



UMA ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA ENGENHARIA ESTRUTURAL BASEADA NA ANÁLISE NUMÉRICA DE BARRAS SOB TORÇÃO

A didactical strategy for structural engineering based on the numerical analysis of bars subjected to torsion

Natan Sian das Neves (1); Vitor Pancieri Pinheiro (2); Daniel Carvalho de Moura
Candido (3); Carlos Friedrich Loeffler Neto (4); Norminda Luiza Bodart (5);

- (1) Eng. Civil, PPGEC, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil.
- (2) Me. Eng. Mecânica-PPGEM- Universidade Federal Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil.
- (3) Eng. Civil, PPGEC, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil.
- (4) Dr. Prof.-PPGEM, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.
- (5) Me. Profa. UVV, Universidade Vila Velha, Vila Velha – ES, Brasil.

Email para Correspondencia: natan.sian@gmail.com; (P) Natan Sian das Neves

Resumo: No âmbito do ensino de engenharia estrutural, um dos grandes desafios consiste em elucidar os conceitos fundamentais, de forma a desenvolver no discente a habilidade de associar um fenômeno físico com os modelos matemáticos disponíveis na literatura, juntamente com a capacidade de compreender e implementar as técnicas de solução de tais modelos. Sendo assim, o objetivo do vigente artigo é expor uma estratégia para analisar com viés educacional, os efeitos de torção sobre elementos de barra, oriundos do carregamento de um sistema estrutural completo. A metodologia adotada se inicia com a representação do comportamento de um sistema estrutural sujeito à uma solicitação externa, seguida da análise dos efeitos de tal solicitação em um único elemento de barra, nesse caso, sujeito à torção. Executa-se então uma análise analítica de tensões na barra, por meio da função tensão de Prandtl, com foco nas premissas e limitações inerentes ao modelo do qual essa função se origina, de forma que sua proximidade com a realidade física possa ser compreendida com precisão. Em seguida, a mesma análise é executada numericamente através dos Métodos de Diferenças Finitas (MDF) e Elementos de Contorno (MEC), incluindo uma breve exposição da matemática por trás de cada método. Por fim, os resultados numéricos são validados pela solução analítica e comparados entre si. A inclusão desta comparativa tem por objetivo adicional expor algumas das ferramentas computacionais disponíveis ao engenheiro no trato de um determinado problema de interesse. O artigo resultante é uma estratégia conceitual para o ensino de engenharia estrutural, que pode ser útil para profissionais de ensino nessa área, na solução dos desafios mencionados à priori.

Palavras chaves: ensino; métodos numéricos; torção; elasticidade; engenharia estrutural.

Abstract: When teaching structural engineering, one of the major challenges is to elucidate fundamental concepts in a manner that allows students to develop the ability to associate a



physical phenomenon with the corresponding mathematical models available in the literature, as well as understand and implement the available solutions for such models. In this context, the objective of this article is to devise a strategy for analyzing, with an educational bias, the effects of torsion on bar elements, originated from a load applied to an entire structural system. The methodology adopted begins with a representation of the behavior of a structural system subjected to a given external load, followed by the analysis of the effects of said load in a single bar element that is, in this case, subjected to torsion. An analytical stress analysis is then performed on the bar by means of the Prandtl stress function, with focus on the premises and limitations inherent to such function and the differential model that it originates from, so that its proximity to physical reality can be fully comprehended. Lastly, the same analysis is performed numerically by means of the Finite Differences (FDM) and Boundary Element (BEM) methods, including a brief exposition of the mathematics behind each method. The results of both techniques are then validated by the analytical solution and compared with each other. The inclusion of this comparison has the additional objective of exposing some of the computational tools available to an engineer when dealing with a given problem. The resulting article is a conceptual strategy for teaching the fundamentals of structural engineering, that the authors believe may prove to be useful for academic professionals of this field, when overcoming the aforementioned challenges.

Keywords: teaching; numerical methods; torsion; elasticity; structural engineering.



1 INTRODUÇÃO

Com o decorrer do avanço científico e tecnológico, a engenharia estrutural tornou-se uma área com crescente investimento e pesquisa devido às diversas aplicações práticas na engenharia, como em peças mecânicas, estruturas aeronáuticas e navais, ou usualmente na construção civil. Em particular na engenharia civil, elementos primitivos isolados como barras, vigas, pilares ou lajes, em geral constituem um sistema estrutural, como pontes, edificações, torres e etc. Comumente, tais estruturas devem estar preparadas para suportar diversas influências externas, como cargas adicionais, efeitos térmicos, ações do vento, vibrações e entre outras, ao passo que, a análise estrutural atinge grau de dificuldade maior com a concatenação de tais efeitos (Carvalho; Filho, 2010).

As inúmeras complexidades que uma estrutura apresenta corroboram com as dificuldades no ensino de estruturas dentro da academia, acarretando em um déficit no processo de aprendizado dos discentes. Dentro deste contexto, faz-se necessário aos docentes formas e recursos didáticos a fim de potencializar a assimilação do conteúdo das disciplinas. Dentro deste direcionamento de maximizar o binômio ensino-aprendizagem, o uso de estratégias de ensino e contextualização com situações reais na engenharia estimulam os discentes a explorar os abstratismos matemáticos e interpretações físicas (Bortolo; Linhares, 2006; Guimarães, 2018).

Neste contexto, associado ao processo de ensino, deve-se figurar também no aprendizado dos discentes a importância da construção de uma base técnica sólida. No vigente trabalho aborda-se o problema de torção, devido possibilitar uma discussão tanto no campo de ensino como no técnico. Este problema físico possui aplicações sofisticadas como em Teimoori et al (2016), Ecsedi e Baksa (2010), Strek et al (2016) e Hosseini et al (2016). Assim, os discentes devem ter um entendimento físico-matemático preliminar de um modelo com caráter simplista, que fornece a base necessária para tal poder realizar a extrapolação dos conceitos em um problema de escala maior.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO E DELIMITAÇÃO DO FENÔMENO FÍSICO

Dentro do curso de engenharia civil, a gama de conteúdos associadas a mecânica dos sólidos tem papel fundamental do processo formação de uma base conceitual-matemática sólida acerca dos conceitos primitivos sobre comportamento estrutural. Usualmente, os problemas físicos abordados em tais disciplinas, no nível de graduação, tem modelos simplificados e unidimensionais, como flexão de barras, flambagem de colunas, torção ou barra sob carga axial. Esta linha de raciocínio na graduação fornece um entendimento inicial sobre os efeitos e comportamentos de elementos estruturais aos alunos (Popov, 1968; Hibbeler, 2010).

Contudo, a extrapolação de tais conceitos adquiridos no ciclo básico, aplicado em problemas com maior grau de complexidade nem sempre é de fácil entendimento aos discentes, devidos alguns fatores, como por exemplo, a teoria adotada não permite tantas simplificações como nos problemas clássicos da mecânica dos sólidos, a difícil visualização do problema físico dentro do contexto real, os procedimentos matemáticos tornam-se um pouco mais abstratos, o modelo adotada nem sempre tem solução analítica ocasionando o uso de técnicas aproximadas e entre outros obstáculos (Lima et al., 2016; Moreira; Pitangueira, 2018)

Neste âmbito, quando se analisa a torção de barras de seção circular verifica-se que a natureza do problema física é axissimétrico, ou seja, o problema torna-se unidimensional, pois a tensão varia radial ao longo da seção circular da peça. Todavia, o problema de torção de barras de seção retangular é bidimensional, isto é, a equação de governo é parcial e deve-se recorrer à teoria da elasticidade (Timoshenko; Goodier, 1951). Para exemplificar a aplicabilidade deste problema na engenharia civil, considere um esquema contextualizado conforme a Figura 1.

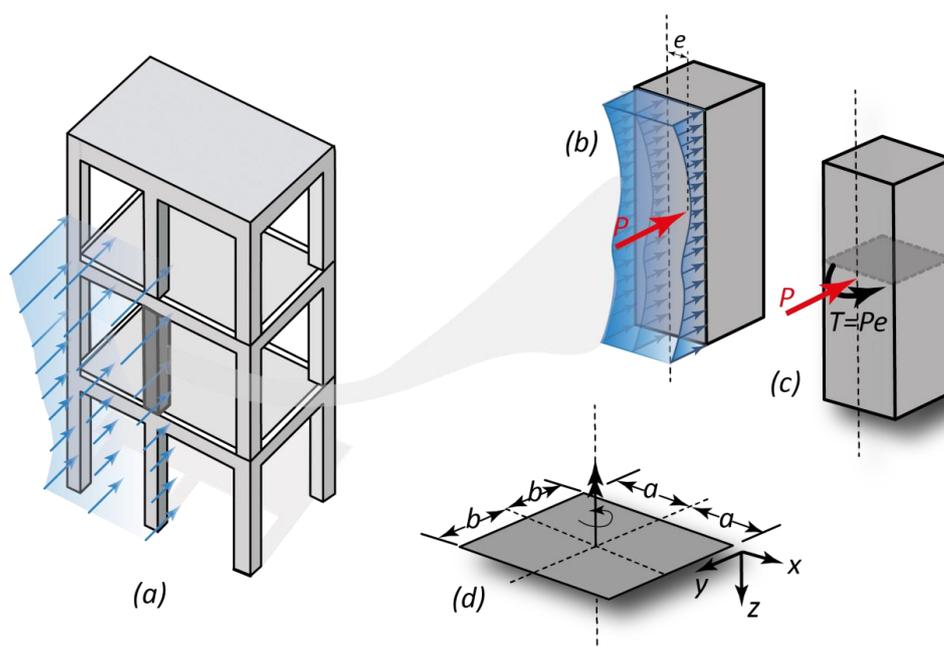


Figura 1. Esquema didático do problema físico

Fonte: Acervo Pessoal

Considere que na Figura 1a exista um perfil genérico devido à ação do vento atuando na face frontal de uma edificação. Então, isola-se um elemento de barra do edifício, considera-se somente a ação do vento na sua faceta, ou seja, despreza-se qualquer outra contribuição de esforços externo ou interno, conforme mostra a Figura 1b. Pelos conceitos de mecânica, pode-se concentrar a intensidade de uma carga distribuída em uma força resultante P , contudo, devido o perfil do vento ser uma ação

variável, a localização da força resultante fica definida por uma excentricidade e em relação à linha de centro da faceta.

Então, na Figura 1c realiza-se uma transmissão da força resultante para linha de centro, associado a um momento torsor T que atua na seção transversal da barra. Desprezando efeito da carga P , chega-se na Figura 1d que evidencia a torção de uma barra de seção retangular. Enfatizando que em geral os efeitos de torção provenientes da ação do vento são potencializados em análises de edifícios altos. Observe ainda, que na análise de estruturas, sendo válido o princípio da superposição, é possível avaliar cada efeito separadamente de cada ação e posteriormente verificar suas influências, logo, motiva-se entender o comportamento do elemento sob um único efeito. Note como um esquema didático contextualizado com uma situação prática facilita a motivação e interesse do o(a) aluno(a) em sala de aula, fornecendo um incentivo maior para exploração da modelagem matemática abstrata, que usualmente não desperta a atenção do discente (Bardini; Spalding, 2017; Pravia; Kripka, 1999).

Desta maneira, para modelagem matemática do problema de torção, adota-se modelo proveniente da teoria da elasticidade, que descreve o fenômeno pela equação parcial de Poisson, conforme a Eq. (1).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = F \quad (1)$$

Onde ϕ é a função tensão de Prandtl e o termo fonte $F = -2G\theta$, em que G é o módulo de elasticidade transversal e θ é o ângulo de torção. A função tensão é nula nas bordas do domínio bidimensional, o que define condições de contorno do problema, ou seja, existe somente potencial prescrito em todo contorno. Esta função tensão é um artifício matemático para simplificação do problema físico, ou seja, na realidade busca-se determinar as tensões de cisalhamento, conforme as Eq. (2) e Eq. (3) (Timoshenko; Goodier, 1951)..

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3)$$

A solução do problema de torção baseia-se em dois estágios, a solução da equação de Poisson, conforme Eq. (1) e o segundo estágio que realiza a diferenciação da solução primal, conforme as expressões dadas pelas Eq. (2) e Eq. (3). Para este problema, as soluções analíticas são conhecidas, vide Timoshenko & Goodier (1951) e Silva (2005).

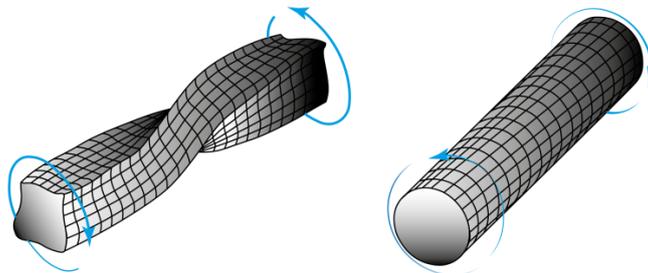


Figura 2. Torção de barra de seção retangular e circular

Fonte: Acervo Pessoal

Nota-se ainda, que um dos motivos da torção de seção retangular ser um problema mais complexo e não ser tratado com maiores detalhes nos cursos de graduação, além de trabalhar com equações diferenciais parciais, a seções transversais da barra não permanecem planas, como ocorria com a torção de seção circular, conforme ilustra a Figura 2 (Mindlin, 1975; Filho, 1981).

3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Para diversos problemas de engenharia, a solução analítica fica limitada para casos específicos com domínios e parâmetros bem definidos. Para contornar tais restrições e soluções de problemas configurações diversas, recorre-se ao uso de métodos aproximados para solução de equações diferenciais parciais que governam os fenômenos. Como método pioneiro, destaque o método das diferenças finitas (MDF), que preserva sua boa aplicabilidade em problemas de engenharia, conforme Oliveira & Pedroso (2008) e Mansour (2018). Com o avanço científico, atualmente ressalta-se método dos elementos de contorno (MEC) que esta apresentando bons resultados em inúmeros problemas, vide em Loeffler, Barbosa & Barcelos (2018) e Carrer et al. (2013).

3.1 Aproximação por Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas tem com cerne a aproximação dos operadores derivadas por aproximações algébricas. Por meio das expressões deduzidas por série de Taylor para um operador de segunda ordem, pode-se aproximar a Eq. (1) e assim determinar com algumas manipulações a equação de diferenças finitas para o problema de torção, como posto na Eq. (4) (Ozisk, 1994; Thomas, 2013).

$$\gamma\phi_{i+1,j} + \beta\phi_{i,j+1} + \chi\phi_{i,j} + \gamma\phi_{i-1,j} + \beta\phi_{i,j-1} = F_i \quad (4)$$

Os coeficientes contidos na Eq. (4) podem ser expressos em função do espaçamento da numérica na direção x e y , respectivamente h_x e h_y , conforme Eq. (5).

$$\chi = -2 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \quad \gamma = \frac{1}{h_y^2} \quad \beta = \frac{1}{h_x^2} \quad (5)$$

Aplicando a Eq. (4) em cada ponto do domínio discreto associado às respectivas condições de contorno em cada ponto, pode-se chegar ao sistema algébrico final, como expresso na Eq. (6).

$$[K]\{\phi\} = \{F\} \quad (6)$$

Em que a matriz K é usualmente conhecida como matriz de rigidez e o vetor F e ϕ são denominados respectivamente, sendo o vetor de carga e vetor de incógnitas. Logo, conhecidos os valores da função tensão, dado pela Eq. (6), pode determinar a tensão de cisalhamento em cada eixo por meio da Eq. (2) e Eq. (3).

3.2 Método dos Elementos de Contorno

O MEC é um método de natureza integral, que busca realizar a discretização no contorno do problema, acarretando em uma redução da dimensão do problema. Para facilitar a formulação do método, trabalha-se em notação tensorial. Inicia-se multiplicando cada sentença integral por uma função auxiliar u^* , onde a Eq. (7) é conhecida como formulação integral forte (Wrobel, 2002).

$$\int_{\Omega} \phi_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} F u^* d\Omega \quad (7)$$

Onde a função auxiliar é conhecida como solução fundamental de Laplace, posta pela Eq. (8).

$$u^*(\xi, X) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi, X) \quad (8)$$

O tratamento do termo da esquerda ou termo difusivo da Eq. (7) já é difundido na literatura, vide Brebbia (2012). Logo, tem-se a Eq. (9).

$$c(\xi)\phi(\xi) + \int_{\Gamma} (\phi q^* - q u^*) d\Gamma = \int_{\Omega} F(X) u^* d\Omega. \quad (9)$$

Com o termo difusivo plenamente tratado, então, deve-se direcionar o foco para o tratamento da sentença integral associado ao termo fonte. Para tal termo, existe algumas técnicas já apresentadas na literatura, para este trabalho adota-se o tensor de Galerkin.

$$G_{,ii}^* = u^* \quad (10)$$

O tensor de Galerkin, posto na Eq. (10), é constituído pelo operador Laplaciano e a solução fundamental do problema. Então, aplica-se a Eq. (10) em Eq. (9), tem-se a Eq.(11).

$$c(\xi)\phi(\xi) + \int_{\Gamma} (\phi q^* - q u^*) d\Gamma = \int_{\Omega} (FG_{,i}^*)_{,i} \eta_i d\Omega - \int_{\Omega} F_{,i} G_{,i}^* d\Omega \quad (11)$$

Como o termo fonte é uma constante, uma sentença integral se anula e a Eq. (11) pode ser expressa pela Eq. (12), onde todas as sentenças integrais matemáticas então contidas no contorno.

$$c(\xi)\phi(\xi) + \int_{\Gamma} (\phi q^* - q \phi^*) d\Gamma = \int_{\Gamma} FG_{,i}^* \eta_i d\Gamma \quad (12)$$

Reorganizando os termos e escrevendo cada sentença na forma integral, chega-se em um sistema de equações. Note que, o método dos elementos de contorno determina paralelamente tanto o potencial como fluxo.

$$[H]\{\phi\} + [G]\{q\} = \{F\} \quad (13)$$

Onde, na Eq. (13), H e G são matrizes de coeficientes e os vetores F , ϕ e q é respectivamente, o vetor de ações, vetor de potenciais e de derivadas a determinar. Observe que, diferentemente o método de diferenças finitas, o MEC determina diretamente a função tensão e as tensões de cisalhamento associadas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados baseiam-se na solução do problema de torção de barra de seção retangular via método das diferenças finitas e elementos de contorno. Como o presente trabalho não visa uma aplicação em escala de projeto de engenharia adota-se os

parâmetros geométricos e físicos sendo unitários. Inicialmente, realiza-se uma análise em relação a validação numérica dos métodos, conforme Figura 3.

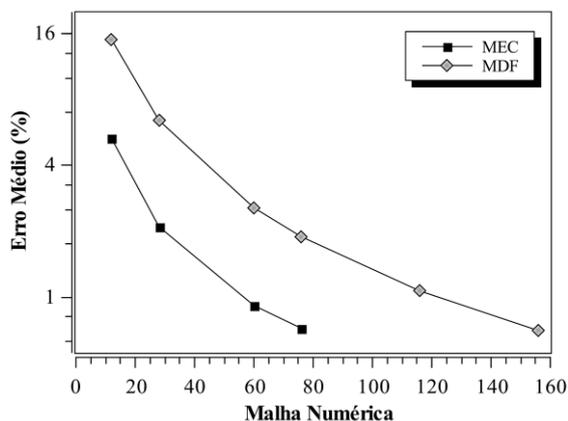
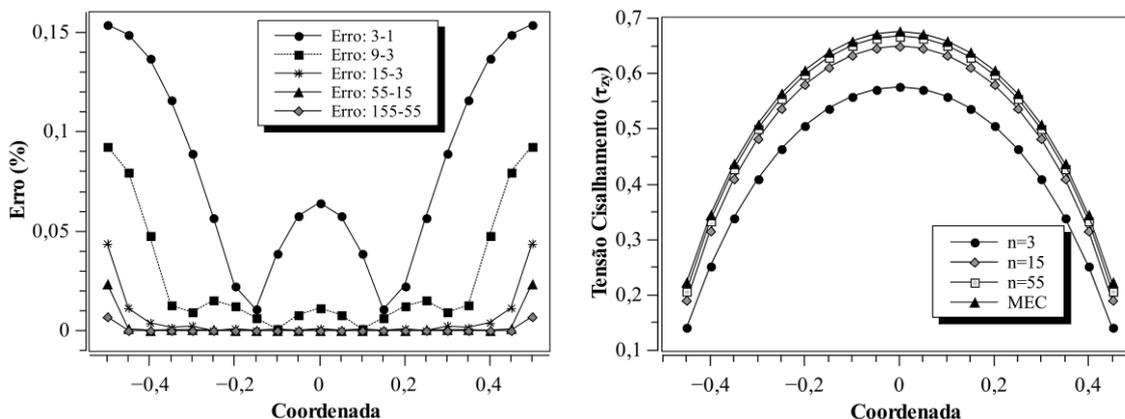


Figura 3. Performance numérica do MDF e MEC

Fonte: Acervo Pessoal

Considere para requisitos de cálculo de erro médio somente os pontos contidos no contorno, onde ocorre as maiores tensões de cisalhamento. Note que, ambos os métodos apresentam um bom desempenho com um comportamento decrescente com o refinamento da malha. Observa-se ainda, que o MDF necessita de um refinamento maior para atingir um erro na mesma ordem de grandeza do MEC.

Para este problema de torção de barras, vale destacar um fato em relação ao comportamento da solução analítica, onde tanta a solução da função tensão de Prandtl como as tensões de cisalhamento são constituídas por uma série infinita de contador ímpar. Na Figura 4, apresenta-se uma análise da influência dos termos da série na solução do problema.





(a)

(b)

Figura 4. (a) Erro em relação aos termos da série na solução de ϕ (b) Estimativa da influência dos termos da série na solução analítica de τ_{zy} na extremidade da seção

Fonte: Acervo Pessoal

Na Figura 4a, estima-se o erro com o aumento dos termos da série na solução da função tensão, para valores contidos na linha de centro da seção, observa-se como a solução converge para os mesmos resultados. Em relação a tensão de cisalhamento na face extrema da seção, a Figura 4b evidencia que tal solução necessita de mais termos para uma boa aderência.

Com os comportamentos numéricos e analíticos bem postos, pode-se realizar um detalhamento do problema. É comum em projetos e dimensionamentos de engenharia determinar valores máximos de grandezas, a fim de garantir critérios últimos e de serviço. Desta maneira, busca-se estimar o valor da tensão de cisalhamento máxima na seção transversal, como mostra a Figura 5.

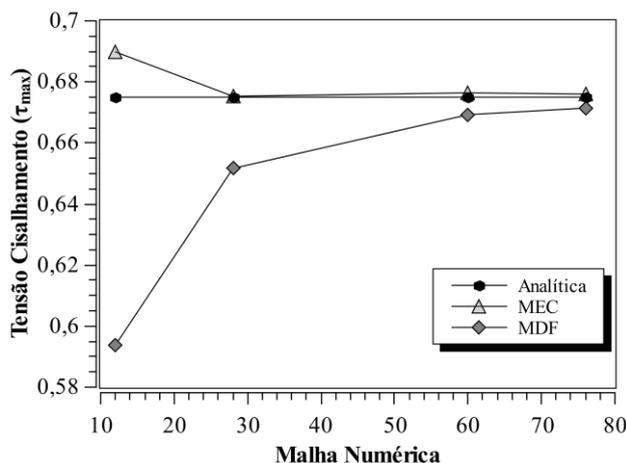


Figura 5. Aproximação via MDF e MEC da tensão máxima na seção

Fonte: Acervo Pessoal

Perceba que o método dos elementos de contorno atinge valores satisfatórios para malhas com pouco refinamento, em detrimento ao método de diferenças finitas que necessita de um maior desempenho computacional para atingir resultados parelhos. Na Figura 4b, mostra-se o perfil parabólico na face extrema da seção, contudo, no interior na seção transversal, o perfil de tensão varia conforme a posição, como mostra a Figura 6.

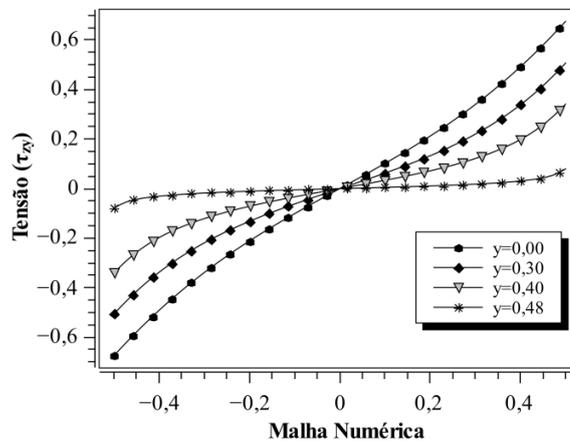


Figura 6. Perfil de tensão cisalhante no plano zy

Fonte: Acervo Pessoal

Devido considerar uma seção unitária, os valores são iguais para as tensões de cisalhamento ZX e ZY, alterando somente o eixo de aplicação de tais. Por tal fato, o perfil de tensão assume o formato apresentado na Figura 6, onde tende a nulidade quando próximo a borda da seção e aos valores máximo próximo ao centro. Na Figura 7, exibe-se o comportamento do campo provido da função tensão e das tensões cisalhamento.

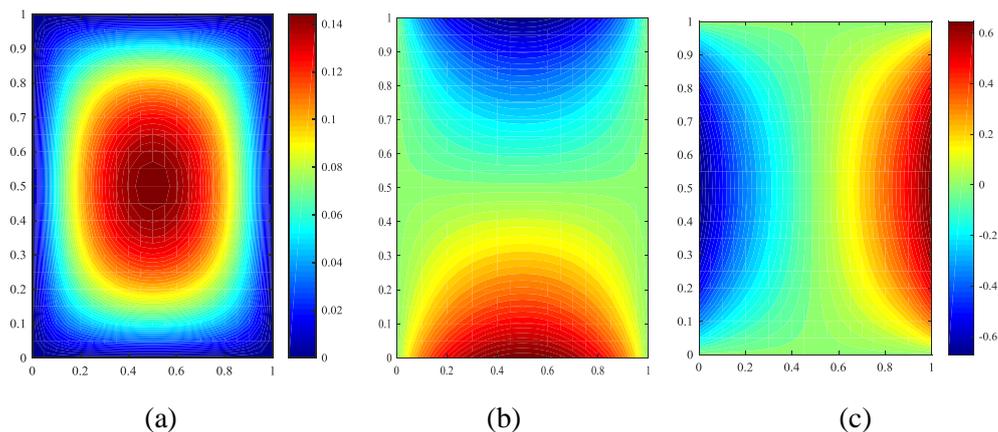


Figura 7. (a) Função tensão de Prandtl, (b) Tensão de cisalhamento ZX, (c) Tensão de cisalhamento ZY

Fonte: Acervo Pessoal

A solução da Eq. (1) é ilustrada na Figura 7a que representa um campo de uma função potencial, onde pode-se verificar a concordância do comportamento

correlacionado as condições de contorno nulas em todas as bordas da seção. As tensões de cisalhamento ZX e ZY são representadas na Figura 7b e 7c, respectivamente atendem ao fato de ser nulas no eixo vertical e horizontal.

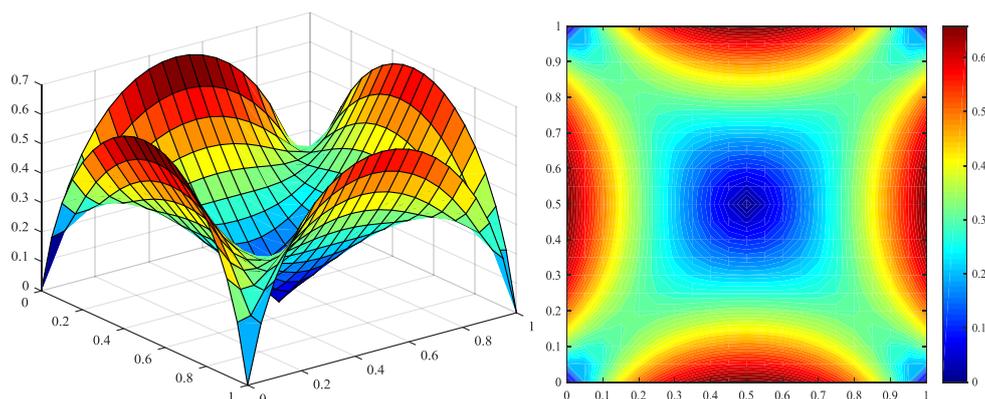


Figura 8. Distribuição de tensão de cisalhamento resultante na seção

Fonte: Acervo Pessoal

Para compreender o problema de forma mais global, determina-se as tensões de cisalhamento resultantes em cada ponto, como apresenta a Figura 8. Observa-se que nas bordas só existe uma tensão associada com uma direção específica. Nota-se ainda que nos pontos de quina da seção, a tensão resultante é nula, pois as tensões na superfície da peça são nulas, como o cisalhamento ocorre em pares associados a planos perpendiculares, em tal ponto não pode existir tensão, como evidencia a Figura 8.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No que se refere à quantificação da performance dos métodos numéricos na solução do problema de torção de barras de seção retangular, tanto o método das diferenças finitas como elementos de contorno apresentaram um bom desempenho associado ao comportamento paralelo com a solução de referência, em destaque, o MEC atinge menores medidas de erros para malhas com pouco refinamento em relação ao MDF. Desta maneira, para este problema evidencia-se que ambos os métodos permitir obter respostas assertivas em relações as tensões de cisalhamento e a função tensão.

Além do direcionamento numérico do problema, deve-se destacar ainda a vertente de ensino, no que tange a estratégia de contextualização didática e modelagem matemática, evidenciando como ferramentas e formas didáticas de transmissão de



conceitos despertam o senso de investigação dos discentes. Portanto, dos inúmeros caminhos para o aprimoramento do binômio ensino-aprendizagem, o simples fato de correlacionar os modelos matemáticos com situações práticas expostas de forma didática auxiliam os discente na captação e estimulação do conteúdo.

REFERÊNCIAS

- Filho, M. P. A. *Torção em barras prismáticas de secção transversal arbitrária e multiconexa-abordagem por elementos finitos isoparamétricos*. 1981. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina.
- Bardini, V. S. S.; Spalding, M. Aplicação de metodologias ativas de ensino-aprendizagem: experiência na área de engenharia. *Revista de Ensino de Engenharia*, v. 36, n. 1, 2017.
- Bortolo, K. F.; Linhares, J. C. Verificação da necessidade de dispositivos didáticos para o ensino na graduação em engenharia mecânica. In: *Congresso Brasileiro de Ensino Abenge/Upf*. 2006. P. 1128-1139.
- Brebbia, C. A.; Telles, J. C. F.; Wrobel, L. C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. *Springer Science & Business Media*, 2012.
- Carrer, J. A. M. et al. Dynamic analysis of Timoshenko beams by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 37, n. 12, p. 1602-1616, 2013.
- Carvalho, R. C.; Filho, J. R. F.. Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118: 2003. EdUFSCar, 2010.
- Ecsedi, I; Baksa, A. Prandtl's formulation for the Saint-Venant's torsion of homogeneous piezoelectric beams. *International Journal of Solids and Structures*, v. 47, n. 22-23, p. 3076-3083, 2010.
- Guimarães, G. G. Aprendendo cálculo diferencial e integral em engenharia civil: uma proposta interdisciplinar entre teoria e prática. *Revista de Ensino de Engenharia*, v. 37, n. 1, 2018.
- Lima, W. M. et al. Uma ferramenta computacional para suporte nos processos de ensino e aprendizagem de equações diferenciais parciais. *Revista de Ensino de Engenharia*, v. 35, n. 1, 2016.
- Loeffler, C. F.; Barbosa, J. P.; Barcelos, H. M. Performance of BEM superposition technique for solving sectorially heterogeneous Laplace's problems with non-regular geometry. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 93, p. 105-111, 2018.
- Moreira, R. N.; Pitangueira, R. L. Sistema gráfico interativo para ensino de análise estrutural através do método dos elementos finitos. *Revista de Ensino de Engenharia*, v. 37, n. 1, 2018.



- Mansour, Alaa El-Din. Generalized finite difference approach verification on circular plates. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. IOP Publishing, 2018. p. 042030.
- Mindlin, R. D. Solution of St. Venant's torsion problem by power series. *International Journal of Solids and Structures*, v. 11, n. 3, p. 321-328, 1975.
- Oliveira, V. G. Pedrosa, L. J. Frequências e modos acústicos de vibração de reservatórios pelo método das diferenças finitas. *Revista de Pesquisa Aplicada à Engenharia*, v. 1, n. 1, 2008.
- Ozisik, M. N. Finite difference methods in heat transfer. CRC Press. 1994.
- Popov, E. P. Introduction to mechanics of solids. 1968.
- Pravia, Z. C.; Kripka, M. Proposta metodológica para o uso e desenvolvimento de ferramentas computacionais no ensino de estruturas. In: *Anais do XXVII congresso brasileiro de ensino de engenharia*, Natal-Rn. 1999.
- Hosseini, M et al. Nonlinear analysis of torsion in reinforced concrete members after developing initial crack. *Indian Journal of Science and Technology*, v. 9, n. 7, 2016.
- Hibbeler, R. C. Resistência dos Materiais. Pearson Education, 2010.
- Silva, H. F. *Formulação do problema da torção uniforme em barras de seção transversal maciça*. 2005. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- Strek, T; Jopek, H; Fraska, A. Torsion of elliptical composite beams with auxetic phase. *Physica Status Solidi (b)*, v. 253, n. 7, p. 1359-1368, 2016.
- Teimoori, H.; Faal, R. T.; Das, R. Saint-Venant torsion analysis of bars with rectangular cross-section and effective coating layers. *Applied Mathematics and Mechanics*, v. 37, n. 2, p. 237-252, 2016.
- Timoshenko, S.; Goodier, J. N. Theory of elasticity. 1951. New York, V. 412, P. 108.
- Thomas, J. W.. Numerical partial differential equations: finite difference methods. *Springer Science & Business Media*, 2013.
- Wrobel, L. C. The boundary element method, applications in thermo-fluids and acoustics. John Wiley & Sons, 2002.