

Modelagem de volatilidade estocástica via aproximações de Laplace aninhadas integradas: uma extensão multifatorial e multivariada

João Pedro Coli de Souza M. Nacinben e Márcio Laurini
FEA-RP/USP

2023

Resumo

O presente artigo discute uma possível extensão multivariada para modelos de volatilidade estocástica estimados com o uso de aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA). As já consagradas técnicas baseadas em simulações, tais como Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), podem ser proibitivas ou pouco eficientes em tempo computacional, conforme o número de observações e a dimensionalidade do problema aumentam, além de não estarem livres de problemas de convergência de cadeia. Nesse sentido, o trabalho objetiva o estabelecimento de uma forma mais computacionalmente eficiente de estimar modelos multivariados de volatilidade estocástica, propondo-se, para tanto, uma formulação multifatorial estimada a partir da metodologia INLA, permitindo uma abordagem que explora álgebra linear esparsa e paralelização. Os ganhos de eficiência com o modelo proposto são avaliados em testes realizados com base em séries de retornos de índices de bolsa de valores, sendo então comparados com os resultados de um modelo multivariado e fatorial estimado por MCMC.

Palavras-chave: Modelos Multivariados de Volatilidade Estocástica. Aproximações de Laplace. Volatilidade Estocástica Fatorial. Inferência Bayesiana Aproximada.

Introdução

Em séries financeiras, os chamados modelos de volatilidade condicional são de grande interesse, posto que o risco desempenha um papel considerável na determinação de preços de ativos e na construção de ferramentas para cobertura dos mesmos. No entanto, por se tratar de um processo latente, a volatilidade condicional não é facilmente estimada por meio do ferramental convencional, que compreenderia, a título de exemplo, os estimadores de máxima verossimilhança, tendo em vista que estes requerem que, a cada período, a volatilidade não-observada seja marginalizada, implicando no cálculo de uma integral múltipla com dimensão igual ao tamanho da amostra. Como resposta, a literatura apresenta o desenvolvimento de caminhos distintos quanto do tratamento dado ao processo de volatilidade assumido.

Uma classe relevante de modelos é a definida pelo tratamento da volatilidade condicional como um processo estocástico, denominados usualmente como modelos de volatilidade estocástica (SV). Introduzida por [Taylor \(1986\)](#), em uma representação não-linear em espaço de estados com a log-variância dada por um processo AR(1), esta abordagem traz algumas vantagens, por permitir que sejam incorporados facilmente fatos estilizados de séries de tempo em finanças, tais como retornos não-normais e *clusters* de volatilidade, além de não assumir qualquer hipótese de determinismo sobre a volatilidade, conferindo maior generalidade.

Dentro da perspectiva frequentista, o principal desenvolvimento se deu em torno do método de quasi-máxima verossimilhança aliado à decomposição do erro de previsão via Filtro de Kalman, proposto de forma independente por [Harvey, Ruiz e Shephard \(1994\)](#) e [Nelson \(1988\)](#). A estimação parte de uma linearização do modelo, fazendo com que seja uma aproximação computacionalmente pouco complexa, o que seria um atrativo, não fosse a evidência, encontrada por [Andersen e Sorensen \(1996\)](#), de que essa linearização introduz um viés nas estimativas. De forma alternativa, as técnicas de estimação bayesianas se mostram especialmente interessantes, em virtude de processos latentes poderem ser tratados como componentes adicionais do modelo, ou seja, como parâmetros adicionais a serem estimados, o que viabiliza o emprego de métodos tradicionais de inferência bayesiana sem grandes complicações. Como exemplos, tem-se os trabalhos de [Kim e Shephard \(1998\)](#) e, mais recentemente, [Kastner e Frühwirth-Schnatter \(2014\)](#), em que são usados algoritmos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC).

De um ponto de vista aplicado, no entanto, metodologias baseadas em simulação, como MCMC, podem trazer consigo alguns obstáculos computacionais, à medida em que o volume de dados envolvido na estimação aumentam, tanto na dimensionalidade, quanto no número de observações. Esses algoritmos estão sujeitos a problemas de convergência de cadeia condicionados por tamanho de amostra e número de parâmetros, tal qual mencionado por [Rajaratnam e Sparks \(2015\)](#), além de um quadro de ineficiência computacional representado pela natureza iterativa e não-paralelizável do método, que se traduz um tempo maior de execução. [Martino et al. \(2011\)](#) propõem, nesse sentido, uma forma alternativa de se realizar estimação bayesiana de modelos de volatilidade estocástica, utilizando aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA). Por meio dessa estrutura, é possível estimar parâmetros e variáveis latentes, desde que o modelo possa ser aproximado por um campo aleatório gaussiano Markoviano, cuja representação pode-se dar por meio de matrizes esparsas. Como principais vantagens, a álgebra linear no contexto de esparsidade acarreta em maior velocidade e eficiência nas operações computadas, evita o problema de convergência de cadeias e permite que se recorra à paralelização para acelerar ainda mais o processo de estimação.

Ainda assim, a literatura que dispõe dessa metodologia tem se estabelecido na análise do caso univariado, isto é, em que a formulação em espaço de estados incorpora um único ativo na análise. A estimação de modelos multivariados de volatilidade estocástica via aproximações de Laplace aninhadas integradas seria, por conseguinte, uma extensão natural a ser explorada, mas a dimensionalidade do problema pode trazer implicações relevantes sobre o uso de INLA para estes modelos. É possível, como observado por [Martino et al. \(2011\)](#), que o ganho informacional (maior volume de dados e dimensão adicional) seja acompanhado de vertiginoso aumento do tempo de estimação, frustrando o propósito de se adotar um ferramental que mira justamente em ser eficiente. O presente trabalho busca, dessa forma, estabelecer um *framework* factível para estimação de modelos de volatilidade estocástica no caso multivariado, tratando de uma generalização para um modelo de fatores

comuns. Referente à aplicação, serão consideradas cotações diárias de índices de bolsas de valores para diversas regiões do mundo. Mais especificamente, pretende-se estimar padrões de dependência de volatilidade para as séries estipuladas, verificando possíveis ganhos de precisão no comparativo com formulações univariadas e ganhos computacionais (performance) no tocante aos amplamente difundidos algoritmos de MCMC.

Por fim, o trabalho encontra-se estruturado em cinco seções, incluindo esta introdução. A seção seguinte consta da revisão e discussão da literatura acerca da estimação de modelos de volatilidade estocástica via INLA, além de abordar aspectos do caso multivariado. Na terceira seção, a metodologia a ser empregada é apresentada em mais detalhes, juntamente às séries que fundamentarão a avaliação dos modelos propostos. Os resultados obtidos são expostos na quarta seção, que antecede uma seção de conclusão, na qual são sintetizados os principais achados.

1 Revisão da literatura

Nesta seção, realiza-se um balanço dos trabalhos mais relevantes que integram a literatura acerca de inferência bayesiana aproximada para modelos de volatilidade estocástica (SV) e de modelagem por fatores. De forma geral, a literatura a respeito do tema de volatilidade estocástica, principalmente no que tange aos seus fundamentos e preceitos teóricos, está razoavelmente consolidada, com avanços recentes vinculados a métodos e estimação. O trabalho de [Taylor \(1986\)](#) introduz o conceito de volatilidade estocástica assumindo retornos log-normais e um processo latente de (log)volatilidade, cuja natureza não-observável levou, em um primeiro momento, a uma busca por desenvolvimentos metodológicos que superassem a inadequação de técnicas tradicionais, como máxima verossimilhança.

Nesse sentido, técnicas de inferência bayesiana, em associação a MCMC, se popularizaram, fomentando assim também uma literatura específica voltada para a proposição de alternativas mais eficientes - entre elas, o uso de aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA), de autoria de [Rue, Martino e Chopin \(2009\)](#) e inserida no contexto de volatilidade estocástica por [Martino et al. \(2011\)](#). Tal *framework* se mostra ao menos tão preciso quanto o de MCMC, segundo evidências colhidas por [Ehlers e Zevallos \(2015\)](#), mas com vantagens do ponto de vista da eficiência na estimação.

Um problema que surge de imediato é a não-observação da variável de log-volatilidade. Seguindo sua formulação, [Taylor \(1986\)](#) sugere tomar quaisquer dois momentos amostrais para estimar μ , ϕ e τ ($= \tau_h[1 - \phi^2]$), mas não h_t , fazendo menção à impossibilidade de se utilizar um estimador de máxima verossimilhança, posto que seria necessário lidar com uma integral múltipla com dimensão igual ao tamanho da amostra. [Harvey \(1989\)](#) propõe, então, uma abordagem frequentista para resolver a questão da estimação da variável latente no modelo, por meio de um estimador de quasi-máxima verossimilhança baseado em decomposição do erro de previsão via Filtro de Kalman. Para tal, lineariza-se o quadrado dos log-retornos, realizando uma decomposição em média mais um processo autorregressivo de primeira ordem, impondo uma representação linear de espaço de estados para o modelo.

1.1 Estimação Bayesiana e aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA)

Paralelo aos desenvolvimentos de cunho frequentista, todavia, diversas técnicas bayesianas de estimação foram propostas, fazendo-se valer do fato de que métodos conven-

cionais de inferência bayesiana são facilmente aplicáveis no caso de modelos com variáveis latentes, que podem ser tratadas como parâmetros adicionais. Polson, Rossi e Jacquier (1994) abordam a questão da volatilidade latente explorando diretamente sua estrutura, recorrendo a algoritmos (*Metropolis-Hastings*) de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) para amostragem da distribuição posterior. As estimações obtidas por MCMC, mesmo para modelos simples de volatilidade estocástica, são capazes de obter ajuste aos dados tão bons quanto modelos altamente parametrizados da família GARCH, como exposto por Kim e Shephard (1998). No entanto, os autores também se deparam com problemas característicos de MCMC, como convergência lenta da cadeia, em função de os componentes da variável de volatilidade latente serem altamente correlacionados.

Além de possíveis inconvenientes causados por falhas ou demoras de convergência, verifica-se também que MCMC pode acarretar em ineficiências associadas à exigência computacional do método para amostras muito grandes. Martino et al. (2011) aventam, como alternativa, a estimação de modelos de volatilidade estocástica por intermédio de aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA), uma metodologia introduzida originalmente por Rue, Martino e Chopin (2009). Desde que os modelos possam ser aproximados ou representados por um Campo Aleatório de Markov Gaussiano (GMRF), parâmetros e fatores latentes podem ser estimados, com a vantagem de se explorar cálculos analíticos (evitando simulações) em matrizes esparsas, com operações facilmente paralelizáveis.

Os autores definem um GMRF como uma variável aleatória Gaussiana $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ com propriedades markovianas, sob as quais, para alguns $i \neq j$'s, x_i e x_j são independentes condicionais a x_{-ij} . Tais propriedades se refletem na matriz de precisão (covariância inversa) $\mathbf{Q}$, de modo que $Q_{ij} = 0$ se, e somente se, x_i e x_j são independentes condicionais a $\mathbf{x}_{-ij}$ ¹. Assim, se o valor esperado de $\mathbf{x}$ é μ , a densidade de $\mathbf{x}$ seria descrita como:

$$\pi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{Q}|^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mu)\right\}$$

Como mostrado por Rue, Martino e Chopin (2009), $\mathbf{Q}$ é esparsa, já que, na maioria dos casos, apenas $\mathcal{O}(n)$ das n^2 entradas dessa matriz são diferentes de zero, ou seja, não-nulas. Também é demonstrado que $\mathbf{Q}$ pode ser fatorada como $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$, em que $\mathbf{L}$ é o triângulo inferior de Cholesky, que herda a esparsidade da matriz de precisão. A partir disso, o cômputo de variâncias marginais pode ser realizado de maneira eficiente usando a matriz $\mathbf{L}$:

$$\Sigma_{ij} = \frac{\delta_{ij}^2}{L_{ii}} - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{k=i+1}^n L_{ki} \Sigma_{kj}, \quad j \geq i, \quad i = n, \dots, 1$$

onde $\Sigma (= \mathbf{Q}^{-1})$ é a matriz de covariância, com $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ caso contrário. Os autores apontam que, com essa equação, os custos computacionais podem ser reduzidos para algo próximo de $\mathcal{O}\{n \log(n)^2\}$.

Partindo então do modelo padrão de volatilidade estocástica, que compreende as equações de r_t e h_t , a proposição de Martino et al. (2011) pode ser replicada atribuindo ao parâmetro de média μ uma distribuição *a priori* gaussiana com média zero e variância conhecida, de modo que o modelo padrão pode ser entendido como um modelo gaussiano latente em que o campo latente $\mathbf{x}$ é dado por:

¹ O vetor $\mathbf{x}_{-i}$ é denotado como sendo o vetor $\mathbf{x}$ menos o seu i -ésimo elemento.

$$\mathbf{x} = \{h_1, \dots, h_n, \mu\} \sim N(0, \mathbf{Q}^{-1}(\theta_1)),$$

em que $\theta_1 = \{\tau_h, \phi\}$ são parâmetros por trás da volatilidade. O campo gaussiano n -dimensional latente determinado por $|\mathbf{x}|$ é parcialmente observado por meio do conjunto de dados condicionalmente independentes $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_{n_d}\}$, com verossimilhança

$$\pi(\mathbf{r}|\mathbf{x}, \theta_2) = \prod_{t=1}^{n_d} \pi(r_t|\mathbf{h}, \theta_2),$$

em que θ_2 são parâmetros do processo $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$. Considerando $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, vale então que modelos de volatilidade estocástica podem ser estimados calculando as distribuições marginais

$$\pi(\mathbf{x}, \theta|\mathbf{r}) \propto \pi(\theta)\pi(\mathbf{x}|\theta) \prod_{t=1}^n \pi(r_t|h_t, \theta).$$

No entanto, como comentado por [Martino et al. \(2011\)](#), essa equação para as distribuições marginais não possui forma fechada, tendo em vista que a verossimilhança não é gaussiana, o que prejudica qualquer inferência sobre $\pi(\mathbf{x}, \theta|\mathbf{r})$. A abordagem INLA pode então ser empregada no sentido de realizar inferência sobre marginais de $\pi(\mathbf{x}, \theta|\mathbf{r})$, permitindo aproximações acuradas para $\pi(h_t|\mathbf{r})$, $\pi(\mu|\mathbf{r})$ e $\pi(\theta_j|\mathbf{r})$.

Os autores colocam INLA como um método computacionalmente eficiente de computar-se tais distribuições marginais, em virtude de sua aproximação gaussiana para densidades dadas pela forma

$$\pi(\mathbf{x}|\mathbf{r}, \theta) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sum g_t(h_t)\right\},$$

em que $g_t(h_t) = \log \pi(r_t|h_t, \theta)$. No contexto de volatilidade estocástica e das formulações discutidas pelos autores, a matriz de precisão $\mathbf{Q}$ é tridiagonal, além de ter a última linha e a última coluna com valores não-nulos. Ainda assim, a grande maioria das entradas dessa matriz continua sendo constituída de zeros, de modo que $\mathbf{Q}$ é esparsa.

O algoritmo por trás do método envolve um arranjo em três etapas, conforme listado em [Martino et al. \(2011\)](#). No primeiro passo, é construída uma aproximação para $\pi(\theta|\mathbf{r})$, usando como ponto de partida a identidade:

$$\pi(\theta|\mathbf{r}) = \frac{\pi(\mathbf{x}, \theta|\mathbf{r})}{\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})} \propto \frac{\pi(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{r})}{\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})},$$

em que $\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})$ é aproximado usando a aproximação gaussiana para as densidades, tal qual exposta anteriormente. Assim, tem-se:

$$\tilde{\pi}(\theta|\mathbf{r}) = K_2 \left. \frac{\pi(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \theta)}{\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\theta)}$$

em que K_2 é a constante de normalização, $\tilde{\pi}_G$ é a aproximação gaussiana para $\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})$ e $\mathbf{x}^*(\theta)$ é a moda de $\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})$.

Em seguida, deve-se encontrar uma aproximação para $\pi(x_t|\theta, \mathbf{r})$, utilizando-se, para tanto, outra identidade:

$$\pi(x_t|\theta, \mathbf{r}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})}{\pi(\mathbf{x}_{-t}|x_t, \theta, \mathbf{r})} \propto \frac{\pi(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{r})}{\pi(\mathbf{x}_{-t}|x_t, \theta, \mathbf{r})},$$

sendo que $\mathbf{x}_{-t}$ significa que o elemento t do vetor é removido. A estratégia de aproximação usada no passo anterior aqui é computacionalmente ineficiente, de modo que [Rue, Martino e Chopin \(2009\)](#) sugerem o cômputo de uma versão simplificada ($\tilde{\pi}_S$) de $\tilde{\pi}(x_t|\theta, \mathbf{r})$, com base em uma expansão de seu logaritmo. Dessa forma, vale que:

$$\log \tilde{\pi}_S(x_t|\theta, \mathbf{r}) = c - \frac{1}{2}x_t^2 + \gamma_t^{(1)}(\theta)x_t + \frac{1}{6}x_t^3 + \gamma_t^{(3)}(\theta) + \dots,$$

em que $\gamma_t^{(1)}$ e $\gamma_t^{(3)}$ são termos em uma expansão de Taylor e c é uma constante. Os autores mencionam, contudo, que a equação não define uma densidade probabilística de fato. Em razão disso, ajusta-se o logaritmo de uma distribuição normal assimétrica (*skew-normal*) à expansão de Taylor.

Em uma última etapa, os autores mostram como calcular uma aproximação para $\pi(x_t|\mathbf{r})$, com base nos resultados encontrados nos passos anteriores. Integrando numericamente, tem-se que:

$$\tilde{\pi}(x_t|\mathbf{r}) = \sum_k \tilde{\pi}(x_t|\theta^k, \mathbf{r}) \tilde{\pi}(\theta^k|\mathbf{r}) \Delta_k,$$

em que θ^k denota um conjunto de valores selecionados de θ . Com isso, pode-se realizar inferência bayesiana aproximada de forma eficiente no contexto de modelos de volatilidade estocástica.

A modelagem pode ser estendida, ainda, para o caso multivariado, como levantado em [Martino \(2007\)](#) e [Martino et al. \(2011\)](#). Em oposição à formulação univariada, adotada na grande maioria dos trabalhos em que INLA é empregado, o modelo multivariado (incorpora mais de um ativo na análise) é capaz de capturar uma variedade maior de características dos dados, como, por exemplo, o efeito *spillover* da volatilidade, em que o conhecimento a respeito de um ativo poderia ajudar a fazer previsões sobre outro. Os autores demonstram apenas uma extensão bivariada, que pode ser escrita como

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{\Omega}_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon)$$

$$\mathbf{h}_t = \nu + \mathbf{\Phi}(\mathbf{h}_{t-1} - \nu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_\eta)$$

em que $\mathbf{r}_t = \{r_{t1}, r_{t2}\}$ são os log-retornos observados em t , $\varepsilon_t = \{\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}\}$ e $\eta_t = \{\eta_{t1}, \eta_{t2}\}$ são termos de ruído bivariados e $\mathbf{h}_t = \{h_{t1}, h_{t2}\}$ são as volatilidades latentes. Além disso, tem-se que

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Omega}_t = \begin{pmatrix} \exp\{h_{1t}/2\} & 0 \\ 0 & \exp\{h_{2t}/2\} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}_\eta = \begin{pmatrix} 1/\tau_{\eta_1} & \rho_\eta/\sqrt{\tau_{\eta_1}\tau_{\eta_2}} \\ \rho_\eta/\sqrt{\tau_{\eta_1}\tau_{\eta_2}} & 1/\tau_{\eta_2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Sigma}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \rho_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Uma generalização para ordens mais elevadas foi apresentada por [Shapovalova \(2021\)](#), que avalia que essa metodologia pode perder alguns de seus benefícios em termos de eficiência computacional, pois especificações multivariadas, nesse caso, não permitiriam que fossem exploradas matrizes esparsas.

Finalmente, a literatura registra algumas comparações entre INLA e outros métodos de estimação são realizadas para o caso univariado. Em linhas gerais, parece haver um consenso no que tange aos ganhos de velocidade, medida explicitamente em Chaim e Laurini (2019) e Rue, Martino e Chopin (2009). No primeiro trabalho, contando o tempo de compilação do código, INLA foi algo em torno de 8 vezes mais rápido em cada estimação realizada, quando comparado com MCMC. No segundo, é levado em consideração o tempo de cômputo para todas as aproximações de Laplace (e para cada experimento), que foi de 0.08s *versus* o tempo para se obter as amostras de MCMC, da ordem de 25s, constituindo, portanto, uma diferença considerável. Do ponto de vista da precisão das estimativas obtidas, Ehlers e Zevallos (2015) encontram ganhos atribuídos ao método INLA, que foi utilizado no cálculo de uma métrica de *Value at Risk* e comparado com um estimador de quasi-máxima verossimilhança. Na mesma linha, Chaim e Laurini (2019) investigam a acurácia do método para séries com memória longa, dessa vez em relação a técnicas tradicionais de MCMC, constatando um desempenho comparável entre ambos.

2 Dados e metodologia

Na presente seção, serão apresentadas as formas funcionais propostas e procedimentos de estimação a serem empregados, além da sequência de testes que deve nortear o trabalho. Primeiramente, todavia, discute-se o conjunto de dados adotado para avaliação dos modelos, dispondo de suas fontes, escolhas para a mensuração e construção das variáveis.

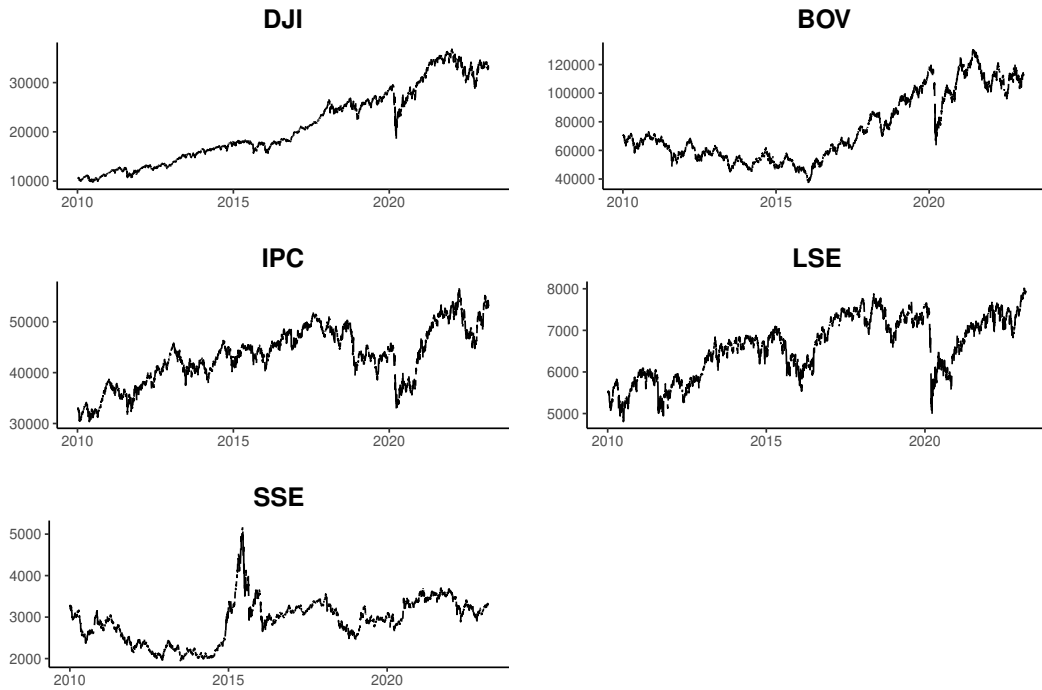
2.1 Variáveis e bases utilizadas

Para a parte empírica, foram utilizados dados diários para as cotações de índices de bolsas de valores², ao longo de um mesmo intervalo de tempo. Foram selecionadas como variáveis os log-retornos para índices representando mercados diversos e provenientes de porções do globo distintas, sendo eles: *Dow Jones Industrial* (DJI), dos Estados Unidos; Ibovespa (BOV), do Brasil; *Índice de Precios y Cotizaciones* (IPC) do México; FTSE 100 (LSE), da Inglaterra; e SSE Composite Index (SSE), da China.

O período de análise compreende os preços de fechamento diários de cada índice entre janeiro de 2010 a fevereiro de 2023, garantindo um volume de dados, entre número de séries analisadas e observações individuais, que permita a avaliação adequada do modelo proposto em matéria de eficiência computacional. A Figura 1 traz as movimentações para os valores dos índices entre as datas delimitadas.

² Todos os dados retirados de <<https://www.investing.com/indices>>.

Figura 1 – Evolução dos índices analisados



Os índices foram escolhidos por serem amplamente utilizados no mercado financeiro global e por representarem diferentes regiões do mundo, levando em conta também a possibilidade de interação entre os mesmos no sentido de contágio e efeitos do tipo *spillover* sobre a volatilidade de preços dos ativos negociados. Para índices como o Ibovespa e o *Dow Jones Industrial*, [Achcar, Cepeda-Cuervo e Barossi-Filho \(2012\)](#) reforçam a relevância da relação entre ambos do ponto de vista da constituição de uma referência para investidores no que diz respeito a alternativas de investimento nos mercados emergentes. Entre outros achados, os autores mensuram que um incremento de 100% na volatilidade do mercado de ações americano está associado a um aumento de 116.4% na volatilidade do mercado brasileiro, na média.

Na Tabela 1, por fim, podem ser consultados algumas das propriedades estatísticas associadas aos log-retornos dos índices escolhidos, incluindo média, mediana, desvio padrão, assimetria (*skewness*), curtose e número de observações. Além disso, um teste do tipo Jarque-Bera é computado, com os valores calculados constando também da tabela. Em todos os casos, a hipótese nula é rejeitada a um nível de significância de 1%.

Tabela 1 – Estatísticas Descritivas dos Índices de Mercado

	DJI	BOV	IPC	LSE	SSE
Média	20841.7	75018.0	43208.4	6608.8	2918.7
Mediana	18162.3	66341.0	43569.8	6715.4	2978.5
Desvio Padrão	7550.0	23798.0	5466.1	708.7	524.6
Assimetria	0.424	0.625	-0.229	-0.329	0.283
Curtose	2.000	2.028	2.397	2.025	3.669
Teste de Jarque-Bera	196.2**	285.9**	65.4**	157.8**	87.6**
Nº de Observações	3317	3240	3318	3329	3202

Nota: ** representa p-valor < 0.01.

2.2 Modelagem e estimação

Buscando atingir os objetivos determinados, de estabelecimento de um modo factível e eficiente de estimação para modelos multivariados de volatilidade estocástica, pretende-se realizar uma adaptação da metodologia baseada em aproximações de Laplace aninhadas integradas para o caso de formulações multifatoriais, ou seja, de modelos de fatores comuns. Em princípio, tais modelos podem ser construídos por meio de formulações próximas à do caso univariado, aumentando o número de equações de observação (estado) e incorporando estruturas de fatores latentes. A partir da estimação realizada sobre o conjunto de dados estabelecido, para tanto fazendo uso das capacidades do **R-INLA**³, pode-se avaliar a possibilidade de ganhos computacionais associados ao método, tendo como base de comparação métodos de MCMC, que constituem algumas das técnicas mais consagradas e amplamente difundidas na literatura.

O trabalho parte de especificação semelhante à apresentada por Hosszejni e Kastner (2021) e Kastner, Frühwirth-Schnatter e Lopes (2017), que serve como um *baseline* aqui. Os autores constroem um *framework* para estimação eficiente, via MCMC, de um modelo com m séries e r fatores, empregando um esquema de *Metropolis-Hastings* que é acelerado pelo uso de estratégias de entrelaçamento da família *ASIS*⁴, visando a mitigação de problemas relacionados a lentidão de convergência de cadeia. Sua implementação prática pode ser realizada, na linguagem *R*, com a utilização do pacote **factorstochvol**⁵, que permite fácil configuração para inicialização de hiperparâmetros, estrutura de identificação dos modelos e ajustes sobre o amostrador empregado, além de possibilitar previsões dentro e fora da amostra. O amostrador é escrito em *C++*, conferindo maior velocidade de execução para a etapa de sorteios (*draws*), altamente intensiva em tempo decorrido para execução.

No que se refere ao presente trabalho, todavia, opta-se por uma formulação em que as cargas fatoriais são estimadas diretamente nas equações de volatilidade latente. Em linhas gerais, o modelo proposto, com m séries e k fatores, é representado da seguinte maneira:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{\Omega}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_\varepsilon)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{h}_t + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_\eta),$$

em que $\boldsymbol{\sigma}_t = (\sigma_{1t}, \dots, \sigma_{mt})'$ é um vetor contendo as m volatilidades, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)'$ é um parâmetro de médias e $\boldsymbol{\gamma}$ é uma matriz $m \times k$ de cargas fatoriais. São admitidas matrizes de covariância Σ_ε e Σ_η diagonais, indicando processos SV independentes. Quanto das volatilidades fatoriais, denotadas por $\mathbf{h}_t = (h_{1t}, \dots, h_{kt})'$, tem-se que:

$$\mathbf{h}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{h}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\xi}_t, \quad \boldsymbol{\xi}_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_h),$$

sendo $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$ o vetor de médias para $\mathbf{h}_t$ e $\boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_k)$ um parâmetro de persistência, configurando uma estrutura autorregressiva de primeira ordem. A relação entre as equações de retorno implicadas pelo vetor $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, \dots, r_{mt})'$ e as volatilidades para cada ativo são expressas pela matriz $m \times m$ dada por $\mathbf{\Omega}_t$, de forma que:

³ Ver <<https://www.r-inla.org/>>.

⁴ A abordagem, denominada de *Ancillarity-Sufficiency Interweaving Strategy*, é explorada em maiores detalhes por Kastner e Frühwirth-Schnatter (2014).

⁵ Ver trabalho de Hosszejni e Kastner (2021).

$$\mathbf{\Omega}_t = \begin{pmatrix} \exp\{\sigma_{1t}/2\} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp\{\sigma_{2t}/2\} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \exp\{\sigma_{mt}/2\} \end{pmatrix}.$$

As opções pelas formas funcionais apresentadas passam por questões de preservação das propriedades desejáveis da abordagem de modelagem via INLA. Como argumentado em [Martino \(2007\)](#), há possibilidade de perda da vantagem computacional associada ao método em sua concepção original, produto do que é conhecido em estatística como a "maldição da dimensionalidade". Dessa forma, modelos mais parcimoniosos podem atenuar ineficiências impostas pelo aumento de dimensão, com possibilidade de benefícios advindos do ganho de informações no comparativo com a modelagem univariada. Em adição, os modelos propostos podem ser implementados com o auxílio do pacote **R-INLA** e suas funcionalidades já existentes.

Para a estimação, parte-se de duas restrições fundamentais para a identificação do problema, sob as quais o número de fatores deve ser menor ou igual ao número de séries de retornos ($k \leq m$) e, para uma dessas séries, os parâmetros de carga (γ_{ij}) serão dados, isto é, arbitrariamente fixos. Seguindo o procedimento de implementação da metodologia INLA, o modelo aventado é reinterpretado como um modelo de campo aleatório de Markov gaussiano em três etapas, conforme adotado por [Martino \(2007\)](#). Em um primeiro estágio, é colocado um modelo de verossimilhança referente ao conjunto de variáveis que são observadas, de modo que:

$$\pi(\mathbf{r}|\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \theta_1) = \prod \pi(\mathbf{r}_t|\boldsymbol{\sigma}_t, \mathbf{h}_t, \theta_1),$$

em que θ_1 é um vetor de hiperparâmetros relacionados à volatilidade.

Na sequência, são modelados os campos latentes referentes a $\boldsymbol{\sigma}_t$ e $\mathbf{h}_t$, com médias não conhecidas. Tem-se, então:

$$\boldsymbol{\sigma}_t|\mathbf{h}_t, \boldsymbol{\alpha}, \theta_2 \sim N(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{h}_t, \Sigma_\eta)$$

$$\mathbf{h}_t|\mathbf{h}_{t-1}, \boldsymbol{\mu}, \theta_3 \sim N(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}[\mathbf{h}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}], \Sigma_h),$$

sendo θ_2 e θ_3 vetores de hiperparâmetros associados às suas respectivas matrizes de covariância (Σ_η e Σ_h). No tocante aos parâmetros de média, $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\mu}$, são estipuladas distribuições *a priori* gaussianas, centradas em zero. Assim, segundo demonstra [Martino \(2007\)](#), a média para a volatilidade pode ser inserida no campo latente por meio do cálculo da seguinte densidade:

$$\pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}|\theta_1) = \pi(\boldsymbol{\alpha}) \prod_{t=1}^T \pi(\boldsymbol{\sigma}_t|\mathbf{h}_t, \theta_1) \propto |\mathbf{Q}|^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\alpha}')\mathbf{Q}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\alpha}')' \right],$$

com $\mathbf{Q}$ representando a matriz de precisão e $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\alpha}')$ denotando o campo latente para a volatilidade. A esparsidade de $\mathbf{Q}$, que pode ser fatorada em formas também esparsas, confere às operações realizadas uma grande eficiência do ponto de vista computacional, sendo explorada em maiores detalhes por [Rue, Martino e Chopin \(2009\)](#).

Em um último estágio, enfim, é definida uma *priori* $\pi(\boldsymbol{\theta})$ para os vetores de hiperparâmetros discutidos, considerando $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Nesse sentido, o trabalho adota distribuições de acordo com as propostas por Martino (2007), onde aplicável, e Kastner, Frühwirth-Schnatter e Lopes (2017), particularmente no âmbito dos parâmetros ligados à estrutura de fatores. Por questões de compatibilização com o *framework*, entretanto, lida-se com o parâmetro de precisão em termos de seu logaritmo natural. A partir daí, tomando o campo latente $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\alpha}')$, a estimação via INLA passa pela construção de uma aproximação para $\pi(x_t|\mathbf{r})$ a partir de $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r})$ e de $\pi(x_t|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$.

Para obter-se a distribuição *a posteriori* conjunta em relação aos hiperparâmetros, parte-se da seguinte aproximação gaussiana para a densidade condicional completa de $\mathbf{x}$:

$$\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}|\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) = \bar{K} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu})'[\mathbf{Q} + \text{diag}(\mathbf{C})](\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu}) \right\},$$

em que $\bar{K}$ trata-se de uma constante de normalização, $\boldsymbol{\nu}$ corresponde à moda de $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$ e $\text{diag}(\mathbf{C})$ é uma matriz banda com largura igual ao número de séries m , podendo ser escrita como:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{C}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

onde $\mathbf{C}_t$ contém os termos de 2ª ordem para a expansão de Taylor de $\sum \log \pi(\mathbf{r}_t|x_t, \theta_1)$ ao redor de $\boldsymbol{\nu}$, em formato de um Hessiano. Deste modo, a *posteriori* conjunta para $\boldsymbol{\theta}$ pode ser aproximada por meio da seguinte relação:

$$\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r}) \propto \frac{\pi(\mathbf{r}|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})\pi(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta})}.$$

A aproximação para $\pi(x_t|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$, por outro lado, segue uma estratégia gaussiana, mas podendo-se aproveitar de resultados obtidos na etapa do cômputo de $\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r})$. Em particular, toma-se $\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$ como parâmetro de médias para a distribuição, cabendo apenas encontrar os valores para as variâncias marginais, representadas por σ_G^2 . O cálculo é realizado de acordo com métodos recursivos propostos por Rue e Martino (2007), permitindo que a aproximação seja dada por:

$$\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}) = N(x_t; \boldsymbol{\nu}[\boldsymbol{\theta}], \sigma_G^2[\boldsymbol{\theta}]).$$

É válido apontar, contudo, que, de acordo com os autores, esta aproximação não se faz acurada sob algumas situações, principalmente quando da presença de valores extremos para $\boldsymbol{\theta}$. Seu mérito reside em constituir uma alternativa mais rápida que outras formas mais precisas de realizar-se o cômputo, o que é especialmente interessante no contexto de modelos em que a dimensionalidade é uma questão relevante.

Finalmente, tem-se que $\pi(x_t|\mathbf{r})$ pode ser aproximado, uma vez computados $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r})$ e $\pi(x_t|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$, por meio de uma integração numérica do tipo:

$$\tilde{\pi}(x_t|\mathbf{r}) = \sum_n \tilde{\pi}(x_t|\boldsymbol{\theta}_n, \mathbf{r})\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_n|\mathbf{r})\Delta_n, \quad n \in \{1, \dots, N\},$$

a ser realizada sobre um conjunto de pontos (*grid*) para $\boldsymbol{\theta}$. No entanto, com o intuito de tornar mais célere o processo de aproximação, adota-se no trabalho uma abordagem baseada no procedimento de Bayes empírico, no qual emprega-se apenas um ponto de integração equivalente à moda *a posteriori* dos hiperparâmetros. Em linhas gerais, substitui-se o termo $\tilde{\pi}(x_t|\boldsymbol{\theta}_n, \mathbf{r})$ por $\tilde{\pi}(x_t|\boldsymbol{\theta}_*, \mathbf{r})$, sendo $\boldsymbol{\theta}_*$ a moda de $\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r})$. Segundo Martino (2007), a abordagem é altamente precisa quando a distribuição do vetor de hiperparâmetros condicional aos log-retornos é regular.

Do ponto de vista prático, a estimação do modelo se dá por intermédio de uma estrutura de múltiplas verossimilhanças, com uma mesma configuração para os vetores e índices, independente do número de fatores levado em consideração na análise. Assumindo um caso geral envolvendo m séries, k fatores e n observações para cada série de retorno, tem-se, como ponto de partida, a criação de uma matriz de retornos de dimensões $(m+1)n \times m$, organizada da seguinte maneira:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} NA & NA & \dots & NA \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ NA & NA & \dots & NA \\ r_{1,1} & NA & \dots & NA \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n,1} & NA & \dots & NA \\ NA & r_{1,2} & \dots & NA \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ NA & r_{n,2} & \dots & NA \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ NA & NA & \dots & r_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ NA & NA & \dots & r_{n,m} \end{pmatrix},$$

em que $\mathbf{r}_{t,i}$ diz respeito ao log-retorno do ativo i , para o período t , e são denotadas por *NA*'s as entradas nulas na matriz. Deve-se salientar também que as primeiras n linhas de $\mathbf{R}$ correspondem a valores nulos, de tal sorte que a primeira entrada referente a um retorno, $\mathbf{r}_{1,1}$, consta da linha $n+1$ da matriz.

Outros três grupos de índices são construídos, paralelamente, com a finalidade de estimar os efeitos fixos e aleatórios do modelo dinâmico linear colocado. No tocante aos efeitos fixos, tem-se os m vetores a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-1)n})' \\ \mathbf{a}_2 &= (\underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-2)n})' \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_m &= (\underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-1)n}, \underbrace{1, \dots, 1}_n)' \end{aligned}$$

em que os primeiros n elementos são deixados como valores nulos e, para cada vetor $\mathbf{a}_i$ ($i = \{1, \dots, m\}$), introduz-se uma sequência de 1's com dimensão n e início a partir do elemento de número $ni + 1$. Além disso, outros k índices idênticos, associados à evolução dos fatores, são adicionados, sendo inicializados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (1, \dots, n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{m \cdot n})' \\ &\vdots \\ \mathbf{f}_k &= (1, \dots, n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{m \cdot n})', \end{aligned}$$

sendo os n primeiros elementos a sequência de 1 até n , em uma estrutura que se repete para todo $\mathbf{f}_j$, com $j = \{1, \dots, k\}$. Por fim, os efeitos aleatórios com respeito às volatilidades são captados por um conjunto de mk vetores, construídos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{cf}_{1,j} &= (\underbrace{NA, \dots, NA}_n, 1, \dots, n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-1)n})' \\ \mathbf{cf}_{2,j} &= (\underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_n, 1, \dots, n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-2)n})' \\ &\vdots \\ \mathbf{cf}_{m,k} &= (\underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-1)n}, 1, \dots, n)', \end{aligned}$$

devendo valer que, para um mesmo índice i de ativos, $\mathbf{cf}_{i,j} = \mathbf{cf}_{i,s}$, $\forall j, s \in \{1, \dots, k\}$. É possível utilizar uma mesma definição de índices para qualquer número $k \leq m$ de fatores, desde que esta última estrutura de vetores seja criada de acordo com o caso em que há tantos fatores quanto séries na análise ($m = k$), levando o número de vetores para m^2 . Seria necessário um ajuste, todavia, no sentido de assumir, manualmente, que os fatores desconsiderados na estimação são fixados em zero, isto é, que possuem uma log-precisão fixada em um valor alto e seu parâmetro de persistência fixo e igual a zero.

Na formulação adotada, os modelos por trás dos índices de cada vetor de log-volatilidades são construídos como “cópias” da estrutura estabelecida para um vetor de índices associado aos fatores, por intermédio do atributo “*copy*”, que permite a inclusão de uma tendência compartilhada entre mais de um preditor linear no contexto do pacote **R-INLA**. Ademais, deve valer que os modelos para os vetores do grupo $\mathbf{cf}_{i,j}$ terão, para cada fator j , um de seus termos apresentando hiperparâmetros fixados, respeitando restrição imposta sobre as cargas fatoriais. Já para o grupo de $\mathbf{f}_j$, faz-se necessária a definição do argumento “*model = "ar1"*”, que determina uma estrutura autorregressiva de primeira ordem para as volatilidades fatoriais.

Após a realização de todos os procedimentos para estimação, os modelos discutidos são então apreciados no que concerne a seus desempenhos em matéria de acurácia e eficiência computacional. Nesse sentido, os dados empíricos de retornos de índices de bolsa de valores são incorporados na análise, com a finalidade de aferir medidas de qualidade de ajuste e eficiência para as estimações. É realizada uma comparação gráfica entre os resultados obtidos pelas formas multivariadas discutidas na seção, além da análise de

métricas de erro médio (ME), erro absoluto médio (MAE) e raiz do erro quadrático médio (RMSE), sob o pretexto de observar a acurácia dos modelos. Por fim, é levado em conta uma medida simples de tempo total decorrido para a estimação via INLA, a ser contrastado com o tempo de execução para a estimação via MCMC em modelos multivariados de fatores, fazendo uso do pacote *factorstochvol*⁶.

3 Resultados

A quarta seção se dedica a apresentar e discutir os resultados encontrados para as estimações e testes propostos. A princípio, são expostos os parâmetros estimados pelos modelos de volatilidade estocástica e, ilustrativamente, as volatilidades ajustadas. Também são realizadas a análise de métricas de acurácia em relação aos retornos observados e uma comparação entre os tempos de execução.

Constam, na Tabela 2, os parâmetros estimados para as distribuições *a posteriori* das séries e das volatilidades fatoriais (h_1 e h_2 , na tabela), incluindo algumas estatísticas descritivas.

Tabela 2 – Parâmetros estimados das distribuições *a posteriori*

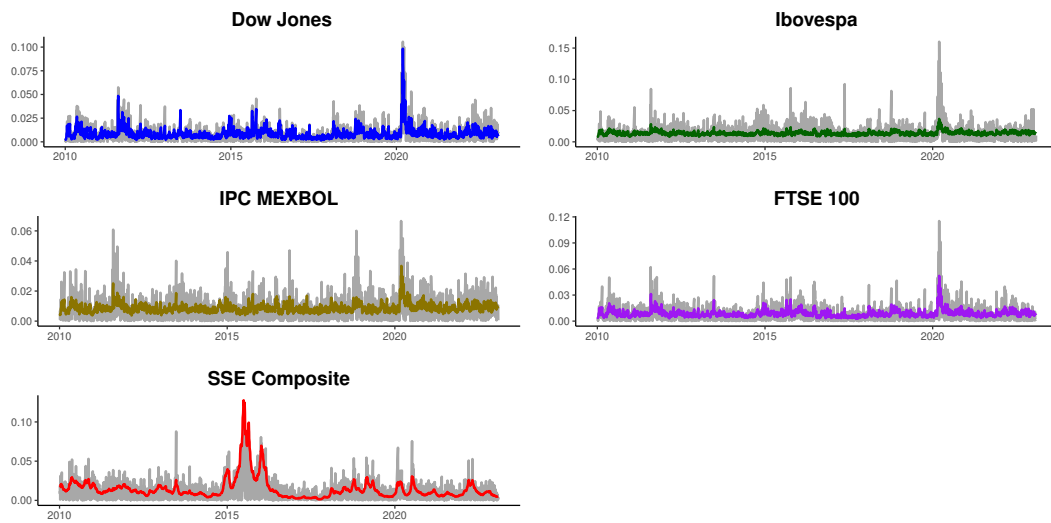
		média	dp	0.025q	0.5q	0.975q
h₁	τ_1	6.132	1.047	4.478	5.991	8.568
	ϕ_1	0.982	0.003	0.975	0.982	0.987
h₂	τ_2	0.793	0.053	0.690	0.792	0.900
	ϕ_2	0.665	0.023	0.618	0.666	0.707
DJI	α_1	-5.172	0.098	-5.365	-5.172	-4.980
	$\gamma_{1,1}$	1.000				
	$\gamma_{1,2}$	1.000				
BOV	α_2	-3.980	0.054	-4.085	-3.980	-3.874
	$\gamma_{2,1}$	0.418	0.083	0.252	0.418	0.580
	$\gamma_{2,2}$	0.630	0.031	0.569	0.630	0.693
IPC	α_3	-4.946	0.053	-5.050	-4.946	-4.842
	$\gamma_{3,1}$	0.299	0.083	0.133	0.300	0.459
	$\gamma_{3,2}$	0.775	0.038	0.700	0.775	0.848
LSE	α_4	-5.010	0.087	-5.181	-5.010	-4.839
	$\gamma_{4,1}$	0.893	0.086	0.725	0.892	1.065
	$\gamma_{4,2}$	0.847	0.039	0.771	0.847	0.924
SSE	α_5	-4.340	0.155	-4.643	-4.340	-4.037
	$\gamma_{5,1}$	1.952	0.158	1.679	1.938	2.294
	$\gamma_{5,2}$	0.221	0.049	0.128	0.219	0.321

A especificação adotada toma $k = 2$ fatores, respeitando a restrição sob a qual k não pode ser maior que o número de séries modeladas. Em adição, é válido ressaltar que os parâmetros $\gamma_{1,1}$ e $\gamma_{1,2}$ referentes à série de retornos do índice *Dow Jones* (DJI) são fixados

⁶ Foi implementado um modelo com especificações análogas, 40000 sorteios (*draws*) e *burnin* igual a 3500. Mais detalhes no *paper* dos autores, [Hosszejni e Kastner \(2021\)](#).

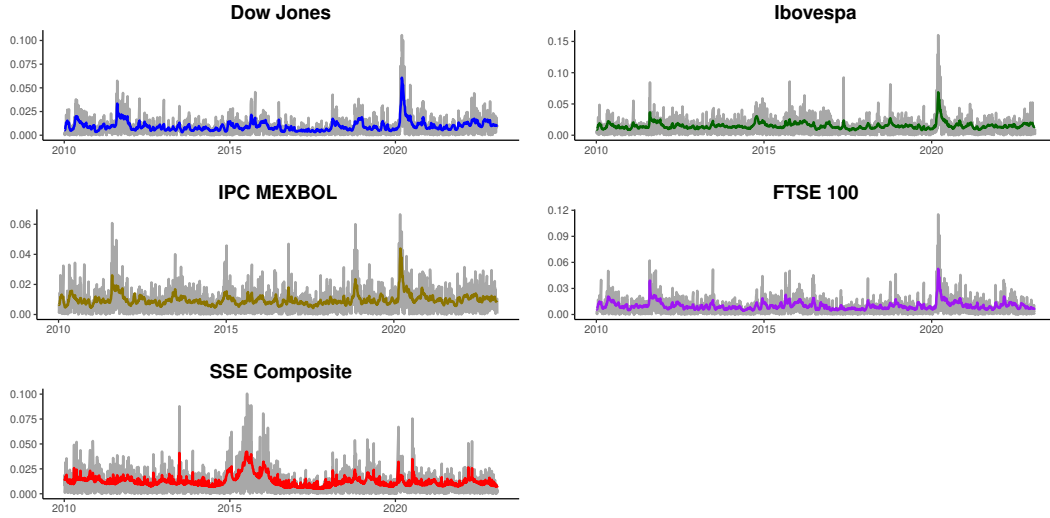
arbitrariamente ao valor de 1, também em consonância com as restrições de identificação discutidas previamente, sob as quais os parâmetros de carga devem ser fixados para uma das séries. Nota-se, da tabela, que as volatilidades ajustadas para as séries do Ibovespa e do *Índice de Precios y Cotizaciones* parecem responder mais à volatilidade fatorial h_2 , associada, respectivamente, aos parâmetros $\gamma_{2,2}$ e $\gamma_{3,2}$, ao contrário das demais. Esta volatilidade fatorial apresenta uma persistência (representada por ϕ_2) consideravelmente menor que h_1 , bem como precisão (denotada como τ_2) também mais baixa no comparativo. Graficamente, essa distinção parece impactar na percepção de qualidade de ajuste, como pode-se observar na Figura 2.

Figura 2 – Volatilidades estimadas via INLA vs. retornos absolutos



Os gráficos, nos quais a volatilidade estimada (em cores) é representada juntamente ao valor absoluto dos log-retornos (em cinza), expõem um aparente bom ajuste do modelo rodado, sobretudo no caso dos índices *Dow Jones*, *FTSE 100* e *SSE Composite*. Com respeito ao Ibovespa e IPC, todavia, observa-se um ajuste pior em comparação, especialmente nos picos por volta do ano de 2020, que corresponde à crise deflagrada pela pandemia do novo coronavírus. No tocante aos resultados obtidos pela estimação via MCMC, mostrados na Figura 3, essa diferença não ocorre.

Figura 3 – Volatilidades estimadas via MCMC vs. retornos absolutos



Como constatado pelos gráficos, o ajuste provido pelo modelo estimado por meio do pacote **factorstochvol** parece ser mais adequado no caso de Ibovespa e IPC, embora a percepção seja contrária para os índices *Dow Jones* e *SSE Composite*, cujo pico de volatilidade após 2015 aparenta ser melhor modelado pela formulação introduzida no artigo. Essas percepções advindas da visualização dos dados são corroboradas parcialmente pela análise das métricas de acurácia calculadas a partir dos valores ajustados para a volatilidade latente, mais uma vez tomando como alvo o valor absoluto dos retornos. A Tabela 3 traz as medidas de erro médio (ME), erro absoluto médio (MAE) e raiz do erro quadrático médio (RMSE).

Tabela 3 – Métricas de acurácia para o modelo estimado via INLA vs. MCMC

		DJI	BOV	IPC	LSE	SSE
INLA	ME	0.006	0.017	0.009	0.008	0.052
	MAE	0.038	0.075	0.044	0.044	0.089
	RMSE	0.052	0.103	0.058	0.061	0.144
MCMC	ME	0.019	0.030	0.020	0.022	0.027
	MAE	0.049	0.078	0.050	0.052	0.063
	RMSE	0.065	0.101	0.063	0.069	0.083

No geral, as métricas obtidas com a volatilidade estimada via INLA são melhores, em todos os casos, para quase todas as séries. As exceções, de forma não exatamente surpreendente, incluem a série de retornos para o Ibovespa, em que a raiz do erro quadrático médio é menor no contexto do modelo estimado por MCMC, e a série de retornos para o *SSE Composite*, em que todas as métricas são piores para o modelo proposto. Ainda assim, tratam-se de discrepâncias de relativa baixa magnitude e que não se demonstram consistentes em todas as séries, reforçando uma tese de qualidade de ajuste comparável entre as duas metodologias empregadas.

Pelo lado do desempenho computacional, entretanto, as diferenças são menos sutis.

Para o *hardware* específico em que se deram as estimações⁷, o tempo total decorrido para execução dos comandos foi de 19.1s no caso do modelo estimado via INLA, em contraste com os 529s (08m49s) referentes à estimação do modelo baseado em MCMC. Nesse cenário, o modelo proposto no trabalho é cerca de 27 vezes mais rápido que a alternativa, revelando um expressivo ganho de velocidade na estimação, sem qualquer perda relevante em termos de qualidade do ajuste, como já abordado.

Considerações finais

Em síntese, o presente trabalho buscou introduzir uma extensão multivariada e multifatorial para a classe de modelos de volatilidade estocástica (SV) estimados via INLA, investigando a dinâmica da volatilidade de cotações para índices selecionados. A formulação proposta foi empregada, na seção empírica do *paper*, na estimação das volatilidades para os log-retornos dos índices *Dow Jones Industrial*, Ibovespa, *Índice de Precios y Cotizaciones*, FTSE 100 e SSE Composite Index, verificando-se, posteriormente, o desempenho medido em termos de acurácia e eficiência computacional. Na comparação com uma alternativa próxima fazendo uso de métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), os resultados apontam para a maior viabilidade de estimação de modelos SV multivariados por meio da metodologia baseada em INLA, com pouco ou nenhum custo em termos de qualidade de ajuste e ganhos importantes do ponto de vista do tempo necessário para se estimar os parâmetros de interesse.

Do ponto de vista da acurácia dos modelos testados, a formulação proposta se saiu melhor ou muito próxima da sua contraparte baseada em métodos de simulações para quase todos os ativos analisados e em quase todas as métricas colocadas. Em linhas gerais, os números não apresentam diferença muito relevante e é possível dizer que, ao menos para o índice bolsa chinesa de Xangai (SSE), o modelo estimado via MCMC foi consistentemente mais acurado. Por outro lado, a estimação via INLA teve um tempo total decorrido para execução até 27 vezes menor que a alternativa, provando-se mais eficiente no sentido computacional.

Por fim, generalizações ao modelo proposto no trabalho poderiam auxiliar na melhor compreensão dos padrões de volatilidade para uma diversidade maior de séries de ativos financeiros, contribuindo para o avanço das formulações multivariadas no contexto de INLA. Entre algumas possibilidades, cita-se a elaboração de uma análise de *value at risk* (VaR), incorporação de previsões fora da amostra (“*out of sample*”) e a introdução de outras especificações que permitam melhor modelagem de características frequentemente atribuídas a séries financeiras, como, por exemplo, a presença de efeito alavanca (“*leverage effect*”) e caracterização como processos de memória longa. No último caso, um caminho particularmente atrativo é o da análise a partir de dados intradiários, uma vez que o grande volume de observações implicado deve favorecer consideravelmente o emprego de metodologias como INLA em oposição às tradicionais técnicas baseadas em MCMC.

⁷ Ambos os modelos foram rodados em uma máquina com *Windows 11*, tendo como principais especificações um processador Intel i7-11800H 2.30Ghz e memória RAM 3200MHz 16GB.

Referências

- ACHCAR, J. A.; CEPEDA-CUERVO, E.; BAROSSÍ-FILHO, M. Multivariate volatility models: an application to Ibovespa and Dow Jones Industrial. *Cuadernos de Economía*, Cuadernos de Economía, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional, v. 31, n. 56, p. 301–320, 2012. Citado na página 8.
- ANDERSEN, T.; SORENSEN, B. GMM estimation of a stochastic volatility model: a Monte Carlo study. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 14, n. 3, p. 328–352, 1996. Citado na página 2.
- CHAIM, P.; LAURINI, M. P. *Ensaio em econometria financeira*. 131 p. Tese (Doutorado em Economia Aplicada) — Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Ribeirão Preto, 2019. Citado na página 7.
- EHLERS, R.; ZEVALLOS, M. Bayesian estimation and prediction of stochastic volatility models via INLA. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Taylor & Francis, v. 44, n. 3, p. 683–693, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 7.
- HARVEY, A. *Forecasting, Structural Time Series and the Kalman Filter*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. Citado na página 3.
- HARVEY, A.; RUIZ, E.; SHEPHARD, N. Multivariate stochastic variance models. *The Review of Economic Studies*, Oxford University Press, v. 61, n. 2, p. 247–264, 1994. Citado na página 2.
- HOSSZEJNI, D.; KASTNER, G. Modeling Univariate and Multivariate Stochastic Volatility in R with stochvol and factorstochvol. *Journal of Statistical Software*, v. 100, p. 1–34, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 14.
- KASTNER, G.; FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S. Ancillarity-sufficiency interweaving strategy (ASIS) for boosting MCMC estimation of stochastic volatility models. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 76, n. 1, p. 408–423, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 9.
- KASTNER, G.; FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S.; LOPES, H. Efficient bayesian inference for multivariate factor stochastic volatility models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Taylor & Francis, v. 26, n. 4, p. 905–917, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 11.
- KIM, S.; SHEPHARD, N. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models. *The Review of Economic Studies*, Oxford University Press, v. 65, n. 3, p. 361–393, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 4.
- MARTINO, S. *Approximate bayesian inference for multivariate stochastic volatility models*. Trondheim, Norway, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 6, 10, 11 e 12.
- MARTINO, S. et al. Estimating stochastic volatility models using integrated nested laplace approximations. *European Journal of Finance*, Taylor & Francis, v. 17, n. 7, p. 487–503, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 2, 3, 4, 5 e 6.

NELSON, D. *The time series behavior of stock market volatility and returns*. 174 p. Tese (Doutorado em Economia) — Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1988. Citado na página [2](#).

POLSON, N.; ROSSI, P.; JACQUIER, E. Bayesian analysis of stochastic volatility models. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 20, n. 1, p. 69–87, 1994. Citado na página [4](#).

RAJARATNAM, B.; SPARKS, D. MCMC-based inference in the era of big data: A fundamental analysis of the convergence complexity of high-dimensional chains. *arXiv e-prints*, p. arXiv–1508, 2015. Citado na página [2](#).

RUE, H.; MARTINO, S. Approximate Bayesian inference for hierarchical Gaussian Markov random field models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Elsevier, v. 137, n. 10, p. 3177–3192, 2007. Citado na página [11](#).

RUE, H.; MARTINO, S.; CHOPIN, N. Approximate bayesian inference for latent gaussian models by using integrated nested laplace approximations. *Journal of the Royal Statistical Society*, Blackwell, v. 71, n. 2, p. 319–392, 2009. Citado 5 vezes nas páginas [3](#), [4](#), [6](#), [7](#) e [10](#).

SHAPOVALOVA, Y. “Exact” and approximate methods for bayesian inference: Stochastic volatility case study. *Entropy*, MDPI, v. 23, n. 4, p. 466, 2021. Citado na página [6](#).

TAYLOR, S. *Modelling Financial Time Series*. Hoboken: John Wiley & Sons, 1986. Citado 2 vezes nas páginas [2](#) e [3](#).