

## Simulação de Fluxos de Caixa com Projeções de K-means em Cadeias de Markov

André Barbosa Oliveira♦

Pedro Luiz Valls Pereira▲

### Resumo

*Os fluxos de caixa são informação fundamental em finanças, utilizado na avaliação de projetos e empresas. A decisão de viabilidade de projetos e avaliação de uma empresa depende dos fluxos de caixa esperados futuros que precisam ser previstos, para mensuração da taxa interna de retorno e valor presente líquido de projetos; e cálculo do preço justo das empresas. Porém a projeção dos fluxos de caixa muitas vezes é baseada em avaliação subjetiva de analistas em virtude de poucas observações históricas disponíveis. Este artigo propõe projeção de fluxos de caixa por K-means em cadeias de Markov, com análise de agrupamentos permitindo aumentar o número de observações para estimação por empresas comparáveis, e cadeia de Markov utilizada na projeção e simulação de valores futuros. Além de análise de agrupamentos para empresas com maior liquidez do setor de energia brasileiro realizamos estudo empírico de projeção de fluxos de caixa livre da firma para Eletrobrás que apresentou boas propriedades, com taxas de crescimento diferentes para cada ano de projeção e dinâmica de transição entre os níveis de alto, baixo e crescimento médio ao longo do horizonte de previsão e simulação.*

**Palavras-chave:** 1. Análise de Agrupamentos; 2. Cadeias de Markov; 3. Projeção e Simulação.

**Área temática:** Econometria Financeira.

### Abstract

*Cash flows are fundamental information in finance, used in the evaluation of projects and companies. The decision about the viability of projects and the evaluation of a company depends on the expected future cash flows, that need to be predicted to measure the internal rate of return and net present value of projects or calculate the fair price of companies. However, the projection of cash flows often has few observations available and is based on subjective evaluation by analysts. This paper proposes cash flow projection by K-means in Markov chains, with cluster analysis allowing to increase the number of observations for estimation by comparable companies and Markov chain used in the projection and simulation of future values. In addition to cluster analysis for the energy sector, we make an empirical study of projection the free cash flow to firm for Eletrobrás which presented good properties, with different growth rates for each year and transition dynamics between high, low and medium growth levels over the forecast and simulation horizon.*

**Keywords:** 1. Cluster Analysis; 2. Markov chain; 3. Forecasting and simulation.

---

♦ Professor da Faculdade de Economia da UFF e pesquisador associado do CEQEF (Centro de Estudos Quantitativos em Economia e Finanças) da EESP/FGV-SP. E-mail: aboliveira@id.uff.br

▲ Professor titular da EESP/FGV-SP e Diretor do CEQEF (Centro de Estudos Quantitativos em Economia e Finanças) da FGV-SP. E-mail: pedro.valls@fgv.br

## **1 Introdução**

A precificação de ativos estuda o preço justo dos ativos financeiros, incluindo ações, derivativos e títulos de renda fixa. Em equilíbrio o preço justo dos ativos financeiros envolve uma remuneração com prêmio pelo risco para diferentes fatores de risco, resultante da aversão ao risco dos investidores.

No modelo de precificação de ativos de capital (CAPM) o retorno dos ativos é precificado considerando como único fator de risco a contribuição de um ativo para o risco do portfólio de mercado. Nos modelos multifatoriais, para os modelos com fatores baseados em características das firmas os preços dos ativos estariam associados a fatores de risco além de oscilações do mercado que afetariam os resultados das empresas e consumo dos agentes.

Os modelos de precificação de ativos têm equivalência com modelos fatoriais se o fator estocástico de desconto é uma função linear dos fatores (COCHRANE, 2007), e temos duas abordagens. Os modelos com fatores macroeconômicos, que descrevem os retornos dos ativos relacionados a variáveis macroeconômicas, como spread de juros em títulos de diferentes maturidades como variável relacionada aos ciclos econômicos. E modelos com fatores baseados nas características das empresas, que permitem relacionar os retornos dos ativos a fatores associados a variáveis latentes que descrevem o estado da economia.

Considerando o modelo Fama-French, o fator tamanho está relacionado ao maior custo de capital de empresas pequenas e maiores dificuldades em períodos de recessão no ciclo econômico. Ademais os desvios de valor de mercado sobre valor contábil de empresas estão relacionados as expectativas sobre os riscos de empresas de crescimento manterem continuidade na sua trajetória de expansão e empresas maduras serem resilientes frente as dificuldades pontuais e mudanças das condições da economia (FAMA, FRENCH, 2004). Ainda o fator momento no modelo de Fama-French-Carhart (CARHART, 1997), que descreve que empresas que tiveram maior retorno recentemente tendem a apresentar maior retorno em períodos seguintes, pode ser interpretado como recorrência de vantagens competitivas e gerenciais com as empresas com maior crescimento recente terem maior probabilidade de manter maior crescimento no período seguinte.

O preço justo dos ativos financeiros é o valor presente descontado dos fluxos de caixa esperados e assim precificados por um fator estocástico que desconta os fluxos de caixa e determina os preços dos ativos. Seja em um modelo sequencial em que os

investidores escolhem entre consumo e investimentos entre períodos no tempo, determinando o preço e retornos dos ativos financeiros; ou na precificação por arbitragem, que determina o preço de equilíbrio e operações de arbitragem que levariam a correção de preços fora do equilíbrio.

Na prática da Economia Financeira os modelos de precificação de ativos são empregados para estimar o retorno esperado dos ativos em condições de equilíbrio, que são referência para determinar a taxa de desconto dos fluxos de caixa que vai precificar os ativos e assim definir o retorno esperado que os investidores deveriam exigir para ser recompensados pelo risco incorrido. Os modelos de precificação de ativos determinam também a taxa de desconto dos fluxos de caixa na avaliação de projetos de investimento.

Os modelos de precificação de ativos são referência para determinar prêmios pelo risco das ações e demais ativos financeiros, mas a precificação de uma ação particular é feita pela avaliação de empresas que projeta os fluxos de caixa e os desconta por taxas de desconto apropriadas para definir o seu preço justo.

O processo de avaliação de empresas e de projetos de investimentos é uma metodologia que projeta fluxos de caixa e estima taxas de desconto, empregando os modelos de precificação de ativos, para determinar o preço justo de uma ação e o valor presente líquido dos projetos. A avaliação de empresas é um processo subjetivo que depende de projeção de fluxos de caixa e estimação de taxas de desconto.

A determinação dos preços dos ativos está relacionada a decisões de investimento. Pela análise técnica são estudadas tendências com projeções dos preços que permitiriam antever os movimentos de mercado para realizar ganhos comprando os ativos a preços “baixos”, antes de subirem, e vendendo a preços “altos”, depois de realizarem sua trajetória de alta.

A determinação do preço justo da avaliação de empresas também promoveria uma estratégia de ganhos, ao definir o preço justo que refletiria o preço de equilíbrio da ação de uma empresa. Comprando empresas com preços abaixo do preço justo e vendendo empresas sobreprecificadas. De acordo com Warren Buffet “*Preço é o que o investidor paga e valor é o que leva*”, os investidores estariam interessados em comprar ações que tenham menor preço em relação ao valor que entregam.

O preço justo na avaliação de empresas depende de projeções dos fluxos de caixa. Porém ao invés de serem projetadas tendências nos preços, a avaliação de empresas projeta tendências de crescimento dos fluxos de caixa e investimentos.

A área de aprendizagem estatística está relacionada a aprendizagem de máquina e inteligência artificial, caracterizadas por uso intensivo de capacidade computacional para execução de algoritmos para análise de dados. Aprendizagem estatística, aprendizagem de máquina e inteligência artificial formam a área chamada de Ciência de Dados.

A aprendizagem estatística permite várias técnicas para projeções baseadas nos comportamentos dos dados, tanto para classificação, quanto interpolação e previsão. Usando a maior capacidade computacional alcançada como resultado do processo tecnológico a ciência de dados aplica algoritmos que revelam padrões subjacentes aos dados. No aprendizado não supervisionado o algoritmo K-means é empregado para definir subgrupos nos dados (MORTON; ANABLE; NELSON, 2017; HRUSCHKA; NATTER, 1999) , por exemplo seguimentos de grupos de consumidores ou clusters de doentes com diferentes graus de um tipo de câncer. No aprendizado supervisionado redes neurais artificiais aplicadas em previsão (HEWAMALAGE; BERGMEIR; BANDARA, 2020) e florestas aleatórias em análise de regressão.

O objetivo desse artigo é aplicar métodos de ciência de dados para projetar fluxos de caixa usando padrões subjacentes aos demonstrativos financeiros que são caracterizados por poucas observações históricas e análise subjetiva. Na projeção dos fluxos de caixa as expectativas subjetivas dos analistas na avaliação de empresas seriam substituídas por aprendizado estatístico sobre o comportamento dos dados econômico-financeiros para realizar projeções.

Para realizar a projeção dos fluxos de caixa combinamos um método de aprendizado estatístico e um processo estocástico. Com o uso de K-means, para formação de clusters de empresas de alto crescimento, maturidade e declínio. E cadeias de Markov, para calcular a previsão do grupo de crescimento das empresas ao longo do tempo.

Em um uso tradicional de K-means após a separação de observações em diferentes grupos com características semelhantes, dado uma nova observação podemos empregar análise discriminante para calcular a probabilidade de uma empresa pertencer a cada grupo. Na abordagem proposta neste trabalho, dada uma classificação de uma empresa em um grupo no período corrente, estimamos a probabilidade da empresa pertencer aos grupos de alto ou baixo crescimento no período seguinte.

Desenvolvemos uma abordagem de projeção de fluxos de caixa fundamentada em aprendizado estatístico por K-means e cadeias de Markov. A taxa de crescimento dos fluxos de caixa depende do resultado do crescimento de grupos de empresas comparáveis, com clusters definidos por K-means. Semelhante a precificação por múltiplos, nos

baseamos em um grupo de empresas comparáveis, porém o cluster de empresas comparáveis determina a taxa média de crescimento dos fluxos de caixa e não o valor da empresa. Ademais, a consistência dinâmica do desempenho da empresa entre os grupos de alto, médio e baixo crescimento, caracterizando a recorrência da performance da gestão, também determina o fluxo de caixa da empresa.

Temos uma abordagem de projeção que é adequada para dados com poucas observações, como as demonstrações financeiras anuais de empresas. Onde a estimação da taxa média de crescimento pelo crescimento realizado de empresas comparáveis aumenta o tamanho da amostra para estimativa. Por outro lado, temos um processo estocástico de cadeias de Markov descrevendo a dinâmica da empresa sob análise entre os grupos de alto, baixo e médio crescimento.

Após essa introdução a seção 1 faz uma reflexão das relações entre a teoria de precificação de ativos e avaliação de empresas. A seção 2 apresenta o modelo de projeção de fluxos de caixa de K-means em cadeias de Markov. A seção 3 descreve os dados e a metodologia da aplicação empírica realizada. A seção 4 segue com os resultados empíricos e o trabalho encerra com a seção de considerações finais.

## **2 O Preço Justo de uma Empresa**

Pela equação básica de apreçamento  $p=E(mx)$ , na escolha entre consumo e investimento intertemporal, o preço justo de uma ação é a soma dos fluxos de caixa esperados descontados pelo fator estocástico de desconto que expressa a troca entre consumo corrente e consumo futuro (COCHRANE, 2005). Em uma análise de dois períodos o preço é definido pelo ganho de capital com a venda da ação no próximo período e dos dividendos recebidos. Em uma análise em horizonte infinito, mantendo a ação por tempo indeterminado, o preço é a soma do valor presente descontado dos fluxos de dividendos no tempo.

Na avaliação de empresas pelo método de fluxo de caixa descontado o preço de uma ação é o valor presente descontado dos fluxos de caixa esperados descontados por uma taxa de desconto apropriada para o risco dos fluxos de caixa. Em horizonte infinito a ação entrega ao investidor um fluxo de dividendos, com o preço da ação associado ao desconto de uma perpetuidade de dividendos. Considerando o modelo de crescimento de Gordon com dividendos crescendo a uma taxa constante, a precificação de uma ação é igual a soma do valor presente dos dividendos esperados com retorno de equilíbrio igual

ao rendimento dos dividendos somado a taxa de crescimento dos dividendos,  $R = \frac{D}{P} + g_{dividendos}$ .

A análise econômico-financeira de ações vem de uma tradição contábil relacionada a análise de balanços onde as variáveis fundamentais estão associadas a lucros, retornos sobre o patrimônio líquido e sobre os investimentos, bem como condições de liquidez e solvência da empresa. Uma boa empresa apresentaria lucros recorrentes, que permitiriam pagar dividendos e reinvestir no crescimento da empresa e entregar maior fluxo de dividendos futuros.

Porém o preço de uma ação não é determinado pelo seu lucro, ROE, ROI, índices de liquidez e endividamento. O preço de uma ação é a soma do valor presente dos seus fluxos de caixa esperados. Os fluxos de caixa da empresa podem ser determinados por duas abordagens: o Fluxo de Caixa Livre da Firma (FCLF) e Fluxo de Caixa Livre do Acionista (FCLA).

## 2.1 Método do Fluxos de Caixa Descontados

O Fluxo de Caixa Livre da Firma parte dos lucros operacionais líquidos, subtraído dos investimentos de capital (CAPEX) e necessidade de investimentos de capital de giro (NCG). O fluxo de caixa livre da firma é um fluxo de caixa esperado, associado aos lucros no regime de competência que esperam que sejam recebidos em períodos futuros e registrados quando ocorre a operação de venda, mesmo sem ter recebido pagamento e representa a capacidade econômica da empresa.

$$FCLF = NOPAT + Depreciação - CAPEX - NCG$$

O lucro operacional não apura os custos dos investimentos, apenas depreciação e custos/despesas variáveis. O investimento é o pagamento dos ativos fixos quando são adquiridos e representado pelos gastos de capitais (CAPEX) são retirados do lucro operacional. Ainda temos que subtrair os investimentos em capital de giro, com caixa mantido a longo prazo pela empresa para atender os seus gastos cotidianos de estoques e outros custos operacionais e despesas continuadas. Ademais é somada a depreciação ao lucro operacional líquido, porque é uma despesa que não está associada a saída de caixa.

Por outro lado, o Fluxo de Caixa Livre do Acionista (FCLA) é obtido do lucro líquido somada a depreciação menos CAPEX e necessidades de capital de giro. Porém depende da estrutura de capital da empresa, com a capacidade de emissão de dívidas para

atender as necessidades de investimento em capital de giro e capital físico e vem acompanhada de pagamento de juros que formam o lucro líquido.

$$FCLA = LL + \text{Depreciação} - \text{CAPEX} - \text{NCG} + \text{Emissão Líquida de Dívidas}$$

O valor da empresa é determinado pela soma do valor presente dos fluxos de caixa livre da firma descontado pelo custo médio ponderado do capital. E o preço da ação pela soma do valor presente dos fluxos de caixa livre do acionista descontados pelo custo do capital próprio. A taxa de desconto considera o risco dos fluxos de caixa esperados pela empresa e acionistas e o risco de conversão em caixa de registros baseados no regime de competência, portanto possuem um prêmio pelo risco.

O acionista auferir ganhos através dos dividendos recebidos e pelo ganho de capital, com a valorização do preço da ação. Os dividendos estão associados ao fluxo de caixa livre do acionista, que correspondem aos dividendos máximos potenciais que podem ser distribuídos após os reinvestimentos dos resultados em CAPEX e capital de giro para continuidade e expansão das atividades (ASSAF NETO, 2021). E o aumento de preços das ações estão associados a maior geração de fluxos de caixa das atividades operacionais e menor custo de capital.

O crescimento dos fluxos de caixa depende do crescimento dos resultados operacionais e de maiores investimentos e maior retorno sobre os investimentos realizados  $g_t = b * ROIC$ . O uso de médias históricas para estimar crescimento dos lucros é limitado, sendo relevantes apenas para empresas com comportamento estável. A abordagem baseada em fundamentos (ASSAF NETO, 2021) projeta os crescimentos dos resultados operacionais dependendo do retorno sobre o capital ou investimentos e taxa de retenção dos resultados para investimentos.

$$\text{Valor da Empresa}_t = \frac{\sum_{t=1}^T FCLF_{t+1}}{(1+wacc)^t}$$

Na prática de avaliação de empresas o analista projeta os fluxos de caixa para cada período, de acordo com suas premissas. Sendo comum projetar os fluxos de caixa baseado nas características da empresa por um período de vantagem competitiva e depois estabelecendo o crescimento na perpetuidade de acordo com o crescimento esperado da economia (ou média do setor) em que atua e custo de capital acompanhando a estrutura de capital média do setor.

Pela estrutura do método de avaliação pelo fluxo de caixa descontado o preço justo da ação é relacionado empiricamente pela expectativa dos analistas, sendo uma das variáveis explicativas do comportamento dos preços das ações (DELAO; HAN; MYERS,

2022). Inclusive, uma das críticas do método de fluxo de caixa descontado é que os analistas podem determinar a taxa de crescimento estável para direcionar os preços de acordo com as suas expectativas (DAMODARAN, 2025).

### 3 Projeção do Crescimento por K-means em Cadeias de Markov

Essa seção descreve o modelo probabilístico de projeção de taxas de crescimento dos fluxos de caixa por K-means em cadeias de Markov. Temos a combinação de um modelo de aprendizagem estatística e um processo estocástico. O agrupamento por K-means estima diferentes grupos de taxa de crescimento entre as empresas; e a cadeia de Markov, como modelo probabilístico que descreve a evolução da taxa de crescimento da empresa entre os grupos de alto, médio e baixo crescimento.

Na primeira subseção descrevemos a análise de agrupamento pelo algoritmo K-means. Na segunda subseção apresentamos as propriedades da cadeia de Markov. Na terceira subseção discutimos o modelo de projeção por K-means em cadeias de Markov.

#### 3.1 Análise de Agrupamentos por K-means

O K-means consiste em um método de aprendizado não supervisionado, com o objetivo de encontrar subgrupos de um conjunto de dados com base em um vetor de características. Desta forma não é apenas uma variável que define um grupo, por exemplo: inovação, dividindo em empresas inovadoras e não inovadoras; volume de negociação, agrupando em empresas de alta e baixa capitalização; investimentos, separando empresas de alto e baixo investimento. Na análise de agrupamentos um conjunto de características similares entre as empresas que vai determinar um grupo.

Seja um conjunto de  $n$  observações, com cada unidade descrita por um vetor  $p$  de características,  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  em que  $X_i = \{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}\}$  para  $i=1, 2, \dots, n$ . A análise de agrupamentos define um grupo adotando um critério de semelhança de acordo com alguma medida de distância, como euclidiana ou Manhattan. No espaço euclidiano  $p$ -dimensional a distância entre as unidades  $X_i$  e  $X_{i'}$  é expressa por:

$$d(X_i, X_{i'}) = \sqrt{(X_{i1} - X_{i'1})^2 + (X_{i2} - X_{i'2})^2 + \dots + (X_{ip} - X_{i'p})^2} = \|X_i - X_{i'}\|.$$

O método K-means divide o conjunto de dados em K grupos, maximizando a similaridade intragrupo através da minimização das somas dos quadrados das distancias

das observações. A função objetivo no agrupamento por K-means é minimizar a soma dos quadrados das distâncias intragrupo, que é equivalente a minimizar a soma dos quadrados dos desvios das observações de cada grupo em relação a sua média - chamada de centroide.

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k=1}^K d(G_k)^2 &= \sum_{k=1}^K \|X_i - X_{i'}\|^2 * I[i \text{ e } i' \in k] \\ &= \sum_{k=1}^K \|X_i - \mu_k\|^2 * I[i \text{ e } i' \in k] \end{aligned}$$

Onde I é uma função indicadora que assume valor 1 se i e i' pertencem ao grupo k e 0 caso contrário;  $\mu_k$  é o centroide de cada grupo, expresso como o vetor de médias das características das observações de um mesmo grupo; e o conjunto de dados é particionado em K grupos, de tal forma que k é o k-ésimo grupo.

Assim o algoritmo K-means particiona o conjunto de dados em subgrupos de forma a minimizar a soma dos quadrados das distâncias intragrupo. Dado a divisão dos dados em K grupos, o algoritmo atribui cada observação a um cluster de maneira a minimizar soma das variações intragrupo.

O agrupamento por K-means corresponde a um modelo probabilístico das observações de cada grupo geradas de uma mesma distribuição e que as distribuições de cada grupo são independentes. Supondo que cada grupo é independente e identicamente distribuído, a média das observações seria igual a média ponderada das médias intragrupo; e a sua variância é proporcional a soma ponderada das variâncias intragrupos. Portanto, o agrupamento por K-means seria uma especificação para dados independentes e identicamente distribuídos, determinando K grupos minimizando a variância das observações do conjunto de dados.

O algoritmo K-means é descrito pelo seguinte processo iterativo:

- (i) Atribua aleatoriamente cada observação a um grupo, entre os K grupos predeterminados;
- (ii) Associe cada unidade i ao grupo k que esteja com menor distância do centroide:  
 $i \in k \Rightarrow \|X_i - \mu_k\|^2 < \|X_i - \mu_{k'}\|^2$ ;
- (iii) Recalcule o centroide de cada grupo, após a designação de cada unidade ao grupo de distância mínima;
- (iv) Repita (ii)-(iii) até que a variância total, ou seja a soma das variâncias intragrupo, pare de reduzir de acordo com uma tolerância pequena  $\delta$ .

### 3.2 Cadeias de Markov

Cadeias de Markov são um processo estocástico com realização das observações ao longo do tempo em  $K$  estados da natureza  $S = \{S_1, S_2, \dots, K\}$ , que particionam o universo amostral. Algumas aplicações de cadeias de Markov em finanças descrevem as realizações de variáveis aleatórias no tempo entre os estados de expansão e recessão da economia (HAMILTON, 1989), ou alta e baixa volatilidade do mercado financeiro (HAMILTON; SUSMEL, 1994; 2002).

A cadeia de Markov é caracterizada pela probabilidade de transição entre os estados. Onde a soma das probabilidades do estado corrente  $i$  para o estado  $j$  no próximo período é igual a 1. Sendo as propriedades da cadeia de Markov complementadas com uma estrutura de dependência dos dados, onde numa cadeia de Markov de primeira ordem a probabilidade do estado no próximo período condicional a todo conjunto de informação corrente e passado, depende apenas do estado no período corrente.

Podemos elencar as propriedades da cadeia de Markov:

- (i)  $p_{ij} = P\{S_{t+1} = j | S_t = i\} \geq 0$ ;
- (ii)  $\sum_{j=1}^K p_{ij} = 1$ ;
- (iii)  $P\{S_{t+1} = j | S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t0}\} = P\{S_{t+1} = j | S_t\}$ .

A cadeia de Markov é caracterizada pela matriz de probabilidades de transição, que reúne as probabilidades de transição entre o estado da linha  $i$  para o estado da coluna  $j$ , entre todos os  $K$  estados possíveis. Sendo a matriz de probabilidades de transição uma matriz quadrada,  $K \times K$ , expressa por:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1K} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{K1} & P_{K2} & \dots & P_{KK} \end{bmatrix}.$$

Podemos estimar as cadeias de Markov por máxima verossimilhança ou estimação bayesiana, especificando uma prior para a probabilidade dos estados.

### 3.3 Previsão do Crescimento por K-means em Cadeias de Markov

A avaliação de empresas depende de projeção dos fluxos de caixa baseada em estimativas da taxa de crescimento desses fluxos. Na projeção da taxa de crescimento dos

fluxos de caixa aplicamos K-means para identificar clusters de alto, moderado e baixo crescimento e cadeias de Markov para previsão do nível de crescimento de uma empresa ao longo do tempo.

De acordo com o ciclo de vida da empresa, inicialmente passaria por um período de alto crescimento, com maior margem de lucro e investimentos; depois um período de maturidade, com menor margem de lucro; e por fim um período de declínio onde a entrada de concorrentes promove a queda das margens de lucro e o produto não consegue atingir novos nichos de mercado.

Porém dada a dinâmica concorrencial dos mercados o crescimento dos fluxos de caixa não segue um processo linear. A cada período as condições de concorrência e inovação interagem com a trajetória de crescimento da empresa no ciclo de vida dos seus produtos, empresas podem sair de nível de baixo crescimento para alto crescimento se sua estratégia de mercado e gerencial é mais bem sucedida. Da mesma forma, uma empresa pode experimentar redução de sua taxa de crescimento dos fluxos de caixa com concorrência mais agressiva e diminuição de sua margem de lucro.

Frente a precedência das condições do mercado e transição entre níveis de crescimento das empresas ao longo do tempo propomos o uso de K-means para determinar grupos de crescimento baixo, moderado e alto. Dada a organização das empresas em grupos, calculamos a probabilidade de transição de cada empresa entre os grupos de baixo, moderado e alto crescimento. Depois calculamos a taxa esperada de crescimento da empresa pela taxa de crescimento média de cada grupo condicional a empresa se manter em um grupo de crescimento.

Seja a probabilidade de transição de cada empresa  $i$  entre os grupos de crescimento dos fluxos de caixa  $p_{i_{jk}} = P\{g_{t+1} = k | g_t = j\}$ , por exemplo com a probabilidade da empresa sair do grupo de baixo crescimento para crescimento estável. Considerando a taxa média de crescimento de cada grupo no período corrente:  $\mu_{baixo}$ ,  $\mu_{moderado}$ ,  $\mu_{alto}$ . Então a taxa esperada de crescimento no próximo período é a taxa de crescimento esperada condicional aos estados:

$$E[g_{i_{t+1}} | S] = \mu_{baixo} * p_{i_{t+1_{baixo}}} + \mu_{moderado} * p_{i_{t+1_{moderado}}} + \mu_{alto} * p_{i_{t+1_{alto}}}$$

Onde  $K$  é o conjunto dos estados de crescimento,  $K = \{\text{baixo, moderado, alto}\}$ . As probabilidades dos níveis de crescimento seguem uma cadeia de Markov, com probabilidade de transição para cada empresa  $i$  dada por:

$$P_{i,jk} = \begin{bmatrix} p_{i,baixo,baixo} & p_{i,baixo,moderado} & p_{i,baixo,alto} \\ p_{i,moderado,baixo} & p_{i,moderado,moderado} & p_{i,moderado,alto} \\ p_{i,alto,baixo} & p_{i,alto,moderado} & p_{i,alto,alto} \end{bmatrix}.$$

Supondo uma cadeia de Markov de primeira ordem, então o vetor com as probabilidades previstas da empresa  $i$  estar em cada estado de crescimento no próximo período é

$$P_{i,t+1} = P_{i,jk}' * P_{i,t}$$

, com vetor de probabilidades do estado de crescimento previstas

$$P_{i,t+1} = \begin{bmatrix} p_{i,t+1,baixo} \\ p_{i,t+1,moderado} \\ p_{i,t+1,alto} \end{bmatrix}.$$

Ao longo do tempo, de acordo com a estratégia empresarial e as condições do seu mercado consumidor, a empresa transita entre períodos de baixo, alto e crescimento moderado. Uma vez calculada as probabilidades de transição podemos calcular a duração esperada da empresa em um estado de crescimento com  $E[D_i \text{ estado } k] = \frac{1}{1-p_{i,kk}}$ .

Considerando o crescimento dos fluxos de caixa determinado pelos fundamentos da empresa, como o produto do retorno sobre o investimento vezes o percentual do lucro operacional reinvestido,  $g = b * ROI$ . Quanto maior o investimento e maior retorno sobre o investimento, maior será o crescimento. Usando as dimensões de crescimento, rentabilidade do capital e investimento de cada empresa  $\{g_{it}, b_{it}, ROI_{it}\}$  irei aplicar o algoritmo de K-means para definir grupos de crescimento alto, baixo e estável.

A previsão da taxa de crescimento de uma empresa é complexa, afetada por diversos fatores e comportamento não linear de acordo com o seu estágio de crescimento. Ao invés de usar a taxa média de crescimento histórico da empresa para projetar o seu fluxo de caixa, considero a taxa média de crescimento das empresas num mesmo grupo de investimento, rentabilidade e crescimento. Seja a amostra disponível até a data  $T$ , a estimativa da taxa média de crescimento de cada grupo  $k$  é dada por sua média amostral em janela crescente, adotando a média desde a primeira observação até a última disponível. Sendo a estimativa da taxa de crescimento do grupo  $k$  no modelo de projeção de K-means em cadeias de Markov (K-means Markov Chain = K-MMC) dada por:

$$E[g_k] = \frac{\sum_{t=1}^T \mu_{k,t}}{T}.$$

Como as taxas de crescimento são estacionárias, adoto a taxa média de crescimento de cada grupo como previsão da taxa de crescimento do grupo no período seguinte. Não é plausível um crescimento não estacionário positivo, pois a empresa terminaria dominando toda a economia em todos os mercados de diferentes produtos; enquanto em crescimento não estacionário negativo a empresa encerra as operações com descontinuidade dos negócios.

Para esta especificação as taxas médias de crescimento dos fluxos de caixa não teriam autocorrelação no tempo, e toda dependência temporal é descrita pela cadeia de Markov (KROLZIG, 1997; FRÜHWIRTH-SCHNATTER, 2006). A cadeia de Markov aplicada aos clusters de K-means descreve a transição entre grupos de maiores vantagens competitivas para menor desempenho operacional da empresa em relação aos seus concorrentes.

As condições de mercado interagem com a trajetória de crescimento da empresa no ciclo de vida dos seus produtos, empresas podem sair de um período de alto crescimento para baixo crescimento determinado pelo estado da atividade econômica. Uma empresa com alto investimento e maior crescimento esperado pode terminar com capacidade ociosa e crescimento baixo em uma conjuntura recessiva. Da mesma forma uma empresa com baixo investimento pode experimentar maior crescimento dos fluxos de caixa com aumento de sua margem de lucro em uma conjuntura de expansão.

A projeção das taxas de crescimento dos fluxos de caixa da empresa por K-means em cadeias de Markov, combina características individuais dos fluxos de caixa da empresa e setoriais. A taxa de crescimento esperada dos fluxos de caixa depende da taxa média dos grupos de alta, médio e baixo crescimento, determinados por grupos de empresas no setor, porém também depende das características individuais da empresa pela sua recorrência de pertencer ao grupo de maior crescimento.

Na abordagem de avaliação de empresas com projeção de K-means em cadeias de Markov temos uma semelhança com a avaliação relativa, com a precificação dependendo do comportamento de fundamento médio de empresas comparáveis de alto, médio ou baixo crescimento; porém conjugadas com a inferência de período de vantagem competitiva da empresa com recorrência entre as empresas de melhor ou pior desempenho.

Chegamos a uma abordagem conservadora combinando projeções de um agrupamento comparável e características individuais. Projetar fluxos de caixa baseados apenas no histórico dos fluxos de caixa da empresa individual pode extrapolar condições

não replicáveis no tempo, enquanto o comportamento médio da taxa de crescimento de um grupo comparável descreve desempenho estável do agrupamento. Por sua vez a recorrência da empresa nos grupos de maior ou menor crescimento inclui na projeção aspectos de performance gerencial do empreendimento individual.

Na avaliação de empresas por projeção de K-means em cadeias de Markov o valor da empresa depende da sua trajetória de fluxos de caixa individual até o último fluxo de caixa disponível sobre o qual é aplicado a taxa de crescimento esperada, porém a taxa de crescimento dos fluxos de caixa é obtida de acordo com a taxa média do crescimento de empresas comparáveis pelo agrupamento. Ademais, quanto maior a recorrência de boa performance da empresa nos agrupamentos de melhor desempenho maior a probabilidade de se encontrar no grupo de maior crescimento, maiores seus fluxos de caixa esperados e maior seu valor.

Na proposta de projeção a trajetória estocástica de resultados da empresa e do seu seguimento se compõe para determinar o valor da empresa. Melhores resultados da empresa ao longo do tempo aumentam o seu valor, via aumento do fluxo de caixa do período corrente que incide a taxa de crescimento esperada; e também pq aumentam a estimativa de probabilidade de recorrência da empresa no grupo de maior crescimento. Por sua vez, aumentos de retorno do grupo de maior crescimento também aumentam o valor da empresa.

## **4 Resultados Empíricos**

O estudo realizado faz análise de aprendizado estatístico de empresas do setor de energia com maior liquidez listadas na B3. Na próxima seção são apresentados os dados utilizados. A seção seguinte faz a análise de agrupamentos no setor de energia e a dinâmica de mudança das empresas entre grupos de alto, baixo e médio crescimento do lucro operacional. A seção de resultados empíricos encerra com exercício de projeção dos fluxos de caixa livre da empresa ELET3 com projeção por K-means em cadeias de Markov.

### **4.1 Descrição dos Dados**

Para o estudo de análise de agrupamentos consideramos dados das empresas do setor de energia elétrica considerando a classificação setorial internacional NAICS (North

American Industry Classification System): geração, transmissão e distribuição de energia elétrica. Adotamos como filtro de liquidez todas as empresas do setor de energia que pertenciam ao Índice Brasil Amplo (IBRA) no 1º quadrimestre de 2025, que considera as ações com maior índice de negociabilidade das empresas de capital aberto listadas na B3 e consiste no índice amplo da B3 com maior número de ações na composição da carteira.

O período de análise foi de janeiro de 2010 até 2023. Utilizamos como início dos dados das demonstrações financeiras janeiro de 2010 pois corresponde ao ano que começou a vigorar os padrões de contabilidade IFRS no Brasil, como divulgações de balanços trimestrais (ITR). Apesar de ter dados do exercício de 2024 no início de 2025, no momento de elaboração deste trabalho nem todas as empresas tinha divulgado os balanços do exercício de 2024 e restringi para dados das demonstrações financeiras até 2023.

Desta forma foram consideradas empresas do setor de geração, transmissão e distribuição de energia que pertenciam a carteira do IBRA em março de 2025 e que realizaram abertura de capital até 2013. Formam incluídas no estudo 11 empresas: Alupar (ALUP11), Cemig (CMIG4), Copel (CPLE3), CPFL energia (CPFE3), Eletrobrás (ELET3), Energisa (ENGI11), Eneva (ENEV3), Egie Brasil (EGIE3), Equatorial (EQTL3), Isa Energia (ISAE4) e TAESA (TAEE11). Assim temos dados contábeis e de mercado das empresas do setor de energia mais relevantes da bolsa de valores brasileira.

Adotamos dados em frequência anual das demonstrações de exercício e cotações acessadas pelo Economática®. Os dados contábeis em frequência anual são comuns na prática de avaliação de empresas para projeção do fluxo de caixa.

Os dados contábeis em análise econômico-financeira são caracterizados por geralmente ter pequena extensão, principalmente para empresas que fizeram abertura de capital a pouco tempo. A abordagem proposta de projeção de fluxos de caixa por K-means em cadeia de Markov é especialmente interessante para séries com pequeno número de observações disponíveis, a proposta de K-means permite ampliar a quantidade de observações ao projetar fluxos de caixa através de agrupamentos de empresas comparáveis por possuírem características comuns. Em cada ano, ao invés de ter observação de apenas uma empresa, ampliamos para resultados do número de empresas que fazem parte do cluster e são comparáveis no mesmo ano.

O método de projeção de K-means por cadeias de Markov também permite tratar de dados missing, adotando o centroide do Cluster no período em que não tem registro como representação da empresa que faz parte do agrupamento com dados faltantes.

## 4.2 Análise Dinâmica de Cluster no Setor de Energia Elétrica

A projeção dos fluxos de caixa por K-means em cadeias de Markov considera os diferentes agrupamentos de empresa e suas transições entre os clusters ao longo do tempo para fazer previsão pelo processo estocástico de cadeias de Markov.

Considerando os clusters de empresas no setor de geração, transmissão e distribuição de energia, pelo vetor de características: crescimento do NOPAT (Lucro Operacional Líquido); taxa de retenção do lucro operacional para investimento,  $b = \frac{CAPEX - Depreciação + NCG}{NOPAT}$ ; e retorno sobre o investimento (ROIC – Return on Invested Capital). Na análise do número de Cluster foi pesquisado de 2 a 4 clusters, priorizando o número de agrupamentos de menor soma dos quadrados dos erros intragrupo e penalizando resultados com apenas 1 empresa em um cluster, adotando a distância euclidiana como critério de similaridade. O melhor desempenho para minimização da soma dos quadrados intragrupo foi para 3 clusters.

O número de cluster adotado na amostra dos dados das empresas de energia no período 2011 a 2023 foi K=3, conforme tabela 1, representando os clusters: de baixo (grupo 1), médio (grupo 2) e alto crescimento (grupo 3) sintetizados pela média dos clusters no período (quadrante da quarta linha e segunda coluna). O cluster de empresas de mais alto crescimento do lucro operacional (NOPAT) tem a maior taxa de investimento, maior crescimento médio do NOPAT e maior retorno médio sobre o investimento (ROIC). O cluster de empresas de crescimento médio tem menor retorno, investimento e crescimento do lucro operacional. O cluster de baixo crescimento em média tem empresas com decréscimo médio do lucro operacional, desinvestimento caracterizado pela taxa de investimento negativo dos fluxos de caixa operacional e menor retorno sobre o investimento.

**Tabela 1 – Cluster para as empresas de geração, transmissão e distribuição de energia no período 2011 a 2023.**

grupo	2011			2012			2013			2014		
	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC
1	0.07	1.73	0.10	-1.23	-4.73	-0.04	-0.49	-2.80	-0.03	-0.62	-12.89	-0.01
2	0.26	-8.86	-0.04	0.01	2.47	0.07	-0.08	0.98	0.06	-0.53	0.20	0.11
3	0.28	-0.15	0.10	0.07	0.67	0.11	0.08	0.41	0.12	0.78	0.72	0.05
grupo	2015			2016			2017			2018		
	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC
1	-0.21	-0.93	0.09	-0.85	1.02	0.07	-0.59	0.24	0.06	0.06	1.78	0.06
2	-0.03	0.74	0.06	0.55	-0.11	0.08	0.12	0.56	0.08	0.38	0.11	0.10
3	5.41	-0.21	-0.07	11.04	0.03	0.46	0.24	2.21	0.07	1.98	0.90	0.09
grupo	2019			2020			2021			2022		
	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC
1	-0.01	1.10	0.10	0.16	2.20	0.06	0.03	0.21	0.12	-0.30	4.30	0.03
2	0.00	0.16	0.06	0.20	-0.28	0.08	0.47	0.51	0.09	-0.22	-0.43	0.08
3	1.06	0.70	0.13	0.70	0.04	0.15	0.50	-0.23	0.08	0.27	0.54	0.11
grupo	2023			Média 2011-2023			Média 11, 15, 16, 20, 21 e 23			Média 12, 13, 14, 17, 18 e 19		
	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC	gNOPAT	b	ROIC
1	0.09	0.02	0.12	-0.30	-0.67	0.06	-0.15	1.22	0.08	-0.48	-2.88	0.02
2	0.15	0.83	0.07	0.10	-0.24	0.07	0.20	-1.09	0.06	-0.01	0.75	0.08
3	0.93	-0.43	0.04	1.80	0.40	0.11	2.73	-0.06	0.13	0.70	0.94	0.09

Podemos observar a mudança do comportamento dos agrupamentos das empresas de energia ao longo do tempo. Nos anos 2011, 2015, 2016, 2020, 2021, 2022 e 2023 as empresas de maior e/ou médio crescimento apresentaram percentual negativo do lucro operacional investido, de forma que as empresas de maior crescimento do lucro operacional desinvestiram no período. Enquanto nos anos 2012, 2013, 2014, 2017, 2018 e 2019, maior crescimento do lucro operacional é acompanhado de maior investimento e retorno.

Essa mudança de comportamento das companhias de maior e média taxa de crescimento do lucro operacional ao longo do tempo pode ser explicada pela estratégia de manutenção ou elevação dos fluxos de caixa livre da empresa em períodos adversos e de maior risco, com incremento de fluxos de caixa com redução dos investimentos no CAPEX e capital de giro em momentos de maior dificuldade econômica.

O fluxo de caixa da empresa é igual ao NOPAT somado a depreciação, menos CAPEX e Necessidade de Capital de Giro (NCG). Desinvestimentos com venda de ativos imobilizados, assim como redução do capital de giro em momentos de retração da atividade econômica, podem aumentar o NOPAT com a redução da depreciação com menor capital físico. Também aumenta o fluxo de caixa livre pela captação pelo aumento relativo do passivo circulante em relação ao período anterior ou ao ativo circulante no período corrente. O crescimento do lucro operacional acompanhado de desinvestimento

foi registrado em anos de crise econômica e períodos adjacentes, como em 2016 da crise política e em 2020 da crise do coronavírus.

A venda de ativos imobilizados é uma forma direta de aumentar o lucro através de resultado não recorrente em momentos de crise e manter lucro líquido apesar da retração econômica. A venda de imobilizado também reduz o CAPEX aumentando o fluxo de caixa da empresa, e reduz a depreciação contribuindo para aumento do NOPAT embora a menor depreciação reduza o benefício fiscal da depreciação no fluxo de caixa livre da firma.

**Tabela 2 – Matriz de Probabilidades de Transição na Cadeia de Markov do setor de geração, transmissão e distribuição, no período 2011 a 2023.**

cluster no período inicial	cluster no período seguinte			Duração esperada
	baixo crescimento St+1=1	crescimento médio St+1=2	crescimento alto St+1=3	
St=1 - baixo crescimento	0.18	0.39	0.42	1.23
St=2 - crescimento médio	0.28	0.52	0.21	2.07
St=3 - crescimento alto	0.37	0.49	0.14	1.17

As empresas mudam entre os agrupamentos de alto, médio e baixo crescimento do lucro operacional ao longo do tempo. Pela matriz de probabilidades de transição (Tabela 2) podemos observar que o crescimento médio tem maior recorrência nas empresas ao longo do tempo, com 52% de probabilidade de continuar no agrupamento de crescimento médio se no período anterior realizou crescimento médio. O cluster de baixo crescimento tem recorrência inferior a crescimento médio, com 18% de probabilidade de continuar no grupo com baixo crescimento se teve menor crescimento no período antecedente. Por sua vez, a menor recorrência acontece para o grupo de alto crescimento, com 14% de probabilidade de se repetir no próximo período.

A maior recorrência do crescimento médio pode ser representada pela duração esperada de 2,07 anos das empresas no grupo de médio crescimento (Tabela 2), enquanto a duração esperada das empresas no grupo de baixo crescimento é de 1,23 anos e 1,17 anos no grupo de alto crescimento.

As probabilidades de longo prazo da cadeia de Markov na matriz de probabilidades de transição descrevem a tendência de longo prazo das probabilidades dos estados e são de 27% de probabilidade para as empresas de energia participarem do grupo de baixo crescimento do lucro operacional; 48% de probabilidade de pertencerem ao

cluster de crescimento médio; e 25% de probabilidade de pertencerem ao cluster de alto crescimento.

Considerando as probabilidades realizadas na amostra de estimação as empresas de energia (Tabela 3) participaram do grupo de baixo crescimento do lucro operacional 30% das vezes, do cluster de crescimento médio do NOPAT 44% das vezes e do agrupamento de maior crescimento 26% das vezes. A diferença entre as probabilidades de longo prazo da cadeia de Markov e da frequência na amostra de estimação ocorre porque a probabilidade de longo prazo extrapola a dinâmica de transição das empresas entre os grupos de crescimento para o longo prazo que é um período maior que a amostra de estimação.

**Tabela 3 – Probabilidades dos Cluster das empresas de energia dentro da amostra de estimação (2011 a 2023).**

<b>cluster</b>	<b>Frequência realizada</b>
S=1 - baixo crescimento	30%
S=2 - crescimento médio	44%
S=3 - crescimento alto	26%

Uma limitação da análise de agrupamentos por K-means é que tende a classificar outliers como um cluster. Na projeção por K-means em cadeias de Markov propomos estimar a taxa de crescimento pela taxa média de empresas similares baseada nos vetores de crescimento do lucro operacional, taxa de reinvestimento e ROIC representando múltiplos de fluxos de caixa. Nos agrupamentos com apenas 1 empresa com observações extremas as taxas médias de crescimento do NOPAT, reinvestimento e ROIC ficam influenciadas em demasia por uma empresa.

Para manter as estimativas baseadas em médias de empresas comparáveis ajustamos o centroide para obter as taxas médias retirando os valores extremos no caso de grupos com apenas uma empresa, que ocorreram para o crescimento do lucro operacional no grupo de alto crescimento em 2015 e 2016; taxa de reinvestimento para o grupo de médio crescimento em 2011 e baixo crescimento em 2014; e retorno sobre o investimento no grupo de alto crescimento em 2016.

Na tabela 4 o centroide ajustado que expressa a média das taxas de crescimento do lucro operacional, taxa de reinvestimento e ROIC, mantemos o resultado de que

empresas com maior crescimento tendem a ter maior investimento e retorno sobre o investimento. Porém no grupo de maior crescimento do NOPAT mesmo empresas com taxa de reinvestimento levemente menor conseguem realizar maior crescimento de lucro operacional por possuírem maior geração de NOPAT por unidade de capital investido expressos em maior ROIC. Na projeção de fluxos de caixa por K-means em cadeias de Markov vamos empregar a taxa média ajustada dos agrupamentos.

**Tabela 4 – Centroide dos Clusters sem Outliers para as empresas de geração, transmissão e distribuição de energia no período 2011 a 2023.**

grupo	Média 2011-2023 ajustada		
	gNOPAT	b	ROIC
1	-0.30	0.35	5.58%
2	0.10	0.48	6.92%
3	0.63	0.40	8.19%

#### 4.3 Projeção do Fluxo de Caixa Livre da Firma por K-means em Cadeias de Markov

Vamos aplicar a projeção por K-means em cadeias de Markov para Eletrobras na estimação dos seus fluxos de caixa esperado. A Eletrobrás é caracterizada por demonstrações contábeis históricas com relevante volatilidade, alternando fluxos de caixa livre da firma negativos e positivos dependendo do ano e nível de investimentos entre períodos de alta e baixa e até registra descontinuidades. A mudança de comportamento das demonstrações contábeis ao longo do tempo é uma característica que pode ser modelada por cadeias de Markov.

A Eletrobras é uma empresa de economia mista de capital aberto com participação relevante do governo federal como acionista, que detém *golden share* que permite intervir em decisões estratégicas mesmo sem ter maioria acionária. A visão do estado na economia e políticas de energia na alternância de governos reflete na estratégia e resultados da empresa.

A maior variabilidade das demonstrações contábeis da Eletrobras pode ser caracterizada por sua matriz de probabilidades de transição (Tabela 5), com maior recorrência dos estados de baixo crescimento do lucro operacional que apresenta a maior probabilidade de recorrência de 57%, enquanto a probabilidade de recorrência do crescimento médio é de 50%. Diferente do setor de geração, transmissão e distribuição que tem maior recorrência no crescimento médio do NOPAT Eletrobrás tem maior

recorrência no cluster de baixo crescimento. O baixo crescimento tem duração esperada de 2,33 anos para ELET3, enquanto o crescimento médio tem duração esperada de 2 anos e alto crescimento de 1 ano.

Para Eletrobras crescimento médio não se comunica com o crescimento baixo, tal que a empresa sai direto do grupo de crescimento baixo para alto nos seus dados históricos no período 2011 a 2023. Por sua vez o grupo de alto crescimento não apresenta recorrência no período de análise, uma vez nesse estado os dados históricos registram transição para baixo crescimento com 67% de probabilidade e transição para crescimento médio com 33% de probabilidade. A maiores probabilidades de transição entre grupos são de alto crescimento do lucro operacional para baixo crescimento do NOPAT.

**Tabela 5 – Matriz de Probabilidades de Transição na Cadeia de Markov da Eletrobrás, no período 2011 a 2023.**

cluster no período inicial	cluster no período seguinte			Duração esperada
	baixo crescimento St+1=1	crescimento médio St+1=2	crescimento alto St+1=3	
St=1 - baixo crescimento	0.57	0.00	0.43	2.33
St=2 - crescimento médio	0.00	0.50	0.50	2.00
St=3 - crescimento alto	0.67	0.33	0.00	1.00

Para a projeção dos fluxos de caixa a literatura admite diferentes abordagens, desde maior nível de desagregação a partir da receita líquida como em Damodaran (2014), ou maior agregação como lucro operacional (NOPAT – Net Operational Profits After Taxes) e fluxo de caixa operacional (ASSAF NETO, 2021). Partindo da equação do Fluxo de Caixa Livre da Firma (FCLF) e os itens contábeis que o compõe conforme adotado pelo Economática®,  $FCLF = NOPAT + Depreciação - CAPEX - NCG$ , projetamos os fluxos de caixa a partir do crescimento do NOPAT, parametrizando o investimento em capital imobilizado líquido da Depreciação somado ao investimento em capital de giro em função do NOPAT:  $CAPEX - Depreciação + NCG = b \cdot NOPAT$ .

A depreciação tem mais de um significado na fórmula do fluxo de caixa livre da firma. Pelo NOPAT temos a receita líquida menos custos e despesas e depreciação, e apropriada através da depreciação linear ou acelerada no resultado do exercício o investimento em capital físico. Ainda, pela taxa de reinvestimento a depreciação tem duplo significado, por um lado a depreciação é reposição do desgaste em capital físico; por outro lado a depreciação é somada ao lucro operacional para formar o fluxo de caixa operacional porque é uma despesa que não implica em saída de caixa. Portanto a

expressão CAPEX - Depreciação + NCG = CAPEX + NCG - Depreciação = b\*NOPAT, representa o efeito da depreciação com natureza de desgaste relacionado ao CAPEX bem como o efeito de liquidez relacionado ao capital de giro.

Conforme Assaf Neto (2021), parametrizamos o reinvestimento líquido em CAPEX e NCG em função do NOPAT, o fluxo de caixa livre da firma é representado por:

$$FCLF = NOPAT + Depreciação - CAPEX - NCG,$$

$$FCLF = NOPAT - CAPEX + Depreciação - NCG,$$

, seja CAPEX - Depreciação + NCG = b\*NOPAT, então:

$$FCLF = NOPAT - b*NOPAT,$$

$$FCLF = NOPAT*(1-b).$$

Todas as empresas se defrontam com as mesmas condições de expansão, normalidade e retração do mercado que tem importante impacto no seu crescimento. Como a taxa de crescimento do NOPAT é uma característica que define os agrupamentos, a taxa de crescimento esperada do NOPAT é dada pelo valor esperado do crescimento do lucro operacional condicional aos cluster de crescimento. Por outro lado, a taxa de reinvestimento do lucro operacional é uma decisão específica da empresa e na projeção vai ser expressa pela média histórica da empresa sob análise.

$$E[gNOPAT_{t+1}|I_t] = \sum_{k=1}^K P\{G_{k,t+1} = k|I_t\} * \mu_{gk}$$

Onde  $P\{G_{k,t+1} = k|I_t\} = P' * P\{G_{k,t} = k\}$ , em que  $P\{G_{k,t} = k\}$  é a probabilidade dos agrupamentos dado todo o conjunto de informação até o período corrente.

Projetamos os fluxos de caixa a partir das informações do período corrente por 1, 2 e l períodos a frente por:

$$E[FCLF_{t+1}|I_t] = (1 + \sum_{k=1}^K P\{G_{k,t+1} = k|I_t\} * \mu_{gk}) * NOPAT_t * (1 - \bar{b})$$

$$E[FCLF_{t+1}|I_t] = (1 + E[g_{t+1}|I_t]) * NOPAT_t - \bar{b} * (1 + E[g_{t+1}|I_t]) * NOPAT_t$$

$$E[FCLF_{t+2}|I_t] = (1 + E[g_{t+1}|I_t])(1 + E[g_{t+2}|I_t]) * NOPAT_t$$

$$- \bar{b} * (1 + E[g_{t+1}|I_t])(1 + E[g_{t+2}|I_t]) * NOPAT_t$$

E, portanto:

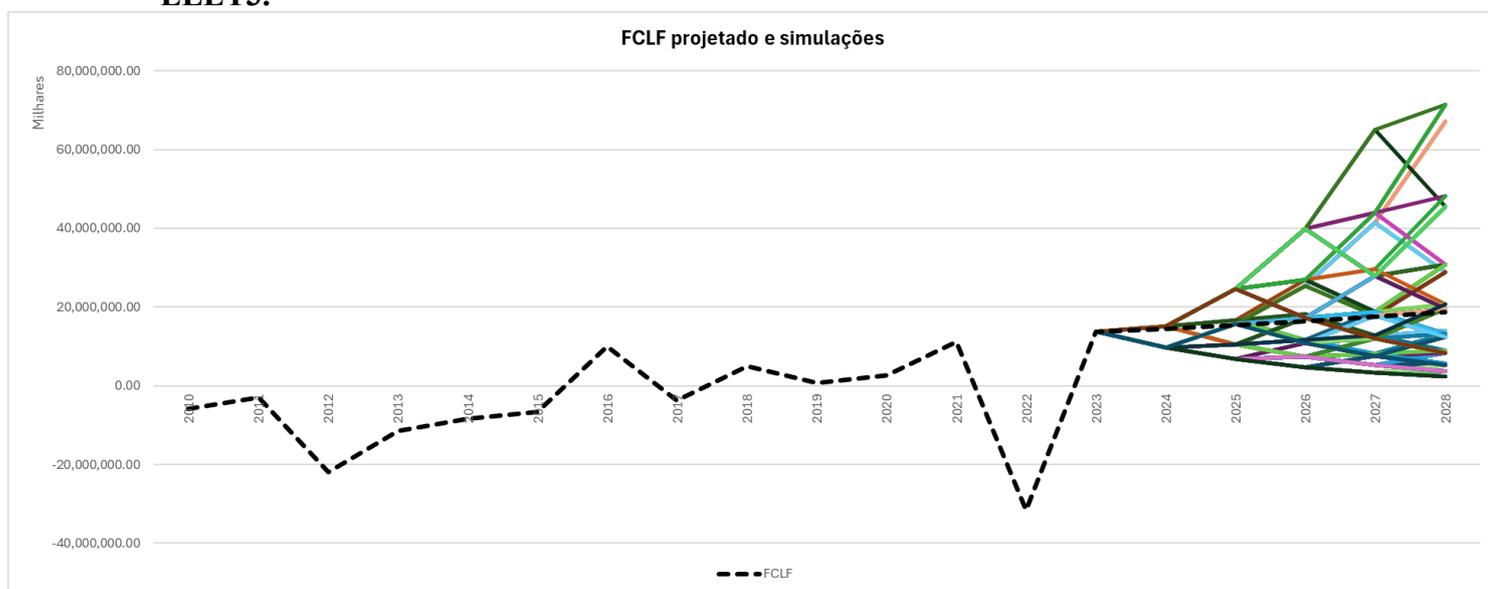
$$E[FCLF_{t+l}|I_t] = \prod_{i=1}^L (1 + E[g_{t+i}|I_t]) * NOPAT_t - \bar{b} * \prod_{i=1}^L (1 + E[g_{t+i}|I_t]) * NOPAT_t$$

$$E[FCLF_{t+l}|I_t] = [ \prod_{i=1}^L (1 + E[g_{t+i}|I_t]) * NOPAT_t ] * (1 - \bar{b})$$

As projeções de fluxos de caixa da ELET3 por K-means em cadeia de Markov (Gráfico 1) foram realizadas para 5 períodos de tempo, como adotado geralmente para o período explícito em avaliação de empresas. As projeções têm características interessantes, possuindo uma taxa projetada para o crescimento do NOPAT diferente para cada ano: 5,65% em 2024, 6,33% em 2025, 6,62% em 2026, 6,81% em 2027 e 6,89% em 2028. Na última observação contábil antes da projeção, no exercício de 2023, ELET3 está no estado de alto crescimento e pelas probabilidades de transição o estado de alto crescimento não é recorrente reduzindo a taxa de crescimento para a primeira projeção, que após novas transições aumenta de acordo com a dinâmica da cadeia de Markov.

Como o regime de baixo e médio crescimento do lucro operacional tem maior recorrência as simulações de fluxo de caixa livre da firma para ELET3 têm maior número de trajetórias com crescimento baixo e queda, e menor número de trajetórias com realização de alto crescimento acumulado.

**Gráfico 1 – FCLF realizado e projeções por K-means em cadeia de Markov para ELET3.**



**Nota:** No gráfico temos o fluxo de caixa livre da firma para ELET3 anual histórico de 2010 até 2023 registrado com linha pontilhada e a partir de 2024 é a projeção dos fluxos de caixa por K-means em cadeia de Markov. As linhas coloridas são simulações das trajetórias do FCLF pela taxa de crescimento do lucro operacional em cadeias de Markov e pela taxa de reinvestimento médio de ELET3, foram consideradas 250 simulações.

## 5 Considerações Finais

A projeção de fluxo de caixa é de grande importância em finanças, seja para avaliação de empresas quanto para análise de viabilidade econômica de projetos de investimento. O preço justo de uma empresa é a soma do valor presente descontados sobre os fluxos de caixa esperados, sendo fluxo de caixa sob incerteza e descontados por uma taxa de desconto que reflita as características do seu risco econômico e financeiro.

A prática de avaliação de empresas baseia-se em projeção de fluxos de caixa do exercício anual com poucas observações de demonstrações financeiras do exercício e baseada em subjetividade do analista para realizar análise econômico-financeira da empresa e determinar seu preço justo descontado os fluxos de caixa esperado pelo custo médio ponderado do capital.

Previsões com pouco número de observações resulta em estimativas com maior erro padrão e vieses mais pronunciados com ocorrência de outliers. Ademais os fluxos de caixa de cada ano são afetados pela recessão e expansão da economia. Frente a reduzidos dados históricos e com mudança de comportamento da empresa e da economia ao longo do tempo as projeções de fluxo de caixa dos analistas acabam projetando o comportamento das demonstrações contábeis mais recentes e fazendo uma avaliação subjetiva das condições de mercado e da empresa.

O presente trabalho propõe a projeção de fluxos de caixa por K-means em cadeias de Markov, combinando um método de aprendizado estatístico e o processo estocástico. O método proposto permite aumentar o número de observações disponíveis para projeção da taxa de crescimento, não dependendo apenas das observações de uma empresa ao usar a taxa de crescimento médio de grupo de empresas comparáveis. Ademais a projeção dos fluxos de caixa depende do desempenho da empresa entre os grupos de alto, baixo e médio crescimento ao longo do tempo, com projeção dinâmica de acordo com uma cadeias de Markov de primeira ordem.

Foi realizado um estudo de agrupamentos das empresas com maior liquidez no setor de energia brasileiro, caracterizando grupos de alto, baixo e médio crescimento do lucro operacional. Onde foi verificado que o grupo de maior crescimento possui reinvestimento relevante acompanhado de maior retorno sobre o capital investido. Ademais as empresas em anos de maior incerteza e risco em conjunturas econômicas adversas, adjacentes da crise política de 2016 e do Coronavírus em 2020, reduzem o

reinvestimento líquido em capital físico e capital de giro para aumentar o fluxo de caixa operacional e resultar em maior magnitude do fluxo de caixa livre da firma.

O método de projeção por K-means em cadeias de Markov foi aplicado para fluxos de caixa livre da firma da Eletrobrás (ELET3), como resultado obtemos projeções com boas propriedades: com taxas de crescimento diferentes para cada ano; que consideram as transições no tempo entre alto e baixo crescimento da empresa; e com simulações de trajetórias dos fluxos de caixa estáveis e que reproduzem as características de competitividade da empresa com as demais concorrentes do setor variando entre grupos de maior e menor crescimento.

### Referências Bibliográficas

ASSAF NETO, A. *Valuation: Métricas de Valor e Avaliação de Empresas*. Atlas, 4 ed, 2021.

CARHART, M. M. On Persistence in Mutual Fund Performance. *The Journal of Finance*, v. 52, n.1, p 57–82, 1997.

COCHRANE, J. H. *Asset Pricing*. Revised edition, 2005.

DAMODARAN, A. *Investment Valuation Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*. Wiley, Fourth edition, 2025.

DELAO, R.; HAN, X.; MYERS, S., *The Cross-section of Subjective Expectations: Understanding Prices and Anomalies*. Jacobs Levy Equity Management Center for Quantitative Financial Research Paper, 2022

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The capital asset pricing model: theory and evidence. *Journal of Economic Perspectives*, v. 18, n. 3, p. 25-46, 2004.

FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S. *Finite Mixture and Markov Switching Models*. Springer, 2006.

HAAS, M.; MITTINK, S.; PAOLELLA, M. S. A. New Approach to Markov-Switch GARCH Models. *Journal of Financial Econometrics*, v. 2, n. 4, p. 493-530, 2005.

HAMILTON, J. D. A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, v. 57, n. 2, 1989.

HAMILTON, J. D.; SUSMEL, R. Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics*, v. 64, n. 1-2, p. 307- 333, 1994.

HEWAMALAGE, H.; BERGMEIR, C; BANDARA, K. Recurrent Neural Networks for Time Series Forecasting: Current status and future directions. *International Journal of Forecasting*, v. 37, n. 1, 2020.

HRUSCHKA, H.; NATTER, M. Comparing performance of feedforward neural nets and K-means for cluster-based market segmentation. *European Journal of Operational Research*, v. 114, n. 2, 1999.

KROLZIG, H.-M. *Markov-Switching Vector Autoregressions Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis*. Springer, 1997.

MORTON, C.; ANABLE, J.; NELSON, J. D. Consumer Structure in the Emerging Market for Electric Vehicles: Identifying market segments using cluster analysis. *International Journal of Sustainable Transportation*, v. 11, n.6, p. 443–459, 2017.