flexão a três pontos, com carga simétrica em relação aos apoios. Desta forma a propagação de fissura ocorrerá em modo I.

Foi verificada se as leis de amolecimento conseguem caracterizar o comportamento de fratura em peças de concreto simples de diferentes tamanhos.

Os resultados deste estudo foram comparados com os resultados encontrados na literatura, a fim de validar.

## 7 FLEXÃO PURA A TRÊS PONTOS COM APLICAÇÃO DE DESLOCAMENTO

Neste exemplo foi estudado o comportamento de uma viga biapoiada com uma carga no meio da viga, este exemplo é baseado no estudo desenvolvido por Petersson (1981).

Na figura 3 é apresentada a geométrica da peça em estudo, e suas condições de contorno. A peça foi analisada com três malhas diferentes de elementos finitos e a linha de fissuração foi considerada com diferentes quantidades de elementos, conforme observa-se na tabela 1.

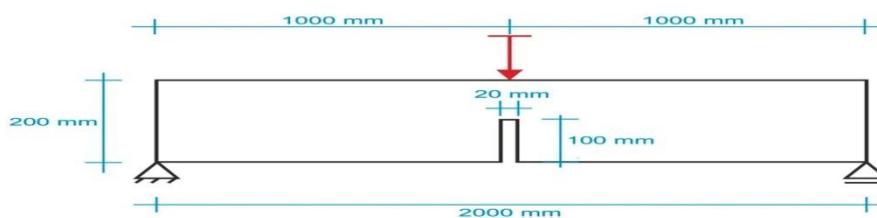


Figura 3 - Geometria da peça e condições de contorno  
Fonte: (Autoria própria, 2018).

**Tabela1- Malhas empregadas na flexão pura a três pontos**

Nome	Total de elementos	Elementos na linha da fissura
M1	381	15
M2	721	25
M3	811	25

Na figura 4 são exibidas as malhas empregadas junto com os detalhes na região com entalhe.

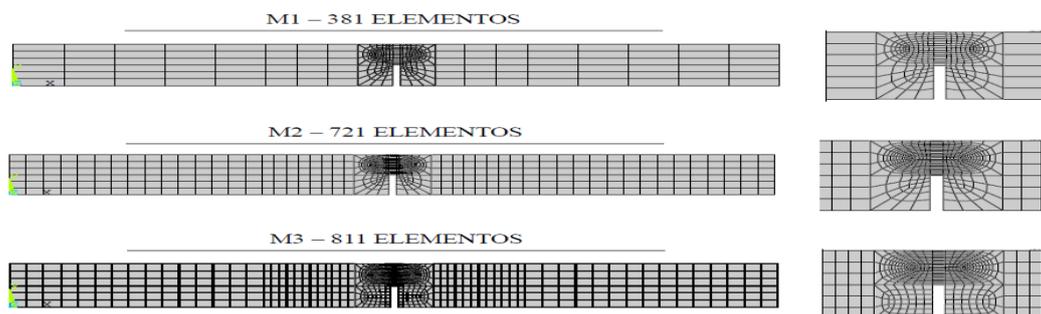


Figura 4 - Malhas empregadas e detalhes da região com entalhe – Flexão três pontos  
 Fonte: (Silva, 2015).

Na tabela 2 os dados de entrada utilizado no exemplo serão apresentados. Estes valores foram retirados das características do modelo ensaiado por Petersson (1981).

**Tabela 2- Parâmetros de entrada flexão a três pontos**

Propriedades do Material	
Resistência à tração (Ft)	3,33 Mpa
Módulo de elasticidade (E)	30000 Mpa
Coefficiente de Poisson ( $\gamma$ )	0,2
Energia de fratura (Gf)	0,124 N/mm

Para a região fissurada foi utilizado duas leis de amolecimento, uma bilinear de Petersson (1981) e outra biexponencial de Linder (2007), apresentadas no item 4. Para a região não fissurada ira ser utilizada um relação constitutiva elástico linear.

Para a curva biexponencial de Linder (2007) foram utilizados como dados de entrada  $W_s = 0,015$ ,  $W_{máx} = 0,16$  e  $K = 0,50$ .

Primeiramente foi avaliada a influência que a lei de amolecimento desempenha sobre a resposta global. Na figura 5 são exibidos os modelos de amolecimento empregados com a malha M3 obtidos para a estrutura apresentada na figura 3. Será utilizada apenas uma malha dessa avaliação, pois Silva (2015) mostrou que independente da malha o resultado é o mesmo. Nota-se que os dois modelos de amolecimentos têm aproximadamente a mesma abertura máxima, essa pouca diferença não ira impactar no resultado global da estrutura vista mais a diante.

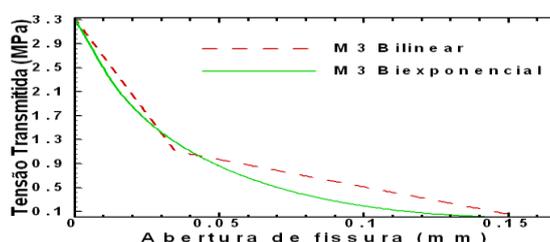


Figura 5 - Geometria da peça e condições de contorno  
 Fonte: (Autoria própria, 2018).

Na figura 6 são exibidas as curvas obtidas da simulação do modelo bilinear de Petersson (1981) e biexponencial de Linder (2007) implementado com diferentes malhas e a curva de referência de Petersson (1981). Nota-se na figura 6 que os modelos implementados apresentam resultados coerentes com o do trabalho de referência, até a malha mais grosseira (M1) os resultados são satisfatórios. A tensão máxima é encontrada de forma correta e conforme aumenta o número de elementos na malha as curvas convergem para um mesmo comportamento. Conforme observado na figura 6 o comportamento pós-pico dos modelos implementados apresentam uma curva mais frágil em comparação com a experimental de referência. É importante lembrar que as malhas geradas priorizaram o refinamento na região de fissura, sendo que as malhas M1, M2 e M3 foram modeladas com 15, 25 e 25 elementos na região fissurada, respectivamente.

Na figura 7 é observado à comparação entre as duas leis de amolecimento implementadas com a malha (M3) e também os resultados experimentais encontrados por Petersson (1981). Nota-se que os dois modelos implementados apresentaram resultados que se aproximam do comportamento do corpo de prova experimental, assim mostrando que os métodos de amolecimento aplicados são capazes de demonstrar o comportamento real do concreto simples.

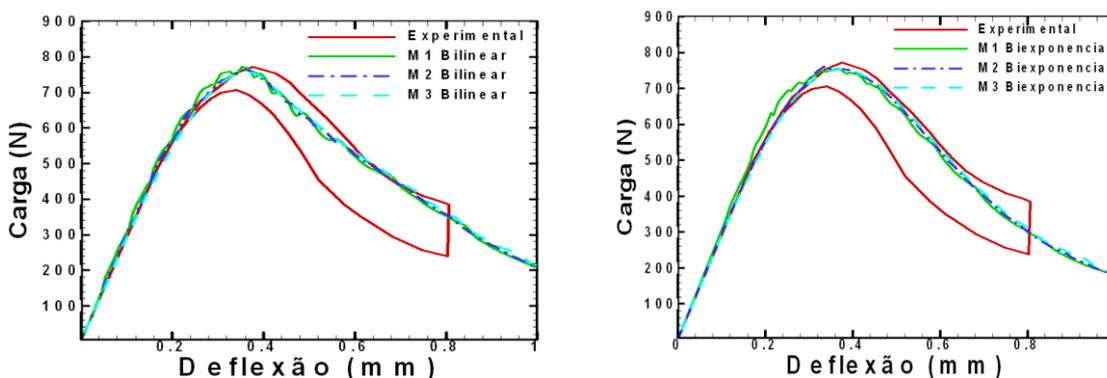


Figura 6 - Carga x Deflexão da viga com amolecimento Bilinear e Biexponencial de com diferentes malhas empregadas.

Fonte: (Autoria própria, 2018).

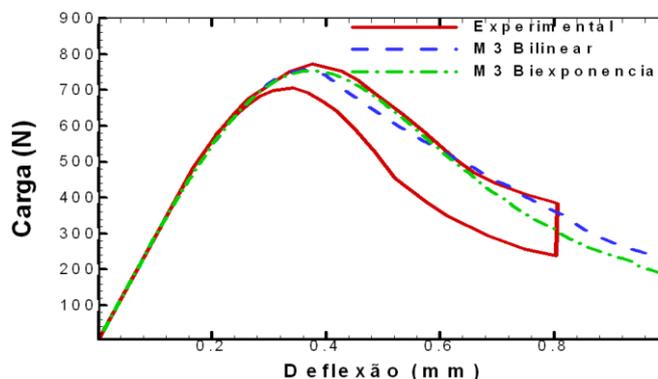


Figura 7 - Relação Carga x Deflexão da viga com amolecimento Bilinear e Biexponencial

Fonte: (Autoria própria, 2018).

No trabalho de referência de Petersson (1981) é feita a comparação entre duas vigas, que produziram o maior e o menor valor de energia de fratura, sendo assim, o intervalo entre essas duas vigas é considerado o intervalo de confiança.

## 8 EFEITO DE ESCALA EM VIGAS SUBMETIDAS À FLEXÃO PURA A TRÊS PONTOS

Neste exemplo de flexão é analisado o comportamento de vigas com tamanhos diferentes, visando constatar se a metodologia é adequada para modelar as variações devido ao tamanho do corpo de prova. Este exemplo é baseado no trabalho desenvolvido por Jenq (1985).

Na figura 8 é apresentada a geométrica da peça em estudo e também suas condições de contorno. A tabela 3 apresenta as dimensões das peças estudadas.

As características do concreto para as três vigas estudadas são apresentada na tabela 4.

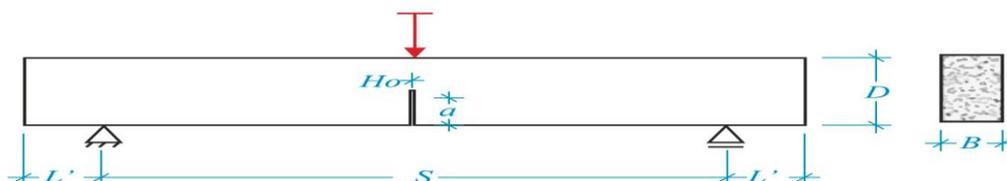


Figura 8 - Geometria e condições de contorno

Fonte: (Autoria própria, 2018).

**Tabela 3- Geometria para o caso estudado**

Corpos de prova	S (mm)	D (mm)	B (mm)	L' (mm)	A (mm)	a/D	Ho (mm)
EF1	305	76	29	12	25	0,333	1
EF2	610	152	57	25	50	0,333	1
EF3	914	229	86	38	76	0,333	1

**Tabela 4- Propriedades do concreto para o caso estudado**

Propriedades do Material	EF1	EF2	EF3
Resistência à tração ( $f_t$ )	3,4259 Mpa	3,4259 Mpa	3,4259 Mpa
Módulo de elasticidade ( $E$ )	21930 Mpa	23340 Mpa	34920 Mpa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,2	0,2	0,2
Energia de fratura ( $G_f$ )	0,1 N/mm	0,1 N/mm	0,1 N/mm

A tabela 5 mostra a quantidade de elementos de cada peça e apresentada a quantidade de elementos finitos aplicados na linha da fissura. Na figura 9 são exibidas as malhas empregadas junto com os detalhes na região com entalhe.

**Tabela 5- Malhas empregadas na flexão pura a três pontos**

Nome	Total de elementos	Elementos na linha da fissura
EF1	802	30
EF2	786	30
EF3	790	30

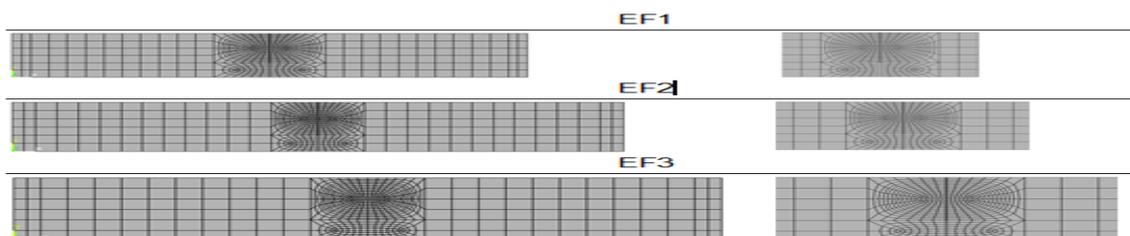


Figura 9 - Malhas empregadas e detalhes da região com entalhe – Flexão três pontos  
 Fonte: (Autoria própria, 2018).

Para a curva biexponencial de Linder (2007) foram utilizados como dados de entrada  $W_s = 0,010$ ,  $W_{m\acute{a}x} = 0,11$  e  $K = 0,50$ .

Na figura 10 apresentam-se as curvas carga x deflexão para as duas leis de amolecimento, juntamente com as curvas experimentais de Jenq (1985). Para uma melhor visualização nas figuras as leis de amolecimento e as curvas experimental serão indicadas com subíndice (J para as curvas de Jenq (1985), P para a lei de Petersson (1981) e L para a lei de Linder (2007)). Nota-se nessas figuras que o efeito de escala é capturado. Observa-se que a curva carga x deflexão não é a mesma, variando conforme o tamanho da peça. Nota-se ainda a coerência dos modelos implementados com os resultados experimentais. As leis constitutivas empregadas na parte pós-pico têm efeito considerável no resultado, não somente no comportamento da curva, mas também no valor de pico da carga. Para as vigas maiores a queda da carga máxima é maior que em vigas menores, indicando uma tendência de comportamento frágil quando a geometria do corpo de prova é aumentada.

Na figura 11 é observado à comparação entre os resultados obtidos para as duas leis de amolecimento implementadas e também os resultados experimentais encontrados por Jenq (1985). Nota-se que os dois modelos implementados apresentaram resultados que se aproximam do comportamento real do corpo de prova, assim mostrando que os métodos de amolecimento aplicados são capazes de demonstrar o efeito de escala em concreto simples.

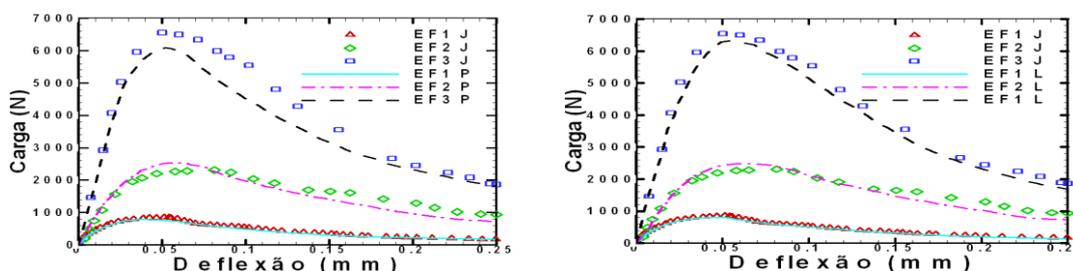


Figura 10 - Carga x Deflexão com a lei de amolecimento Bilinear e Biexponencial comparado com a experimental  
 Fonte: (Autoria própria, 2018).

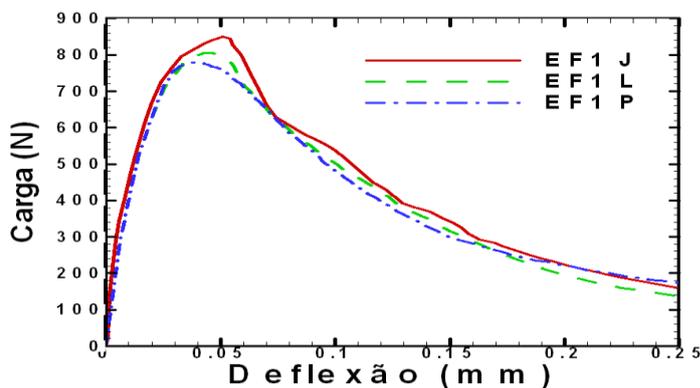


Figura 11 - Carga x Deflexão para o corpo de prova EF1 com as leis de amolecimento implementadas, comparado com a experimental

Fonte: (Autoria própria, 2018).

## 9 CONCLUSÃO

O estudo é motivado por problemas de estruturas em peças de concreto simples, mostrando-se necessária a utilização da mecânica da fratura considerando-se a tendência por busca de estruturas mais resistentes e esbeltas.

Para a região ascendente e pós-pico foram utilizadas relações constitutivas para simular seu comportamento. O trecho ascendente foi modelado com a relação constitutiva desenvolvida por Hooke mostrada por Hibbeler (2010). O trecho pós-pico foi avaliado a influência de dois modelos constitutivos, os modelos propostos por Petersson (1981) e Linder (2007) sendo bilinear e biexponencial, respectivamente. A propagação da fissura no concreto foi usada o modo I e as vigas foram submetidas à flexão de três pontos.

Observando o capítulo 7 e seus resultados chega-se as seguintes conclusões dos modelos de fissura implementados.

Com a comparação com os dados experimentais obtidos da literatura de Petersson (1981), foi possível constatar a grande influencia que as leis de amolecimento tem implementadas têm sobre o comportamento da estrutura. Verificou que os dois modelos tem a capacidade de demonstrar o comportamento do material de forma correta.

Os dois modelos de amolecimento apresentaram um comportamento parecido, porém o modelo biexponencial mostrou-se mais coerente, pois a tensão máxima foi medida de forma certa e o comportamento da curva de amolecimento apresentou resultados realísticos quando comparado com dados experimentais.

O estudo com diferentes malhas mostrou que mesmo para a malha mais grosseira (M1) os resultados são satisfatório e que com o refinamento da malha a curva tendem a ter uma resposta mais suavizada. Assim o mecanismo de fratura não muda em função dos elementos na linha de fissura, pois a zona de processo permanece a seção central do corpo de prova.

Analisando os resultados apresentados no capítulo 8 chega-se a algumas conclusões.

As diferentes leis de amolecimento interferem tanto no trecho não fissurado quanto no trecho fissurado, como na capacidade da carga do corpo de prova. No geral, a lei de amolecimento biexponencial de Linder (2007) proporciona uma carga e uma curva de amolecimento mais próxima do experimental de Jenq (1985).

Com os resultados analíticos deste estudo de efeito de escala junto com o experimental conseguiu-se demonstrar que a metodologias dos trechos não fissurado e fissurados tem a capacidade de caracterizar o comportamento de fratura em peças de concreto simples de diferentes tamanhos.

Contudo, de forma geral dos estudos, os resultados obtidos apresentaram uma boa aproximação a resultados experimentais encontrados na literatura. Com isso, pode-se afirmar que os modelos implementados são adequados para a simulação de concreto simples. Sendo que estes modelos apresentam uma vantagem em relação à utilização de malhas grosseiras, pois apresentam resultados satisfatórios com poucos elementos finitos.

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, T. *Fracture Mechanics: fundamentals and applications*. 3. Ed. New York: CRC pres, 2005.

BRANDT, A. M. Fibre reinforced cement-based (FRC) composites after over 40 years of development in building and civil engineering. *Composite structures*, vol. 86, n. 1, p. 5-9, 2008.

D' AVILA, V. M. R. *Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos*. 259p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

DUJC, J.; BRANK, B.; IBRAHIMBEGOVIC, A. Quadrilateral finite element with embedded strong discontinuity for failure analysis of solids. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 69, n. 3, p. 223-260, 2010.

DUTRA, V. F. P.; *Um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras de aço via teoria da homogeneização*. 217p. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

GONÇALVES, R. *Análise de propagação de fissuras por fadiga em concreto pelo MEF mediante a mecânica do dano contínuo*. 113p. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

HIBBELER, R. C. *Resistência dos Materiais*. 7. Ed. São Paulo: Pearson Education, 2010.

JENQ, Y. S.; SHAH, S. P. A fracture toughness criterion for concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 21, n. 5, p. 1055 - 1069, 1985.

JIRÁSEK, M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, North-Holland, v. 188, p. 307-330, 2000

LINDER, C.; ARMERO, F. Finite elements with embedded strong discontinuities for the modeling of failure in solids. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 72, p. 1391 – 1433, apr. 2007.

MAZO, J. C. *Proceedings of the Seventh International Congress on the Chemistry of Cements*, v. 1, Editions Septima, Paris, 1980.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P.J.M.; *Concreto: Estrutura, propriedades e materiais*. Pini, São Paulo, 1994.

NEME, G. P. et al. *Modelagem Computacional do efeito de escala em estruturas de concreto*. Congresso Brasileiro do Concreto, 57, Outubro, 2015, p. 4.

NEVILLE, A. M. *Propriedades do concreto*. Tradução: Salvador E. Giammusso. 2. ed. São Paulo: PINI, 1997.

ORTIZ, M.; LEROY, Y.; NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 61, n. 2, p 189-214, 1987.

PETERSSON, P. **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. Lund, Sweden: University of Lund, 1981.

PLANAS, J. et al. Generalizations and specializations of cohesive crack models. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 70, n. 14, p. 1759-1776, 2003.

SANTOS, A. H. A.; PITANGUEIRA, R. L. S.; RIBEIRO, G. O.; CALDAS, R. B. Estudo do efeito de escala utilizando correlação de imagem digital. *Revista Ibracon de estruturas e materiais*, v. 8, n. 3, p. 323 – 340, jun 2015.

SILVA, C. Z. *Uso de descontinuidades fortes na simulação de problemas de fraturas*. 89p. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

SILVA, I. J. *Contribuição ao estudo dos concretos de elevado desempenho: Propriedades mecânicas, durabilidade e microestrutura*. 279p. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

WEILBULL, W. Phenomenon of rupture in solids. *Proc. Royal Swedish. Inst. Of Eng. Res. Suécia*, 1939.