

TRAJETÓRIAS GEODÉSICAS DE PARTÍCULAS MASSIVAS NA GEOMETRIA DE SCHWARZSCHILD

CRUZ, Jose Maria¹; CARNEIRO, Fernando Lessa²

RESUMO

Este trabalho investiga as trajetórias geodésicas de partículas massivas na geometria de Schwarzschild, comparando as previsões da Teoria da Gravitação Universal de Newton com as da Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein. Utilizando métodos analíticos e numéricos, foi possível derivar a solução de Schwarzschild para o campo gravitacional externo de um objeto esférico e não rotativo. A análise das equações geodésicas permitiu compreender como a curvatura do espaço-tempo influencia as trajetórias de corpos celestes. Em particular, este estudo foca no desvio do periélio de Mercúrio, um fenômeno que não pode ser explicado pela mecânica newtoniana, mas que é previsto com precisão pela TRG. Os resultados obtidos reforçam a necessidade da relatividade geral em contextos de campos gravitacionais intensos, especialmente ao descrever o comportamento de corpos massivos como

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica (PIBIC/PIBITI). Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de XXXX. e-mail.

2 Voluntário do Programa de Iniciação Científica (PIVIC). Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de XXXX. e-mail.



estrelas e buracos negros.

Palavras-chave: Teoria Relatividade Geral. Geometria de Schwarzschild. Trajetórias Geodésicas. Periélio de Mercúrio.

I. INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

Desde os tempos antigos, o estudo do movimento dos planetas sempre fascinou a humanidade, levando a longas horas de observação do céu. Segundo (BERNADES E TERRA, 2014), as primeiras investigações realizadas pelo homem pré-histórico focavam no movimento de estrelas e planetas, permitindo a definição de épocas propícias para o plantio e colheita. Em 1546, nasceu Tycho Brahe, um dos astrônomos mais proeminentes de sua época. Ele construiu instrumentos precisos para determinar o movimento dos corpos celestes, desempenhando um papel fundamental na história da ciência. Suas observações detalhadas possibilitaram que Johannes Kepler formulasse suas leis do movimento planetário, que mais tarde influenciariam a síntese de Isaac Newton. (ZANETIC, 1988) destaca que o rigor de Kepler com a precisão das medidas levou à formulação de sua primeira lei. Diferenças de oito minutos entre a órbita circular de Marte e as observações de Tycho o fizeram abandonar o círculo em favor da elipse, mostrando sua genialidade. Entre 1609 e 1618, Kepler publicou suas três leis do movimento planetário, descrevendo os



movimentos dos planetas ao redor do Sol, onde os planetas se movem mais rápido quando estão mais próximos do Sol e mais lentamente quando estão mais distantes.

Isaac Newton, no século XVII, fundamentou-se nos estudos de Galileu Galilei, Johannes Kepler e René Descartes. Utilizando as observações precisas de Kepler e a análise matemática de Galileu e Descartes, formulou suas próprias teorias, destaca (NOVELLO, 2015) unificou as leis de movimento dos corpos na Terra e no Sistema Solar incluindo a sua teoria da Gravitação Universal. Esta lei postula que a mesma força que mantém a Lua em órbita é a mesma força que faz os objetos caírem na superfície da Terra. Newton formulou a atração gravitacional entre dois corpos pontuais, que é diretamente proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa.

Albert Einstein revolucionou nossa compreensão da gravidade, com sua TRG. Hoje a gravidade é entendida como uma curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia, demonstrando que a gravidade influencia a velocidade com que o tempo passa, em regiões de maior gravidade, o tempo passa mais devagar em relação a regiões de menor gravidade conforme medido por um observador estático externo na ausência de gravidade.

II. BASE TEÓRICA



As equações de Campo de Einstein apresentadas na TRG representam a descrição matemática da entidade geométrica conhecida como espaço-tempo, que é definida por três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal. Segundo (SOARES, 2013) Einstein utiliza o formalismo tensorial para expressar as suas equações de campo, sendo assim, a TRG é uma teoria tensorial. O conceito fundamental da TRG é sobre a curvatura do espaço-tempo, sendo assim, descreve como a presença de massa e energia causa a distorção do espaço e do tempo. O autor (SANTOS, 2018) diz, o espaço-tempo se curva diante da massa de uma matéria e como a matéria reage a curvatura do Espaço-Tempo, chegando assim, em um determinado equilíbrio baseado na igualdade da equação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

Menos de dois meses após a publicação da TRG, o astrônomo alemão Karl Schwarzschild, que já estava profundamente envolvido com os trabalhos de Einstein sobre gravitação, alcançou um feito notável: encontrou uma solução para as complexas equações propostas por Einstein (LOBO, 2006), contribuindo significativamente para o desenvolvimento posterior da TRG e para a compreensão moderna da gravidade.

III. OBJETIVOS



Investigar as diferenças entre as trajetórias de partículas massivas na Teoria da Gravitação Universal e na TRG, assim como a Relatividade Geral oferece uma explicação precisa que complementa e expande as observações clássicas de Kepler.

IV. METODOLOGIA

O estudo da geodésia no espaço tempo de Schwarzschild permite compreender como as partículas seguem geodésicas (caminhos naturais) sob a influência da gravidade. O presente trabalho tem cunho teórico, focando na análise rigorosa dos fundamentos teóricos e das soluções obtidas através de métodos analíticos e numéricos. No entanto, essas investigações teóricas podem fornecer informações valiosas para futuras observações e testes experimentais da TRG em cenários de buracos negros.

V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A solução de Schwarzschild descreve o espaço-tempo ao redor de um corpo esférico e não rotativo e é fundamental para a relatividade geral. A métrica que rege esse espaço-tempo é dada por,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

As partículas massivas seguem trajetórias chamadas geodésicas, que são descritas pela seguinte equação diferencial,



$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

essa equação descreve o movimento das partículas sob a influência da curvatura do espaço-tempo. No caso específico de movimento radial, obtemos a seguinte equação para a trajetória da partícula,

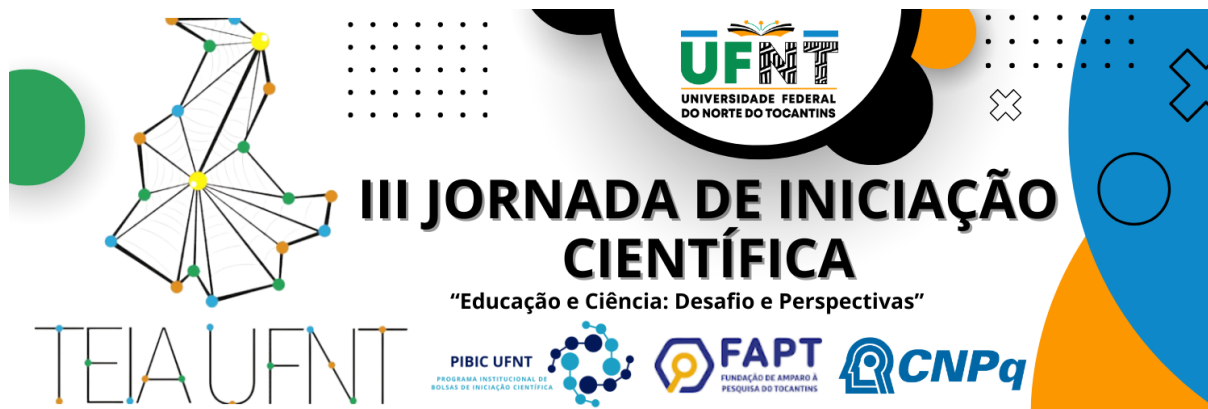
$$\dot{r} + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2(k^2 - 1).$$

Para simplificar a análise da órbita, introduzimos a variável $u = \frac{1}{r}$, levando à equação orbital modificada que inclui a correção relativística,

$$\ddot{u} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2.$$

VI. CONCLUSÃO/CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos, confirmam a necessidade de se utilizar a TRG para explicar o desvio do periélio de Mercúrio, algo que a mecânica newtoniana por si só não consegue prever. A equação de campo de Einstein, juntamente com a solução de Schwarzschild, mostrou-se fundamental para descrever com precisão os efeitos da curvatura do espaço-tempo no vácuo em torno de corpos massivos. Assim, o estudo do periélio de Mercúrio não apenas valida as previsões relativísticas, mas também



ressalta a relevância da TRG em situações astrofísicas de altas intensidades gravitacionais.

VII. REFERÊNCIAS

BERNADES, A. O.; TERRA, P. W. **História da astronomia no ensino médio: Discutindo a cosmologia grega através do modelo de universo de eudoxo.** UENF - Universidade do Norte Fluminense, 2014.

HOBSON, M.; EFSTATHIOU, G.; LASENBY, A. **General Relativity An Introduction for Physicists.** [S.I.]: Cambridge University, 2006.

LOBO, M. P. **No interior do horizonte de um buraco negro de schwarzschild.** Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145, 01405-900, São Paulo, SP, Brasil, 2006.

SANTOS, C. M. A. **Equações diferenciais e a equação de campo de Einstein.** Universidade Federal de Goiás Regional de Jataí, 2018.

SOARES, D. **Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativista.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 3, 3302, 2013.

ZANETIC, J. **Dos principia da mecânica aos principia de newton.** Instituto de Física - USP, São Paulo, 1988.

NOVELLO, M. **A interação gravitacional.** Carbono, Natureza Ciência e Arte, nº5, 2015.

VIII. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq – Brasil