



## VARIANTES E ALTERNATIVAS AO AXIOMA DA ESCOLHA

SANTOS, Eriangra Oliveira<sup>1</sup>; LOBO, Matheus Pereira<sup>2</sup>

### RESUMO

O relatório “Variantes e Alternativas ao Axioma da Escolha” apresenta os resultados da pesquisa desenvolvida no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal do Norte do Tocantins (PIBIC/UFNT), tendo como foco o estudo teórico do Axioma da Escolha (AC) e suas formulações equivalentes. A investigação teve como objetivo compreender a estrutura lógica, as implicações e as possíveis variantes do axioma, analisando em que contextos essas versões alternativas são suficientes para garantir resultados matemáticos relevantes. O Axioma da Escolha estabelece que, dada uma família de conjuntos não vazios, é possível escolher um elemento de cada conjunto, mesmo sem uma regra explícita de seleção. Apesar de seu papel essencial em diversos teoremas da análise, álgebra e topologia, o axioma gerou controvérsias históricas por conduzir a conclusões contraintuitivas, como o paradoxo de Banach-Tars. A metodologia adotada baseou-se em uma revisão bibliográfica detalhada, tendo como principal referência a obra *Axiom of Choice*, de Horst Herrlich, complementada por encontros semanais com o orientador para discussão dos avanços e análise das demonstrações. Foram estudadas equivalências clássicas ao Axioma da Escolha, como o Lema de Zorn, a Condição da Cadeia Máxima de Hausdorff, o Lema de Teichmüller–Tukey e a existência de anticadeias máximas. As demonstrações seguiram uma estrutura encadeada, mostrando que cada formulação implica a seguinte até retornar ao enunciado original, o que evidenciou a coerência e a interdependência entre os princípios. Essa abordagem permitiu compreender que o Axioma da Escolha não é uma proposição isolada, mas parte de um sistema lógico consistente e abrangente, fundamental para a construção da matemática moderna. O estudo proporcionou um aprofundamento teórico significativo e contribuiu para o desenvolvimento da capacidade analítica e argumentativa da pesquisadora, reforçando a importância dos fundamentos lógicos na formação matemática. De modo geral, a pesquisa destacou o valor da articulação entre teoria, prática investigativa e orientação acadêmica, demonstrando que o estudo crítico de axiomas fundamentais promove não apenas o entendimento técnico, mas também uma reflexão sobre a natureza e os limites do conhecimento matemático.

**Palavras-chave:** Axioma da Escolha. Equivalências. Lógica. Matemática. Teoria dos Conjuntos.

---

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica (PIBIC/PIBITI). Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. eriangra.santos@ufnt.edu.br

2 Professor Doutor do Curso de Licenciatura em Física, Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), orientador do projeto de Iniciação Científica. matheus.lobo@ufnt.edu.br

## I. INTRODUÇÃO

Este relatório apresenta o desenvolvimento da pesquisa intitulada Variantes e Alternativas ao Axioma da Escolha, conduzida no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal do Norte do Tocantins (PIBIC/UFNT). O estudo se insere no campo da teoria dos conjuntos e busca explorar as diferentes formulações, implicações e limitações do Axioma da Escolha (AC), um dos princípios fundamentais da matemática.

O Axioma da Escolha estabelece que, dado qualquer conjunto de conjuntos não vazios, é possível escolher um elemento de cada um deles, mesmo sem uma regra explícita de seleção. Esse princípio tem amplas implicações na matemática, sendo essencial na demonstração de diversos teoremas da análise, álgebra e topologia. Entretanto, sua aceitação nem sempre foi consensual, pois ele leva a resultados que desafiam a intuição matemática, como a construção do conjunto de Vitali e o paradoxo de BanachTars.

Essas controvérsias motivaram a busca por variantes mais fracas ou alternativas ao AC, permitindo a obtenção de resultados equivalentes sem a necessidade de sua formulação completa. Ao longo da história, matemáticos desenvolveram diversas proposições equivalentes ao Axioma da Escolha, como o Teorema de Zorn e o Lema de Zermelo, que são frequentemente utilizados em demonstrações matemáticas. Além disso, investigações sobre o impacto da aceitação ou rejeição do AC resultaram no desenvolvimento de diferentes sistemas axiomáticos, como a Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Frankelsem.

A distinção entre essas abordagens tem implicações profundas para áreas como a teoria dos números, a lógica matemática e a topologia. Diante desse contexto, este projeto tem como objetivo explorar as diversas formulações do Axioma da Escolha e suas variantes, analisando seu impacto sobre resultados clássicos da matemática. Para isso, será realizada uma revisão bibliográfica detalhada, seguida de um estudo sobre situações específicas em que o AC pode ser substituído ou dispensado. Pretende-se investigar, por exemplo, a relação entre o AC e o Teorema de Zorn, bem como avaliar teoremas em que sua aplicação é considerada essencial.

Além do aprofundamento teórico, esta pesquisa busca contribuir para a disseminação do conhecimento sobre os fundamentos da matemática pura, promovendo reflexões sobre a importância dos axiomas e sua influência no

desenvolvimento matemático. Ao longo do estudo, serão analisadas diferentes abordagens matemáticas, considerando as implicações lógicas e estruturais do uso do Axioma da Escolha, permitindo uma visão mais ampla sobre suas consequências na teoria dos conjuntos e na matemática em geral.

## II. BASE TEÓRICA

A base teórica da pesquisa fundamenta-se na teoria dos conjuntos e na lógica matemática, áreas que sustentam o estudo dos princípios axiomáticos que estruturam a matemática moderna. O ponto central é o Axioma da Escolha (AC), introduzido por Ernst Zermelo em 1904, que afirma a possibilidade de selecionar um elemento de cada conjunto em uma família de conjuntos não vazios, mesmo na ausência de uma regra explícita de escolha. Esse axioma é essencial para muitas construções e demonstrações matemáticas, mas também é fonte de controvérsias filosóficas devido a implicações não construtivas, como o paradoxo de Banach–Tarski.

Entre as principais referências teóricas utilizadas está a obra “Axiom of Choice”, de Horst Herrlich (2006), que apresenta uma sistematização detalhada das variantes e equivalências do axioma, como o Teorema de Zorn, a Condição da Cadeia Máxima de Hausdorff, o Lema de Teichmüller–Tukey e a existência de anticadeias máximas. A partir dessa base, a pesquisa explora o encadeamento lógico entre essas formulações, demonstrando que todas são equivalentes ao Axioma da Escolha dentro do sistema de Zermelo–Fraenkel (ZF).

Outras referências relevantes incluem Daniel J. Velleman (2019), com *How to Prove It: A Structured Approach*, que fornece fundamentos sobre técnicas de demonstração e raciocínio lógico; John Stillwell (2010), em *Roads to Infinity*, que discute o papel dos axiomas na construção da matemática infinita; e Damir D. Dzhafarov e Carl Mummert (2022), em *Reverse Mathematics*, que analisa o poder lógico de axiomas em diferentes sistemas formais.

Essa base teórica permitiu compreender como o Axioma da Escolha e suas variantes operam como pilares estruturantes da matemática, garantindo a existência de objetos e resultados que não podem ser obtidos apenas por métodos construtivos. Assim, o estudo articula aspectos históricos, formais e lógicos, promovendo uma visão abrangente sobre o papel dos axiomas e sua influência na coerência e completude da teoria matemática contemporânea.

### III. OBJETIVOS

#### 1. Objetivos Gerais:

O objetivo geral deste plano de trabalho consiste em explorar variantes mais fracas do Axioma da Escolha e discutir em que contextos essas variantes são suficientes ou necessárias.

#### 2. Objetivos Específicos:

- ganhar familiaridade com a aplicação do Axioma da Escolha;
- definir matematicamente os pré-requisitos subjacentes às aplicações do Axioma da Escolha;
- provar um teorema em que o axioma da escolha foi utilizado implicitamente;
- provar um teorema cuja utilização do axioma da escolha é desnecessária;
- estudar outras variantes do axioma da escolha;
- escrever pelo menos um white paper (artigo científico resumido) contendo os resultados da pesquisa.

### IV. METODOLOGIA

A metodologia consistiu em uma revisão bibliográfica aprofundada sobre o Axioma da Escolha e suas equivalências, tendo como principal referência a obra *Axiom of Choice*, de Horst Herrlich (2006). Foram selecionadas as principais formulações relacionadas ao axioma — como o Lema de Zorn, a Condição da Cadeia Máxima de Hausdorff, o Lema de Teichmüller–Tukey e a existência de anticadeias máximas — e desenvolvidas suas demonstrações de forma encadeada, evidenciando as implicações entre elas. O trabalho foi acompanhado por orientações semanais, nas quais foram discutidos os avanços, analisadas as demonstrações e feitos ajustes teóricos e lógicos, garantindo rigor, coerência e clareza ao desenvolvimento da pesquisa.

### V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### Equivalências do Axioma da Escolha

1 → 2: O AC implica na condição de Cadeia Máxima

1. Seja  $(P, \leq)$  um POSET. Consideremos o conjunto das cadeias de  $P$ , ordenado por inclusão.

2. Aplicando o AC, podemos selecionar sucessivamente cadeias maiores até que não seja possível ampliar
3. Assim, obtemos uma cadeia maximal em  $P$ , i.e. uma anticadeia que não pode ser estritamente contida em nenhuma outra.

2 → 3: Condição de Cadeia Máxima (MCC) implica no Lema de Zorn

1. Seja  $(P, \leq)$  um POSET em que toda cadeia possui uma cota superior
  2. Pela MCC, existe uma cadeia maximal  $C$  em  $P$ .
  3. Seja  $m$  uma cota superior em  $C$ .
  4. Suponha, por absurdo que  $m$  não seja um elemento maximal. Existe um elemento  $x \in P \mid m < x$ .
  5. Então, podemos adicionar  $x$  à cadeia  $C$ , obtendo  $C \cup \{x\}$ , que é uma cadeia maior, contradizendo a maximalidade de  $C$ .
- ∴  $m$  é um elemento maximal em  $P$ ; provando o Lema de Zorn.

3 → 4: Lema de Zorn implica no teorema Teicmüller-Tukey

1. Seja  $F$  uma família de subconjuntos de um conjunto  $X$ ,  $PO$  pela inclusão, onde toda cadeia tem uma cota superior.
  2. Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal em  $F$ , i.e., um subconjunto  $M \in F \mid \nexists N \in F \text{ com } M \subset N$ .
- ∴ provamos o Lema de TT, que garante a existência de elementos maximais em famílias parcialmente ordenadas pela inclusão.

4 → 5: Do Lema de TT para a existência de uma anticadeia

1. Seja  $(P, \leq)$  um par ordenado. Definimos o conjunto de todas as anticadeias de  $P$  ordenadas por inclusão.
2. A união de uma cadeia de anticadeias é novamente uma anticadeia, pois a propriedade de que nenhum par de elementos é comparável entre é preservada.
3. Aplicando o Lema de TT, existe uma anticadeia maximal em  $P$ , i.e., uma anticadeia não pode ser estritamente ampliada mantendo a propriedade de ser anticadeia.

5 → 1: Anticadeia maximal implica no AC

1. Dada uma família  $\{X\}_{i \in I}$  de conjuntos não vazios, definimos o conjunto das funções de escolhas parciais, ou seja, funções  $f$  cujo domínio é um subconjunto de  $I$  |  $(f)i \in X_i$  para cada  $i$  no domínio de  $f$ .
2. Ordenamos essas funções pela relação de extensão, i.e.,  $f \leq g$  se  $f$  é subconjunto é subconjunto de  $g$  ( $g$  estende  $f$ ).
3. As funções cuja imagem em dois domínios diferentes seriam contraditórias pois são incomparáveis, formando uma antichain maximal se essa função para todo  $i \in I$ , então poderíamos adicionar um novo par  $(i, x)$  (onde  $x \in X_i$ ) sem quebrar a propriedade, contradizendo a maximalidade.  
 $\therefore$  a função precisa estar definida em todo  $I$ , o que é exatamente uma função escolha total.

## VI. CONCLUSÃO

A pesquisa realizada em torno do Axioma da Escolha permitiu compreender de maneira mais aprofundada a relevância desse princípio lógico dentro da matemática e suas diversas formulações equivalentes. O estudo mostrou que, embora o axioma em si seja frequentemente visto como um postulado abstrato, suas consequências permeiam diferentes áreas, garantindo a possibilidade de demonstrar resultados que seriam inatingíveis sem sua aceitação.

O desenvolvimento das demonstrações em cadeia, estabelecendo que cada formulação implica a seguinte até retornar à proposição inicial, evidenciou a consistência e a interdependência entre os enunciados, consolidando a ideia de que o Axioma da Escolha não é uma afirmação isolada, mas parte de um sistema robusto de equivalências matemáticas. Outro aspecto de destaque foi o processo metodológico adotado, que combinou estudo individual, leitura crítica da obra de Herrlich (2006) e reuniões semanais com a orientadora. Esses encontros não apenas orientaram a construção lógica das demonstrações, como também possibilitaram um espaço de diálogo e reflexão, no qual dúvidas foram esclarecidas e diferentes perspectivas puderam ser discutidas.

Esse movimento colaborativo enriqueceu a pesquisa e contribuiu para o amadurecimento acadêmico da pesquisadora. De modo geral, os resultados alcançados reforçam a importância de estudar o Axioma da Escolha não apenas como uma ferramenta técnica, mas também como um elemento que promove reflexões mais

amplas sobre os fundamentos da matemática. A experiência adquirida durante a pesquisa demonstra que a articulação entre teoria, orientação e prática investigativa é essencial para a formação crítica e rigorosa no campo da matemática, apontando caminhos para futuras investigações em lógica e teoria dos conjuntos.

## **VII. REFERÊNCIAS**

- [1] Warner, Steve. Pure Mathematics for Beginners. GET 800, 2018.
- [2] Velleman, Daniel J. How to prove it: A structured approach. Cambridge University Press, 2019.
- [3] Stillwell, John. "Roads to infinity." AK Peters (2010).
- [4] Herrlich, Horst. Axiom of choice. Vol. 1876. Berlin: Springer, 2006.
- [5] Dzhafarov, Damir D., and Carl Mummert. Reverse mathematics: problems, reductions, and proofs. Springer Nature, 2022.

## **VIII. AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT) pelo incentivo e pelo apoio concedido por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), que possibilitou o desenvolvimento deste projeto.