



"Atuação profissional de
gestores no mercado
atual"

18 a 20 | OUTUBRO
Governador Valadares - MG

ANÁLISE DE DESEMPENHO DE FILAS M/M/1 UTILIZANDO O PACOTE QUEUEING

PALAVRAS-CHAVE: Filas Markovianas; Simulação estocástica; pacote queueing; Software livre R.

RESUMO

Este artigo aborda sobre como analisar um sistema de filas do tipo $M/M/1$, ou seja, os tempos entre chegadas sucessivas e os tempos de atendimento seguem distribuições exponenciais com capacidade finita e estação única, a disciplina de filas é do tipo *FCFS* (*first come first served*). Será utilizado o pacote *queueing* do software livre R, esse pacote automatiza o cálculo das medidas de desempenho de diversos tipos de modelos e redes de filas. Foram realizados diferentes testes para diferentes taxas de chegadas por unidades de tempo, que depois foram comparadas graficamente. O leitor, ao término de sua leitura, obterá tanto o conhecimento da utilidade do pacote *queueing* para análise de sistemas $M/M/1$, assim como das principais características de um modelo $M/M/1$.

INTRODUÇÃO

A Teoria de Filas é um ramo da teoria das probabilidades que se iniciou por volta de 1940 com Agner K. Erlang, matemático e engenheiro de telecomunicações dinamarquês, quando decidiu aplicar tais conhecimentos na resolução de problemas de tráfego de telefonia [2]. Filas fazem parte do cotidiano de qualquer ser humano comum, acontecem sempre que a procura por determinado serviço é maior que a capacidade de atendê-lo e, sendo assim, é algo que necessita ser controlado, pois, caso contrário, gera insatisfação por parte do cliente. Por outro lado, também existe o lado do empreendedor que deseja ter lucro, o que não acontecerá caso a capacidade do sistema seja aumentada demasiadamente tornando-o ocioso. Para isso, a Teoria das Filas fornece as denominadas medidas de desempenho de um sistema ou processo de filas que expressam a funcionalidade ou operacionalidade dos mesmos. Dentre essas medidas, podem-se citar: número médio de elementos na fila e no sistema, tempo médio de espera na fila e no sistema, dentre outras. Porém, o cálculo de tais medidas torna-se tedioso mesmo com auxílio de calculadora, sendo necessário algum tipo de ferramenta computacional que automatize esses cálculos. Posto isso, neste trabalho, o leitor conhecerá as potencialidades do pacote *queueing* [1] disponível no software livre R, aplicado a uma fila $M/M/1$, ou seja, uma fila com chegadas exponenciais, serviço com distribuição exponencial, um único servidor, sem limite na "sala de espera" e atendimento por ordem de chegadas [3]. As principais características de um sistema de filas são: processo de chegada (A), distribuição do tempo de serviço (B), número de servidores (c), capacidade do sistema (k) e disciplina de atendimento (Z). Para descrever uma fila utiliza-se a notação de Kendall $A/B/c/k/Z$ [4]. A omissão de k e Z indica que a fila tem capacidade infinita e disciplina *FCFS* (*first come first served*).

METODOLOGIA

No modelo $M/M/1$, os tempos entre chegadas sucessivas e os tempos de atendimento seguem distribuições exponenciais, existe um único posto de atendimento, não há espaço reservado para a fila de espera e a ordem de acesso de usuários ao serviço é a de chegada. Supondo que o sistema de filas atinja um regime estacionário, isto é, foi observado durante um longo período de tempo, é possível calcular suas medidas de desempenho, o que será feito neste trabalho, por meio do pacote *queueing* do R.

O uso do pacote *queueing* é simples. Para criar a entrada de um modelo. Após carregar o pacote *queueing*, basta utilizar a função *NewInput.model* [1], por exemplo, $x \leftarrow \text{NewInput.MM1}(\lambda=0.25, \mu=1, n=10)$ para um modelo $MM1$ com taxas de 0.25 chegadas por unidade de tempo ($\lambda=0.25$) e de 1 atendimento por unidade de tempo ($\mu=1$

). O valor de n se refere ao número máximo de clientes no sistema a partir do qual se deseja obter as probabilidades. Esses são os parâmetros necessários para o cálculo das medidas de desempenho, a função recebe esses dados e fornece

valores como: taxa de utilização do sistema (ρ), número médio de clientes na fila (Lq), número médio de clientes no sistema (L), tempo médio de espera na fila (Wq) e o tempo médio de espera no sistema (W). A solução do modelo se dá pelo comando $y \leftarrow \text{QueueingModel}(x)$, sendo possível obter um resumo das principais medidas chamando $\text{summary}(y)$. É possível também obter o valor de cada medida especificamente, como, por exemplo, com os comandos $W(y)$ e $Wq(y)$ obtém-se o tempo médio de espera no sistema e na fila, respectivamente.

Para uma melhor demonstração da utilidade desse pacote na análise de filas M/M/1, foi desenvolvido um algoritmo em linguagem R que simula diversos tipos de filas e plota os gráficos de probabilidades sobrepostos sendo possível comparar casos de diferentes taxas de chegadas e atendimento.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Primeiramente, foi proposto um modelo MM1 com $\lambda=0.3$, $\mu=0.5$ e $n=5$:

```
x<-NewInput.MM1(lambda=0.3,mu=0.5,n=5)
y<-QueueingModel(x)
summary(y)
```

Os resultados obtidos encontram-se na tabela 1:

lambda	mu	RO	Lq	Wq	L	W	P0
0.3	0.5	0.6	0.9	3	1.5	5	0.4

Tabela 1: Valores obtidos para as medidas de desempenho de uma fila M/M/1.

Posteriormente, utilizando o algoritmo desenvolvido, foi sendo feito o mesmo procedimento para diferentes taxas de atendimento:

```
> medidas
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5] [, ,6]
[1, ] 0.6 0.900000 1.500000 5.000000 3.000000 0.4
[2, ] 0.7 1.633333 2.333333 6.666667 4.666667 0.3
[3, ] 0.8 3.200000 4.000000 10.000000 8.000000 0.2
[4, ] 0.9 8.100000 9.000000 20.000000 18.000000 0.1
```

λ	Ro	Lq	L	W	Wq	P0
0.3	0.6	0.9	1.5	5	3	0.4
0.35	0.7	1.63	2.3	6.67	4.67	0.3

0.4	0.8	3.2	4	10	8	0.2
0.45	0.9	8.1	9	20	18	0.1

Tabela 2: Valores obtidos para as medidas de desempenho de uma fila $M/M/1$ com diferentes taxas de atendimento.

A Figura 1 mostra os gráficos de probabilidades (P_n) para essas taxas de atendimento da Tabela 2.

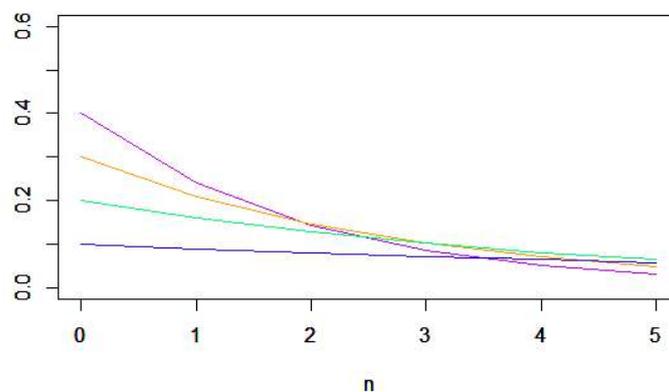


Figura 1: Gráfico de probabilidades para $\lambda = 0.3, 0.35, 0.4$ e 0.45

Ao aumentar a taxa de chegada, foram percebidas situações com maiores taxas de utilização e, consecutivamente, maiores tempos médios de espera na fila e no sistema, assim como uma maior quantidade de clientes presentes na fila e no sistema. A partir dos gráficos gerados para as probabilidades de existência de n clientes no sistema, notou-se que a medida que n cresce, as probabilidades diminuem e quanto maior a taxa de utilização mais P_n tende a zero.

Pode-se plotar os gráficos de probabilidade com os seguintes comandos:

```
plot(n, pn(y), type="l", ylim=c(0, 0.6), ylab="", col="green")
```

Utiliza-se `par(new=true)` antes do comando acima caso o usuário deseje que um gráfico se sobreponha ao outro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir deste trabalho, o leitor obteve o conhecimento da utilidade do pacote *queueing* para análise de sistemas $M/M/1$. Os resultados obtidos na Tabela 2 e na Figura 1 permitem uma visão global das principais características de tais modelos de filas. É necessário ressaltar que o pacote *queueing* não se limita apenas às filas $M/M/1$ e caso o leitor deseje usufruir as ferramentas desse pacote para outros sistemas de fila, basta digitar o comando `help("queueing")` nas linhas de comando do R.

REFERÊNCIAS

- CANADILLA, Pedro. **R Package queueing**. URL: <https://www.r-project.org>. 2013.
 FOGLIATTI, M.C; MATTOS; N.M.C. **Teoria de Filas**. 1ªed. Rio de Janeiro: Interciência, 2007.
 GROSS, Donald; HARRIS, C. **Fundamentals of Queueing Theory**. Nova Iork. John Wiley & Sons, Ltd (1985).



"Atuação profissional de
gestores no mercado
atual"

18 a 20 | OUTUBRO
Governador Valadares - MG

KENDALL, David G. **Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain.** The Annals of Mathematical Statistics. 338-354 (1953).