



COMPORTAMENTO DINÂMICO LINEAR DE PONTES A PARTIR DO MODELO DE INTERAÇÃO DINÂMICA PARA DIFERENTES MODELOS VEICULARES SOB EFEITO DAS IRREGULARIDADES DA VIA

Linear dynamic behavior of bridges from dynamic interaction model for different
vehicular models under the effects of track irregularities

Diego Gabriel Metz (1)(P); Roberto Dalledone Machado (2); Marcos Arndt (2);
(3) Carlos Eduardo Rossigali

(1) Engenheiro Civil, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Federal do Paraná, Pontal do Paraná - PR, Brasil

E-mail para Correspondência: metz@ufpr.com.br; (P) Apresentador

Resumo: No dimensionamento de pontes, por norma, os efeitos dinâmicos reais são desprezados ao serem substituídos por carregamentos estáticos equivalentes majorados, porém este procedimento não reproduz a ação real do tráfego de veículos nas pontes rodoviárias. Ao admitir as análises dinâmicas em modelos lineares, obtêm-se resultados que oscilam em torno da resposta estática estrutural. Diversos trabalhos, no entanto, demonstram que a consideração das cargas estáticas equivalentes acaba se tornando maior do que as respostas dinâmicas reais em modelos lineares. Tendo em vista o desenvolvimento de novos modelos de cargas móveis para representar adequadamente a ação do tráfego real, este trabalho procura analisar pontes sujeitas a composições de cargas simulando a passagem de veículos pesados, com características dinâmicas. As irregularidades da via tendem a excitar o veículo dinamicamente, o que por sua vez desencadeia vibrações adicionais na estrutura da ponte, além daquelas produzidas por seu próprio movimento. No modelo de ponte rodoviária são usados elementos finitos da viga de *Euler-Bernoulli*, com o amortecimento estrutural determinado pelo método de *Rayleigh*. A solução numérica da equação diferencial de movimento do sistema veículo-ponte, obtida através do equilíbrio dinâmico linear, é calculada por meio do método de *Newmark*. Para a análise dinâmica linear dos sistemas, são desenvolvidas rotinas computacionais em linguagem de programação *Python*.

Palavras chaves: *Dinâmica Veicular; Modelagem Computacional Veicular; Interação Dinâmica; Método dos Elementos Finitos; Ponte Rodoviária.*

Abstract: In the design of highway bridges, the real dynamic effects are neglected when they are replaced by equivalent static loadings. This simplification does not represent the action of the real traffic on highway bridges. When considering dynamic analysis in linear models, the responses obtained are around the static structural one. Several works, however, demonstrated that the consideration of equivalent static loads ends up becoming larger than the actual dynamic response in linear models. Intending to develop new load models to better simulate



the real traffic, this work analyses bridges subject to load compositions simulating the passage of heavy vehicles with dynamic characteristics. The road irregularities tend to excite the vehicle dynamically which in turn triggers additional vibrations in the bridge structure besides those produced by its own movement. The bridge is modeled using *Euler- Bernoulli* beam elements, with structural damping determined by the *Rayleigh* method. The differential equation of motion of the vehicle-bridge system is obtained through linear dynamic equilibrium and is solved by the *Newmark* method. The linear dynamic analysis of the system was coded in *Python*.

Keywords: *Vehicular Dynamics, Vehicular Computational Modelling, Dynamic Interaction, Finite Element Method, Highway Bridge.*

1 INTRODUÇÃO

No Brasil, assim como em outros países, o desenvolvimento do tráfego de veículos tem se caracterizado pela multiplicidade de configurações dos veículos, tais como o acréscimo de peso, velocidade e volume de tráfego. À medida que o volume ou a tipologia do tráfego de veículos sofre alteração com maior pertinência, uma questão relevante é saber se as pontes e os pavimentos rodoviários estão aptos a suportar o tráfego atual de veículos comerciais, uma vez que não foram projetados para tais circunstâncias (Rossigali, 2013).

A adoção de um coeficiente de impacto, proveniente das normas de ponte e fundamentado geralmente em aspectos geométricos, tal qual a dimensão do vão, para a consideração dos efeitos dinâmicos através de solicitações estáticas equivalentes, mostra-se, por vezes, insatisfatória para atender, em serviço, os critérios de vibrações e deformações excessivas ou, até mesmo, acarretando na redução da margem de segurança e estabilidade da estrutura (Melo, 2007).

O comportamento dinâmico das estruturas de pontes submetidas à passagem de veículos vem sendo tratado sob diversas concepções que vão desde verificações experimentais e teóricas até modelagens computacionais. Os primeiros modelos de veículo para o estudo da resposta dinâmica de pontes foram os modelos de carga móvel, massa móvel e massa móvel suspensa (Lowan, 1935 e Frýba, 1972). Com o avanço da tecnologia computacional e, principalmente com o emprego do método dos elementos finitos (MEF), o estudo de vibrações em pontes tornou-se mais sofisticado.

Para modelos mais complexos, onde foram levados em conta as irregularidades de natureza aleatória do pavimento, Melo (2007) obteve fatores de amplificação dinâmica resultantes da passagem de veículos monolíticos de 3 eixos, avaliados sob diversas condições de pavimento, velocidade, peso e possibilidade de obstáculos na pista.

Trabalhos como de Beghetto (2011), Ferreira (2013) e Araujo (2014) trataram da interação dinâmica entre veículo, irregularidade e ponte considerando modelos de contato entre as rodas e a estrutura.

Nesse sentido, este trabalho tem por objetivo avaliar as respostas dinâmicas a partir da interação desacoplada entre veículo e ponte rodoviária, empregando modelos

matemáticos veiculares com 4, 5 e 9 graus de liberdade e elementos finitos da viga de Euler-Bernoulli.

2 MODELOS MATEMÁTICOS

Nesta seção são apresentados os fundamentos teóricos e os modelos matemáticos desenvolvidos para as simulações computacionais.

2.1 Modelos Veiculares com Irregularidade Acoplada

O modelo computacional implementado considera a passagem de um veículo composto pela associação de corpos rígidos conectados em sistemas de suspensões, em que cada sistema de suspensão é formado por uma mola elástica linear e um amortecedor com comportamento viscoso linear.

Os corpos rígidos são projetados de maneira indeformável. No entanto, os efeitos de amortecimento e rigidez das rodas são contemplados através de outros sistemas de suspensões. Em outras palavras, são considerados os efeitos dinâmicos lineares de problemas de contato. Os modelos matemáticos dos veículos monolíticos de 4 e 5 graus de liberdade podem ser encontrados em Almeida (2006), Melo (2007) e Mendonça (2009).

O modelo veicular monolítico de 2 eixos possui 4 graus de liberdade: o deslocamento vertical u_v e a rotação θ_v do corpo principal, e os deslocamentos verticais u_{r_1} e u_{r_2} das duas rodas. A Figura 1 ilustra o modelo do veículo.

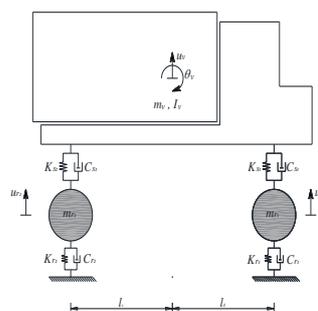


Figura 1. Modelo veicular com 4 graus de liberdade.

Fonte: (Autor, 2018)

Os parâmetros globais do modelo são a massa do corpo principal, m_v e o momento de inércia, I_v , a massa da roda dianteira, m_{r_1} e a massa da roda traseira, m_{r_2} , as grandezas de rigidez da mola (K_{s_1} , K_{s_2} , K_{r_1} e K_{r_2}) e os coeficientes de amortecimento dos amortecedores para a suspensão do veículo (C_{s_1} , C_{s_2} , C_{r_1} e C_{r_2}).

A maior parcela dos veículos de carga no cenário rodoviário nacional é composta por caminhões de 3 eixos. Desta forma, o modelo com 5 graus de liberdade caracteriza de forma mais exata para tal veículo. A Figura 2 ilustra o modelo mecânico plano.

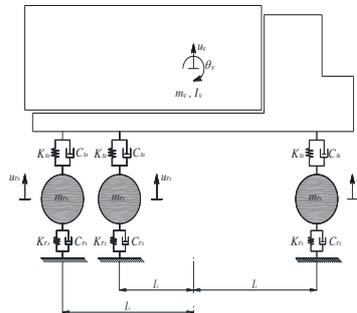


Figura 2. Modelo veicular com 5 graus de liberdade.

Fonte: (Autor, 2018)

Os parâmetros físicos m_{r_3} , $(K_{s_3}$ e $K_{r_3})$ e $(C_{s_3}$ e $C_{r_3})$, representam respectivamente a massa da roda traseira, as grandezas de rigidez da mola e os coeficientes de amortecimento dos amortecedores para a suspensão do veículo.

Para o veículo de carga formado por uma unidade tratora e um veículo rebocado, neste caso um semirreboque, utiliza-se o modelo matemático composto por 9 graus de liberdade: a translação vertical e a rotação de cada parte suspensa (u_{v_1} , u_{v_2} , θ_{v_1} e θ_{v_2}), e as 5 translações verticais das massas dos conjuntos eixos-rodas-pneus (u_{r_1} , u_{r_2} , u_{r_3} , u_{r_4} e u_{r_5}). A Figura 3 apresenta o modelo matemático descrito.

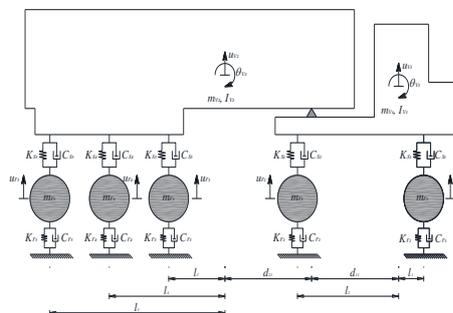


Figura 3. Modelo veicular com 9 graus de liberdade.

Fonte: (Autor, 2018)

Para a dedução das equações de movimento de cada veículo utiliza-se como base o princípio de *D'Alembert*, onde é realizado um equilíbrio dinâmico de forças considerando-se as forças de inércia que aparecem no sistema conforme sugerido por Goldstein *et al.* (2002). Assim, considerando o equilíbrio dinâmico do veículo, a equação governante pode ser escrita como

$$[M_V]\{\ddot{u}_V\} + [C_V]\{\dot{u}_V\} + [K_V]\{u_V\} = \{F_V(t)\} \quad (1)$$

onde $[M_V]$, $[C_V]$ e $[K_V]$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do veículo, $\{\ddot{u}_V\}$, $\{\dot{u}_V\}$ e $\{u_V\}$ representam os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento do modelo veicular e, finalmente, $\{F_V(t)\}$ representa o vetor de forças externas.

A avaliação do efeito de inércia do veículo em movimento é obtida através de simulações numéricas utilizando o Método de *Newmark* (Montoya, 2009).

O veículo ao atravessar a ponte com velocidade v , devido a sua ação dinâmica, excita a estrutura. Tal excitação é ocasionada pelo efeito inercial do corpo principal em consequência das irregularidades da via, representadas por $y(t)$. Assim têm-se as forças resistivas elásticas e amortecedoras exercidas pelos dispositivos de mola e amortecedor em cada ponto i de contato entre os pneus do veículo e o pavimento aderente à superfície da estrutura.

Desta forma, para o modelo veicular com 4 graus de liberdade, a equação de movimento que rege o problema pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} m_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{r_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_v \\ \ddot{\theta}_v \\ \ddot{u}_{r_1} \\ \ddot{u}_{r_2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{s_1} + C_{s_2} & C_{s_1}l_1 - C_{s_2}l_2 & -C_{s_1} & -C_{s_2} \\ C_{s_1}l_1 - C_{s_2}l_2 & C_{s_1}l_1^2 + C_{s_2}l_2^2 & -C_{s_1}l_1 & C_{s_2}l_2 \\ -C_{s_1} & -C_{s_1}l_1 & C_{s_1} + C_{r_1} & 0 \\ -C_{s_2} & C_{s_2}l_2 & 0 & C_{s_2} + C_{r_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_v \\ \dot{\theta}_v \\ \dot{u}_{r_1} \\ \dot{u}_{r_2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{s_1} + K_{s_2} & K_{s_1}l_1 - K_{s_2}l_2 & -K_{s_1} & -K_{s_2} \\ K_{s_1}l_1 - K_{s_2}l_2 & K_{s_1}l_1^2 + K_{s_2}l_2^2 & -K_{s_1}l_1 & K_{s_2}l_2 \\ -K_{s_1} & -K_{s_1}l_1 & K_{s_1} + K_{r_1} & 0 \\ -K_{s_2} & K_{s_2}l_2 & 0 & K_{s_2} + K_{r_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ \theta_v \\ u_{r_1} \\ u_{r_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{r_1}\dot{y}_1(t) + K_{r_1}y_1(t) \\ C_{r_2}\dot{y}_2(t) + K_{r_2}y_2(t) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Em se tratando do modelo veicular com 5 graus de liberdade, o sistema de equações que descreve o movimento do sistema assume a forma

$$\begin{bmatrix} m_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_v \\ \ddot{\theta}_v \\ \ddot{u}_{r_1} \\ \ddot{u}_{r_2} \\ \ddot{u}_{r_3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{s_1} + C_{s_2} + C_{s_3} & C_{s_1}l_1 - C_{s_2}l_2 - C_{s_3}l_3 & -C_{s_1} & -C_{s_2} & -C_{s_3} \\ C_{s_1}l_1 - C_{s_2}l_2 - C_{s_3}l_3 & C_{s_1}l_1^2 + C_{s_2}l_2^2 + C_{s_3}l_3^2 & -C_{s_1}l_1 & C_{s_2}l_2 & C_{s_3}l_3 \\ -C_{s_1} & -C_{s_1}l_1 & C_{s_1} + C_{r_1} & 0 & 0 \\ -C_{s_2} & C_{s_2}l_2 & 0 & C_{s_2} + C_{r_2} & 0 \\ -C_{s_3} & C_{s_3}l_3 & 0 & 0 & C_{s_3} + C_{r_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_v \\ \dot{\theta}_v \\ \dot{u}_{r_1} \\ \dot{u}_{r_2} \\ \dot{u}_{r_3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{s_1} + K_{s_2} + K_{s_3} & K_{s_1}l_1 - K_{s_2}l_2 - K_{s_3}l_3 & -K_{s_1} & -K_{s_2} & -K_{s_3} \\ K_{s_1}l_1 - K_{s_2}l_2 - K_{s_3}l_3 & K_{s_1}l_1^2 + K_{s_2}l_2^2 + K_{s_3}l_3^2 & -K_{s_1}l_1 & K_{s_2}l_2 & K_{s_3}l_3 \\ -K_{s_1} & -K_{s_1}l_1 & K_{s_1} + K_{r_1} & 0 & 0 \\ -K_{s_2} & K_{s_2}l_2 & 0 & K_{s_2} + K_{r_2} & 0 \\ -K_{s_3} & K_{s_3}l_3 & 0 & 0 & K_{s_3} + K_{r_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ \theta_v \\ u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{r_1}\dot{y}_1(t) + K_{r_1}y_1(t) \\ C_{r_2}\dot{y}_2(t) + K_{r_2}y_2(t) \\ C_{r_3}\dot{y}_3(t) + K_{r_3}y_3(t) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Por fim, para o modelo matemático com 9 graus de liberdade, a equação matricial que caracteriza o problema é apresentada como

$$\begin{bmatrix} M_{vv} & 0 \\ 0 & M_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_v \\ \dot{u}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{vv} & C_{vr} \\ C_{rv} & C_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_v \\ \dot{u}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{vv} & K_{vr} \\ K_{rv} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ u_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_r(t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Diferentemente dos veículos monolíticos, as matrizes $[M_V]$, $[C_V]$ e $[K_V]$ do veículo de 9 graus de liberdade são particionadas em até 4 submatrizes. Desta forma, obtêm-se as seguintes matrizes de massa, amortecimento e rigidez

$$[M_{vv}] = \begin{bmatrix} 1 & -d_{11} & -1 & -d_{21} \\ -m_{v_1} d_{11} & -I_{v_1} & 0 & 0 \\ m_{v_1} & 0 & m_{v_2} & 0 \\ -m_{v_1} d_{21} & 0 & 0 & -I_{v_2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[M_{rr}] = \begin{bmatrix} m_{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{r_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{r_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{r_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r_5} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[C_{rr}] = \begin{bmatrix} C_{s_1} + C_{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{s_2} + C_{r_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{s_3} + C_{r_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{s_4} + C_{r_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{s_5} + C_{r_5} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[C_{vv}] = \begin{bmatrix} 1 & -d_{11} & -1 & -d_{21} \\ C_{s_1} d'_{11} + C_{s_2} d'_{21} & -C_{s_1} l_1 d'_{11} - C_{s_2} l_2 d'_{21} & 0 & 0 \\ C_{s_1} + C_{s_2} & C_{s_1} l_1 - C_{s_2} l_2 & C_{s_3} + C_{s_4} + C_{s_5} & C_{s_3} l_3 + C_{s_4} l_4 + C_{s_5} l_5 \\ -d_{11}(C_{s_1} + C_{s_2}) & d_{11}(-C_{s_1} l_1 + C_{s_2} l_2) & C_{s_3} l_3 + C_{s_4} l_4 + C_{s_5} l_5 & C_{s_3} l_3^2 + C_{s_4} l_4^2 + C_{s_5} l_5^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[C_{vr}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{s_1} d'_{11} & -C_{s_2} d'_{21} & 0 & 0 & 0 \\ -C_{s_1} & -C_{s_2} & -C_{s_3} & -C_{s_4} & -C_{s_5} \\ C_{s_1} d_{21} & C_{s_2} d_{21} & -C_{s_3} l_3 & -C_{s_4} l_4 & -C_{s_5} l_5 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[C_{rv}] = \begin{bmatrix} -C_{s_1} & -C_{s_1} l_1 & 0 & 0 \\ -C_{s_2} & -C_{s_2} l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{s_3} & -C_{s_3} l_3 \\ 0 & 0 & -C_{s_4} & -C_{s_4} l_4 \\ 0 & 0 & -C_{s_5} & -C_{s_5} l_5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[K_{rr}] = \begin{bmatrix} K_{s_1} + K_{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{s_2} + K_{r_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{s_3} + K_{r_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{s_4} + K_{r_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{s_5} + K_{r_5} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[K_{vv}] = \begin{bmatrix} 1 & -d_{11} & -1 & -d_{21} \\ K_{s_1}d'_{11} + K_{s_2}d'_{21} & -K_{s_1}l_1d'_{11} - K_{s_2}l_2d'_{21} & 0 & 0 \\ K_{s_1} + K_{s_2} & K_{s_1}l_1 - K_{s_2}l_2 & K_{s_3} + K_{s_4} + K_{s_5} & K_{s_3}l_3 + K_{s_4}l_4 + K_{s_5}l_5 \\ -d_{11}(K_{s_1} + K_{s_2}) & d_{11}(-K_{s_1}l_1 + K_{s_2}l_2) & K_{s_3}l_3 + K_{s_4}l_4 + K_{s_5}l_5 & K_{s_3}l_3^2 + K_{s_4}l_4^2 + K_{s_5}l_5^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[K_{vr}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{s_1}d'_{11} & -K_{s_2}d'_{21} & 0 & 0 & 0 \\ -K_{s_1} & -K_{s_2} & -K_{s_3} & -K_{s_4} & -K_{s_5} \\ K_{s_1}d_{21} & K_{s_2}d_{21} & -K_{s_3}l_3 & -K_{s_4}l_4 & -K_{s_5}l_5 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[K_{rv}] = \begin{bmatrix} -K_{s_1} & -K_{s_1}l_1 & 0 & 0 \\ -K_{s_2} & -K_{s_2}l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{s_3} & -K_{s_3}l_3 \\ 0 & 0 & -K_{s_4} & -K_{s_4}l_4 \\ 0 & 0 & -K_{s_5} & -K_{s_5}l_5 \end{bmatrix} \quad (14)$$

em que $d'_{11} = l_1 + d_{11}$ e $d'_{21} = l_2 + d_{21}$ são as distâncias auxiliares entre o eixo 1 e 2, e a quinta roda.

Enquanto os vetores de aceleração, velocidade, deslocamento e o vetor de forças externas são apresentados como

$$\{\ddot{u}_v\} = \{\ddot{u}_{v_1} \quad \ddot{\theta}_{v_1} \quad \ddot{u}_{v_2} \quad \ddot{\theta}_{v_2}\}^T, \{\ddot{u}_r\} = \{\ddot{u}_{r_1} \quad \ddot{u}_{r_2} \quad \ddot{u}_{r_3} \quad \ddot{u}_{r_4} \quad \ddot{u}_{r_5}\}^T \quad (15)$$

$$\{\dot{u}_v\} = \{\dot{u}_{v_1} \quad \dot{\theta}_{v_1} \quad \dot{u}_{v_2} \quad \dot{\theta}_{v_2}\}^T, \{\dot{u}_r\} = \{\dot{u}_{r_1} \quad \dot{u}_{r_2} \quad \dot{u}_{r_3} \quad \dot{u}_{r_4} \quad \dot{u}_{r_5}\}^T \quad (16)$$

$$\{u_v\} = \{u_{v_1} \quad \theta_{v_1} \quad u_{v_2} \quad \theta_{v_2}\}^T, \{u_r\} = \{u_{r_1} \quad u_{r_2} \quad u_{r_3} \quad u_{r_4} \quad u_{r_5}\}^T \quad (17)$$

$$\{F_r(t)\} = \begin{Bmatrix} C_{r_1}\dot{y}_1(t) + K_{r_1}y_1(t) \\ C_{r_2}\dot{y}_1(t) + K_{r_2}y_1(t) \\ C_{r_3}\dot{y}_1(t) + K_{r_3}y_1(t) \\ C_{r_4}\dot{y}_1(t) + K_{r_4}y_1(t) \\ C_{r_5}\dot{y}_1(t) + K_{r_5}y_1(t) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Para caracterizar as irregularidades da via são empregadas funções harmônicas senoidais (Frýba, 2001), desta forma

$$y(t) = A \sin\left(\frac{2\pi v}{l} t\right) \quad (19)$$

em que v representa a velocidade do veículo, A e l são, respectivamente, a amplitude e o comprimento da onda senoidal.

Os modelos numéricos consideram a passagem do veículo sobre a superfície da estrutura e transmite os esforços gerados entre o veículo e irregularidade de forma

desacoplada para a análise dinâmica linear, ou seja, os efeitos dinâmicos da ponte não afetam as forças provocadas entre o acoplamento do veículo em trânsito e as irregularidades (Abeche, 2015). Neste sentido, os vetores de forças provenientes pelo contato entre o veículo de 4 graus de liberdade e o pavimento são definidos por

$$\{F_{r_1}(t)\} = \left[m_v \frac{l_2}{(l_1 + l_2)} + m_{r_1} \right] g + C_{r_1} [\dot{u}_{r_1}(t) - \dot{y}_1(t)] + K_{r_1} [u_{r_1}(t) - y_1(t)] \quad (20)$$

$$\{F_{r_2}(t)\} = \left[m_v \frac{l_1}{(l_1 + l_2)} + m_{r_2} \right] g + C_{r_2} [\dot{u}_{r_2}(t) - \dot{y}_2(t)] + K_{r_2} [u_{r_2}(t) - y_2(t)] \quad (21)$$

Para o modelo veicular com 5 graus de liberdade, a força exercida pelo veículo sobre a estrutura é

$$\{F_{r_1}(t)\} = \left[m_v \frac{\left(\frac{l_2 + l_3}{2}\right)}{l_1 + \left(\frac{l_2 + l_3}{2}\right)} + m_{r_1} \right] g + C_{r_1} [\dot{u}_{r_1}(t) - \dot{y}_1(t)] + K_{r_1} [u_{r_1}(t) - y_1(t)] \quad (22)$$

$$\{F_{r_2}(t)\} = \left[m_v \frac{l_1}{l_1 + \left(\frac{l_2 + l_3}{2}\right)} + m_{r_2} \right] g + C_{r_2} [\dot{u}_{r_2}(t) - \dot{y}_2(t)] + K_{r_2} [u_{r_2}(t) - y_2(t)] \quad (23)$$

$$\{F_{r_3}(t)\} = \left[m_v \frac{l_1}{l_1 + \left(\frac{l_2 + l_3}{2}\right)} + m_{r_3} \right] g + C_{r_3} [\dot{u}_{r_3}(t) - \dot{y}_3(t)] + K_{r_3} [u_{r_3}(t) - y_3(t)] \quad (24)$$

Finalmente, o veículo com 9 graus de liberdade, a força é dada, para cada eixo do mesmo, por

$$\{F_{r_1}(t)\} = \left\{ \frac{\left[m_{v_1} l_2 + \frac{m_{v_2} l'}{(l' + d_{21})} (l_2 - d_{11}) \right]}{(l_1 + l_2)} + m_{r_1} \right\} g + C_{r_1} [\dot{u}_{r_1}(t) - \dot{y}_1(t)] + K_{r_1} [u_{r_1}(t) - y_1(t)] \quad (25)$$

$$\{F_{r_2}(t)\} = \left\{ \frac{\left[m_{v_1} + \frac{m_{v_2} l'}{(l' + d_{21})} (1 + l_2 - d_{11}) \right]}{(l_1 + l_2)} + m_{r_2} \right\} g + C_{r_2} [\dot{u}_{r_2}(t) - \dot{y}_2(t)] + K_{r_2} [u_{r_2}(t) - y_2(t)] \quad (26)$$

$$\{F_{r_3}(t)\} = \left\{ \frac{m_{v_2} l' d_{21}}{l_3 + l_4 + l_5 + 3d_{21}} + m_{r_3} \right\} g + C_{r_3} [\dot{u}_{r_3}(t) - \dot{y}_3(t)] + K_{r_3} [u_{r_3}(t) - y_3(t)] \quad (27)$$

$$\{F_{r_4}(t)\} = \left\{ \frac{m_{v_2} l' d_{21}}{l_3 + l_4 + l_5 + 3d_{21}} + m_{r_4} \right\} g + C_{r_4} [\dot{u}_{r_4}(t) - \dot{y}_4(t)] + K_{r_4} [u_{r_4}(t) - y_4(t)] \quad (28)$$

$$\{F_{r_5}(t)\} = \left\{ \frac{m_{v_2} l' d_{21}}{l_3 + l_4 + l_5 + 3d_{21}} + m_{r_5} \right\} g + C_{r_5} [\dot{u}_{r_5}(t) - \dot{y}_5(t)] + K_{r_5} [u_{r_5}(t) - y_5(t)] \quad (29)$$

onde $l' = \frac{l_3+l_4+l_5}{3}$ e g é a aceleração da gravidade.

2.2 Modelo da Ponte Rodoviária

Como pode ser apurado na literatura clássica (Bathe, 1996 e Chopra, 1995), para a modelagem da ponte utilizam-se elementos finitos unidimensionais de viga de *Euler-Bernoulli*. Particulariza-se o presente modelo ao elemento de viga com quatro deslocamentos nodais de coordenada dimensional x , e cujas matrizes elementares de rigidez e de massa são dadas, respectivamente, por

$$[M_e] = \rho A L_e \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L_e}{210} & \frac{9}{70} & -\frac{13L_e}{420} \\ \frac{11L_e}{210} & \frac{L_e^2}{105} & \frac{13L_e}{420} & \frac{3L_e^2}{420} \\ \frac{9}{70} & \frac{13L_e}{420} & \frac{13}{35} & -\frac{11L_e}{210} \\ -\frac{13L_e}{420} & -\frac{3L_e^2}{420} & -\frac{11L_e}{210} & \frac{L_e^2}{105} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[K_e] = \frac{EI}{L_e} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} & -\frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 4 & -\frac{6}{L_e} & 2 \\ -\frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} & \frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 2 & -\frac{6}{L_e} & 4 \end{bmatrix} \quad (31)$$

em que os parâmetros geométricos L_e , A e I , representam respectivamente o comprimento do elemento, a área de seção transversal e o momento de inércia, enquanto as grandezas físicas ρ e E são, respectivamente, a massa específica e o módulo de elasticidade do material. Os esforços externos aplicados ao elemento finito de viga podem ser escritos como

$$\{F_e(t)\} = \int_0^{L_e} p(x,t)[H]^T dx \quad (32)$$

onde $[H]$ possui as funções polinomiais cúbicas de *Hermite* conforme mostrado abaixo

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{L_e}\right) + 2\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 \\ \frac{L_e}{8} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{L_e}\right) + \frac{x^3}{L_e^2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{L_e}\right) - 2\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 \\ -\frac{L_e}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{L_e}\right) + \frac{x^3}{L_e^2} \end{bmatrix} \quad (33)$$

onde x corresponde à coordenada longitudinal em que se encontram os pontos de contato das rodas em cada do elemento. Referindo-se a velocidade do veículo como $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, torna-se a coordenada longitudinal x em função do tempo, assim, conforme Abeche (2015), a Eq. (33) fica

$$[H^*] = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{vt}{L_e} \right) + 2 \left(\frac{vt}{L_e} \right)^2 \\ \frac{L_e}{8} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{(vt)^2}{L_e} \right] + \frac{x^3}{L_e^2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{vt}{L_e} \right) - 2 \left(\frac{vt}{L_e} \right)^2 \\ -\frac{L_e}{8} - \frac{vt}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{(vt)^2}{L_e} \right] + \frac{(vt)^3}{L_e^2} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Substituindo as equações das forças de contato em (32), obtém-se o vetor de força externa elementar produzido pela excitação de base do veículo

$$\{F_e(t)\} = -\{F_r(t)\}[H^*] \quad (35)$$

em que o sinal negativo, expresso na Eq. (35), é atribuído em virtude do sistema convencional adotado (Abeche, 2015).

Uma vez determinadas as matrizes elementares de rigidez e massa e o vetor de força elementar, são montadas as matrizes globais da estrutura por meio da conectividade de cada elemento. Considerando a matriz de amortecimento de *Rayleigh*, obtém-se a equação global de movimento para a ponte, conforme Abeche (2015)

$$[M_p]\{\ddot{u}_p\} + [C_p]\{\dot{u}_p\} + [K_p]\{u_p\} = \{F_p(t)\} \quad (36)$$

onde $[M_p]$ é a matriz global de massa, $[C_p]$ a matriz global de amortecimento e $[K_p]$ a matriz global de rigidez, $\{u_p\}$, $\{\dot{u}_p\}$ e $\{\ddot{u}_p\}$ são, respectivamente, os vetores globais de deslocamentos, velocidades e acelerações, e $\{F_p(t)\}$ é o vetor de força externa. Para a integração temporal da Eq. (36), utiliza-se o método de *Newmark* com aceleração média (Abeche, 2015).

3 ANÁLISE DINÂMICA LINEAR DA INTERAÇÃO ENTRE VEÍCULO E ESTRUTURA

A presente análise visa comparar as respostas dinâmicas dos modelos de interação desacoplada entre os modelos veiculares com 4, 5 e 9 graus de liberdade respectivamente.

A Figura 4 tenta ilustrar o veículo, com velocidade v , passando pela ponte e suas condições de contorno.

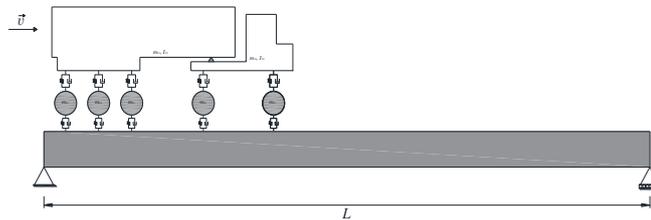


Figura 4. Sistema veículo e ponte.

Fonte: (Autor, 2018)

Na discretização por elementos finitos, utilizou-se uma malha unidimensional contendo 100 elementos. Enquanto o método implícito de integração direta, método de *Newmark* (Machado, 1983), os valores dos parâmetros γ e β foram 0.25 e 0.5 respectivamente. A Tabela 1 apresenta os dados de entrada, como as propriedades geométricas e do material e a velocidade com que a mesma atravessa a estrutura.

Tabela 1. Parâmetros da viga e da força móvel.

Parâmetros	Valor	Unidade (SI)
L	20	m
I	0.48	m^4
A	2.724	m^2
E	$3 \cdot 10^{10}$	N/m^2
ρ	2569.75	kg/m^3
v	10	m/s

Para a simulação numérica dinâmica linear, utilizaram-se os mesmos parâmetros globais da estrutura apresentados na subseção anterior. No entanto, admitiu-se a matriz de amortecimento de *Rayleigh* no modelo dinâmico, através de uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez. A taxa de amortecimento da estrutura adotada foi de 3%.

O contato entre os sistemas ocorre através das irregularidades da via. Na representação de tais irregularidades, aplicaram-se funções harmônicas senoidais com amplitude de $0.001 m$ e comprimento de onda de $0.005 m$.

Nas Tabelas 2 e 3 apresentam-se os valores das massas dos corpos rígidos e os parâmetros das suspensões de cada modelo veicular em estudo, respectivamente.

Tabela 2. Parâmetros para os veículos de 4 e 5 graus de liberdade.

Características Dinâmicas	Valor	Unidade (SI)
m_v	22233	kg
m_{r_1}	635	kg
$m_{r_2} = m_{r_3}$	1066	kg
I_v	53000	m^4
K_{s_1}	58000	N/m
$K_{s_2} = K_{s_3}$	1180000	N/m
C_{s_1}	6000	Ns/m
$C_{s_2} = C_{s_3}$	12000	Ns/m
K_{r_1}	1680000	N/m
$K_{r_2} = K_{r_3}$	3360000	N/m

Continuação da Tabela 2

C_{r_1}	2000	Ns/m
$C_{r_2} = C_{r_3}$	4000	Ns/m
l_1 (4 GL)	2.5	m
l_2 (4 GL)	2.5	m
l_1 (5 GL)	3.98	m
l_2 (5 GL)	0.82	m
l_3 (5 GL)	2.12	m

Tabela 3. Parâmetros do veículo de 9 graus de liberdade.

Características Dinâmicas	Valor	Unidade (SI)
m_{v_1}	9100	kg
m_{v_2}	38742	kg
$m_{r_1} = m_{r_2} = m_{r_3} = m_{r_4} = m_{r_5}$	980	kg
I_{v_1}	53787	m ⁴
I_{v_2}	415081	m ⁴
$K_{s_1} = K_{s_2} = K_{s_3} = K_{s_4} = K_{s_5}$	1180000	N/m
$C_{s_1} = C_{s_2} = C_{s_3} = C_{s_4} = C_{s_5}$	12000	Ns/m
$K_{r_1} = K_{r_2} = K_{r_3} = K_{r_4} = K_{r_5}$	3360000	N/m
$C_{r_1} = C_{r_2} = C_{r_3} = C_{r_4} = C_{r_5}$	4000	Ns/m
l_1	1.83	Ns/m
l_2	2.37	m
l_3	1.13	m
l_4	2.37	m
l_5	3.62	m
d_{11}	2.05	m
d_{21}	5.27	m

Os pneus são modelados como um conjunto de molas e amortecedores que conectam os eixos ao pavimento. Os valores para os parâmetros de rigidez e o coeficiente de amortecimento estão fundamentados na literatura clássica (Gillespie *et al*, 1992).

As Figuras 5, 6 e 7 ilustram as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração no centro da estrutura. Os resultados são comparados entre os modelos veiculares de 4, 5 e 9 graus de liberdade.

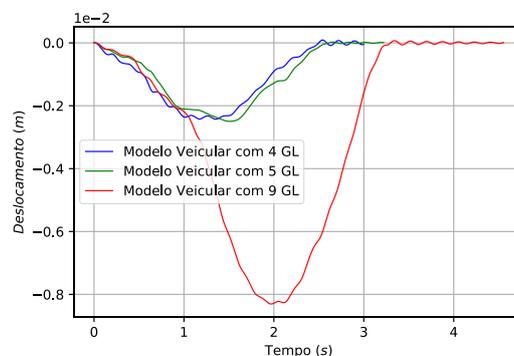


Figura 5. Respostas dinâmicas de deslocamento no centro da ponte.

Fonte: (Autor, 2018)

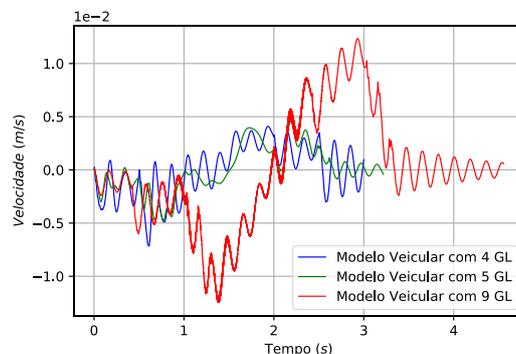


Figura 6. Respostas dinâmicas de velocidade no centro da ponte.

Fonte: (Autor, 2018)

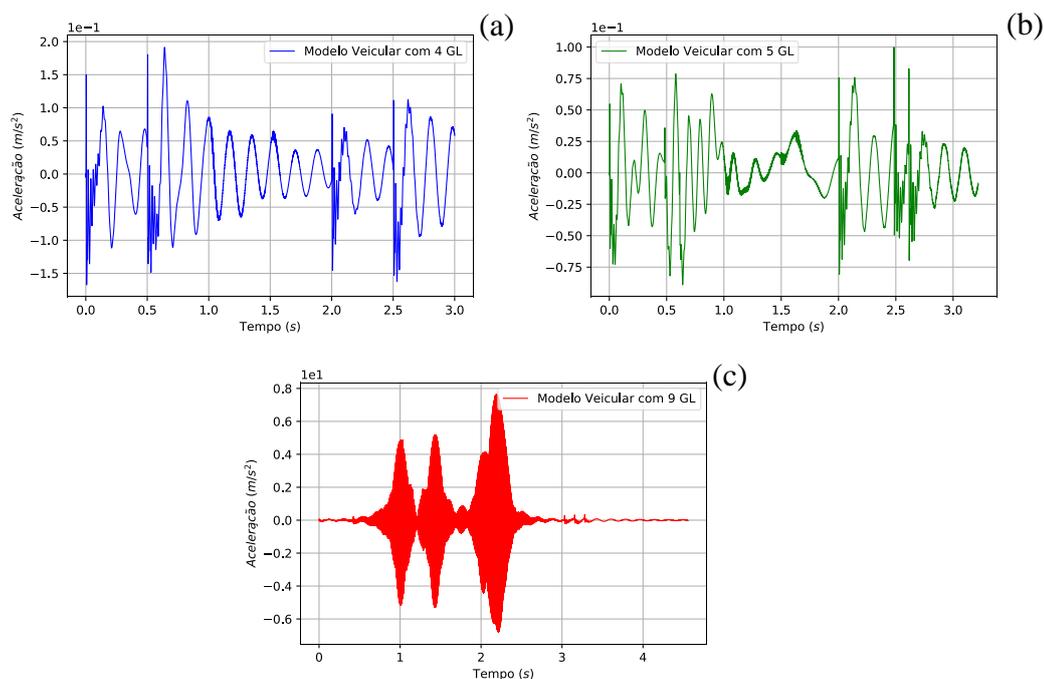


Figura 7. Respostas dinâmicas de aceleração no centro da ponte: (a) veículo com 4 graus de liberdade; (b) veículo com 5 graus de liberdade; (c) veículo com 9 graus de liberdade.

Fonte: (Autor, 2018)

Na Figura 5, observam-se as deflexões dinâmicas no centro da estrutura, para os modelos de veículo com 4, 5 e 9 graus de liberdade. No centro do vão os máximos valores são maiores na análise do veículo de 9 graus de liberdade pois, como seria de esperar, o mesmo possui uma massa 2.5 vezes maior do que os outros veículos analisados.

Ao analisar a Figura 6, as velocidades do modelo veicular com 9 graus de liberdade possuem maiores amplitudes para o mesmo intervalo de tempo. Porém, percebe-se uma maior amplitude das respostas dinâmicas lineares de velocidade quando o modelo de 4 graus de liberdade entra na ponte.



Igualmente ao constatado nas respostas anteriores, ao avaliar a Figura 7, observa-se que as respostas dinâmicas de aceleração são maiores para o modelo de interação entre o veículo de 9 graus de liberdade com picos de $7.5 m/s^2$. Enquanto nos modelos veiculares de 4 e 5 graus de liberdade, possuem $0.19m/s^2$ e $0.10m/s^2$ respectivamente.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho abordou o modelo de interação dinâmica desacoplada entre veículo e ponte rodoviária com irregularidade na pista para diferentes modelos veiculares. Os modelos matemáticos adotados traduziram de forma adequada o comportamento de pontes rodoviárias, submetidas à passagem de veículo sobre a superfície irregular.

A metodologia de análise desenvolvida na concepção da resposta do sistema veículo e ponte apresenta-se coerente, referindo-se a aspectos qualitativos e quantitativos da resposta, assegurando confiabilidade aos resultados. Neste sentido, este trabalho contribui para a análise dinâmica de pontes sujeitas a composições veiculares complexas e que não são contempladas pelas normas de projeto de ponte.

5 REPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis por todo o conteúdo publicado neste artigo.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor gostaria de agradecer aos outros autores e reconhecer o suporte financeiro providenciado pela CAPES.

REFERÊNCIAS

Abeche, T. D. O., 2015. Modelagem Computacional da Interação Dinâmica Desacoplada entre Viga e Veículo Considerando as Irregularidades da Via e a Mecânica do Dano Contínuo, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR), Curitiba, PR.

Almeida, R. S., 2006. Análise de Vibrações em Pontes Rodoviárias Induzidas pelo Tráfego de Veículos sobre Pavimentos Irregulares, Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, RJ.

Araujo, A. O., 2014. Modelos Analíticos-Numéricos para Interação Dinâmica Veículo-Pavimento-Estrutura de Ponte Rodoviária, Dissertação de Mestrado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ.

Bathe, K. J., 1996. Finite Element Procedures. Prentice-Hall.

Beghetto, F. L. M., 2011. Modelagem tridimensional da interação dinâmica entre veículo e ponte ferroviária considerando contato roda-trilho, irregularidades da via e variação da



velocidade, Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR), Curitiba, PR.

Chopra, A. K., 1995. Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, Vol. 3. New Jersey: Prentice Hall.

Ferreira, L. J. F., 2013. Resposta Temporal de Vigas com Vibro-Impacto Utilizando Modelos de Força de Contato, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP.

Fryba, L., 1972. Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Groningen: Noordhoff.

Fryba, L., 2001. A rough assessment of railway bridges for high-speed lines. Engineering Structures.

Gillespie, T. D., Karamihas, S. M., Cebon, D., et al, 1992. Effects of heavy vehicle characteristics on pavement response and performance, The University of Michigan Transportation Research Institute, UMTRI 92-2.

Goldstein, H., Poole, C. and Safko, J., 2002. Classical mechanics.

Lowan, A., 1935. On Transverse Oscillations of Beams under the Action of Moving Variable Loads, Philosophical Magazine, Vol. 19, pp. 708-715.

Machado, R. D., 1983. Análise Dinâmica Não-Linear de Sistemas Rígido-Flexíveis. Dissertação de Mestrado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ.

Melo, E. S., 2007. Interação Dinâmica Veículo-Estrutura em Pequenas Pontes Rodoviárias. Dissertação de Mestrado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ.

Mendonça, R. F., 2009. Geração de Dados para Modelo Dinâmico de Cargas Móveis em Pontes. Dissertação de Mestrado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ.

Montoya, R. C. A., 2009. Desenvolvimento de Algoritmo e Implementação Computacional para a Análise Dinâmica de Pontes Ferroviárias Considerando Interação Veículo-Estrutura. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, PA.

Rossigali, C. E., 2013. Atualização do Modelos de Cargas Móveis para Pontes Rodoviárias de Pequenos Vãos no Brasil. Tese de Doutorado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ.

Yang, Y. B. and Yau, J. D., 1997. Vehicle-Bridge Interaction Element for Dynamic Analysis, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 123, Issue 11: 15121-8.