



ANÁLISE E MODELAGEM DE CURVAS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZANDO O BEMCRACKER2D

Analysis and modeling of crack propagation curves using the Boundary Element Method using BEMCRACKER2D

Danilo Carvalho de Moura (1); Gilberto Gomes (2)

(1) Engenheiro Civil, Universidade de Brasília, Brasília – DF, Brasil.

(2) Dr. Prof. Gilberto Gomes, Universidade de Brasília, Brasília – DF, Brasil.

Email para Correspondência: danilo.cmoura@hotmail.com; (1) Autor principal; (1) Apresentador.

Resumo: A Mecânica da Fratura (MF), em sua essência, estuda materiais e estruturas que contém falhas na forma de trincas visíveis ou detectáveis. Durante os últimos 50 anos a MF tem evoluído para uma ferramenta prática da engenharia com a aplicação da teoria da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) em praticamente todos os materiais de alta resistência usados, por exemplo, na indústria naval e aeronáutica. Contudo, devido à grande complexidade dos problemas, a utilização de métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem sido cada vez mais crescente e possibilitado, principalmente, a análise numérica da propagação de trincas com base nos conceitos da MFLE. Neste aspecto, este trabalho propõe comparar curvas numérico-experimentais de modelos existentes na literatura com curvas geradas a partir da implementação dos critérios de predição do caminho de propagação de trinca (Máxima Tensão Circunferencial, Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial e Mínima Densidade de Energia de Deformação) utilizando o MEC. Para tanto, serão utilizados os softwares BEMLAB2D e BEMCRACKER2D, para modelagem e análise via MEC, respectivamente. Os resultados obtidos foram curvas numéricas que muito se assemelham às experimentais e, portanto, conclui-se que os métodos numéricos têm uma convergência excelente, sendo que o que mais se aproxima é o método da Máxima Tensão Circunferencial.

Palavras chaves: Mecânica da Fratura; Propagação de Trinca; Método dos Elementos de Contorno; BEMCRACKER2D.

Abstract: Fracture Mechanics, essentially, studies materials and structures which contain flaws in the form of detectable or visible cracks. During the past 50 years, the FM has evolved into a practical engineering tool with the application of the Linear Elastic Fracture Mechanics theory (LEFM) for practically all the high strength materials used, for example, in the naval and aeronautical industry. However, due to the great complexity of the problems, the use of the numerical methods as Finite Element Method (FEM) and Boundary Element Methods (BEM) have been steadily increasing and made possible, mainly, the numerical analysis of



crack growth based on LFM concepts. Therefore, this work compares numerical-experimental curves of existing models in the literature with curves generated from the implementation of the prediction criteria of the crack propagation path (Maximum Principal Stress, Maximum Energy Release Rate and Minimum Strain Energy Density) using the BEM. Moreover, it will be used the software BEMLAB2D and BEMCRACKER2D, for modeling and analysis via BEM, respectively. The obtained results were numerical curves that resemble the experimental ones and, therefore, it is concluded that the numerical methods have a good convergence, highlighting to the Maximum Principal Stress Criterion.

Keywords: *Fracture Mechanics; Crack Growth; Boundary Element Method; BEMCRACKER2D.*

1 INTRODUÇÃO

A mecânica da fratura é uma ciência relativamente nova – menos de 40 anos – e seu foco está em prevenir fratura frágil. Contudo, mesmo sendo uma disciplina recente, essa preocupação de prevenir este tipo de ruptura não é nova e como exemplo tem-se as pontes em arco dos Romanos (SANFORD, 2002).

Esse ramo cresceu quando a teoria da resistência dos materiais sofreu uma grande mudança no século XIX: começou-se a se utilizar aço maleável ao invés de madeira, tijolos e argamassa, principalmente na indústria de ferrovias, pontes, navios, aeronaves e etc. Essa mudança de ênfase se deu por conta de que, com o uso de um novo material, apareceu um novo problema: faturamento dos elementos por conta de carregamentos cíclicos que transformam as características de fibra do aço em estruturas de forma cristalina – fadiga (SANFORD, 2002).

Com esse cenário e com o avanço da ciência da Mecânica da Fratura houve um aumento considerável de estudos com relação às tensões e às propagações de trincas, bem como a direção em que elas ocorrem já que muitos acidentes estavam acontecendo com aeronaves e navios, por exemplo.

Contudo, uma das dificuldades encontradas no estudo da Mecânica da Fratura, é a complexidade que se tem para resolver problemas de engenharia, por isso, um pequeno número de soluções eram disponíveis. Porém, esse problema vem sendo driblado com o aumento constante do poder de processamento dos computadores junto com os métodos numéricos de aproximação de funções, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (GOMES, 2016).

Dos dois métodos citados acima, o MEC foi utilizado nesse artigo e um dos motivos é que o MEF exige um remalhamento a cada vez que a trinca se estende, enquanto o MEC não. Assim, aliando a importância crescente do ramo da Mecânica da Fratura na indústria naval, ferroviária e aérea com o avanço dos métodos numéricos, o trabalho servirá de contribuição para programas que fazem essas análises utilizando MEC, já que são tão escassos, se comparados com os que fazem o processamento com MEF.

Em especial, usa-se a formulação de Método dos Elementos de Contorno Dual – MECDD – com o intuito de fazer análises de problemas com trinca, já que o MEC gera singularidade ao calcular elemento descontínuo. Então será possível calcular o ângulo de

propagação de fissuras por meio de três métodos distintos e fazer comparações entre os valores calculados, usando como referência dados experimentais encontrados na literatura.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Essa disciplina tem a finalidade de estudar como as tensões se comportam e se distribuem, bem como a sua grandeza, em regiões próximas de uma trinca. Essas tensões e sua magnitude, podem ser descritas pelo Fator de Intensidade de Tensão (FIT), K . Desta forma, tendo parâmetros do material e o K é possível fazer previsões de propagações e de falhas de uma trinca quando submetida à certos carregamentos.

2.2 FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO

O Fator de Intensidade de Tensão, K , é um parâmetro que quantifica o campo de tensões próximos de uma trinca. Esse fator está associado ao modo de abertura da trinca e existem três modos: modo I, modo II e modo III, de acordo com a Figura 1.

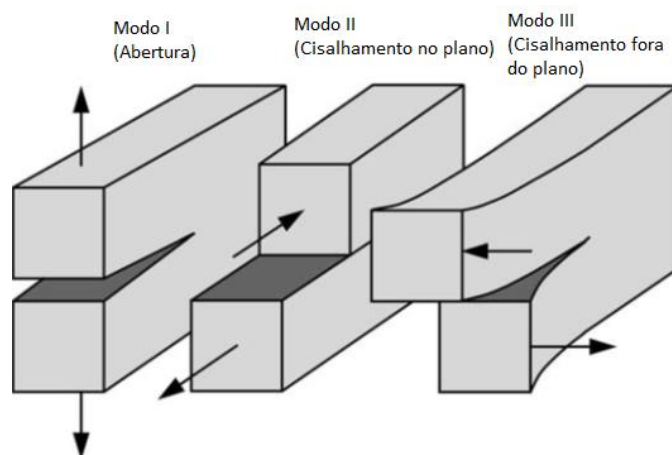


Figura 1. Os três tipos de carregamento e os respectivos modo de fratura (ANDERSON, 2005).

Com o valor da carga aplicada, σ , e o tamanho da trinca, a , pode-se diretamente relacionar com o Fator de Intensidade de Tensão. A forma geral para o K é dada por:

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} * Y\left(\frac{a}{W}\right) \quad (1)$$

Onde Y é uma função adimensional que depende da geometria da peça (SANFORD, 2002).

2.3 INTEGRAL J

A Integral J, desenvolvida por Rice (1968), consiste em uma integral de linha em torno da ponta da fratura que não depende de qual caminho percorre, desde que comece em uma face da trinca e termine na outra face. Outra particularidade desse método é que para qualquer contorno fechado, o valor de J é igual a zero, isto é, $J = 0$. A integral J é dada por:

$$J = \int_{\Gamma} \left(w d_y - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} d_s \right) \quad (2)$$

Onde w é a energia de deformação por unidade de volume; T_i é as componentes do vetor tração; u_i é as componentes do vector de deslocamento; d_s é o incremento de comprimento ao longo do contorno Γ (ANDERSON, 2005).

A energia de deformação por unidade de volume é dada por:

Com o resultado do J pode-se achar o K, por meio de:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad (3)$$

2.4 DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA

Três métodos serão utilizados. Estes são: Critério da Máxima Tensão Circunferencial; Critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial; e Critério da Mínima Densidade da Energia de Deformação.

2.4.1 CRITÉRIO DA MÁXIMA TENSÃO CIRCUNFERENCIAL (MTC)

De acordo com Barsom e Rolfe, 1987, o critério da máxima tensão circunferencial, a trinca irá se propagar normal ao plano em que a tensão circunferencial for máxima, $\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0$ e $\frac{\partial^2 \sigma_{\theta}}{\partial \theta^2} < 0$, ou seja, onde a tensão de cisalhamento for nula, $\tau_{r\theta} = 0$. Contudo, a trinca somente se propaga se a tensão circunferencial for maior que a tensão correspondente para o K_{IC} (sem influência da fadiga).

O ângulo de propagação é então dado por:

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (4)$$

2.4.2 CRITÉRIO DA MÁXIMA TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA POTENCIAL (MTLEP)

Hussain, 1974, propôs esse critério que tem como bases os métodos de energia de Griffith da taxa de liberação de energia, G e consiste em medir a energia potencial que é liberada durante o faturamento. Quando se estuda fraturas em regime elástico linear e que não mudam de direção, o G é facilmente relacionado com o K , onde a energia potencial total para faturamento é equivalente à soma das energias potenciais de cada modo – G_I e G_{II} . a fissuração irá ocorrer na direção θ em que houver maior liberação de energia e quando essa taxa de energia máxima liberada for maior que a taxa de energia crítica necessária para fissuração, G_C . A equação utilizada é:

$$G(\theta) = \frac{4}{E} \left(\frac{1}{3 + \cos^2 \theta} \right)^2 \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/\pi} [(1 + 3 \cos^2 \theta)K_I^2 + 8 \sin \theta \cos \theta K_I K_{II} + (9 - 5 \cos^2 \theta)K_{II}^2] \quad (5)$$

2.4.3 CRITÉRIO DA MÍNIMA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO (MDED)

Esse critério, proposto por Sih (1974), tem por base a magnitude da densidade de energia de deformação, S , como parâmetro para avaliar a direção da propagação de trincas. Haverá propagação da fissura caso o valor de $S(\theta)$ for maior que um fator de densidade de energia de deformação crítico, S_{cr} e ocorrer na direção de mínima densidade de energia de deformação (SIH *et al*, 1974). A formulação é:

$$S(\theta) = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \quad (6)$$

$$a_{11} = \frac{1}{16\mu} [(1 + \cos \theta)(k - \cos \theta)] \quad (7)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\mu} \sin \theta [2 \cos \theta - (k - 1)] \quad (8)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\mu} [(k + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] \quad (9)$$

2.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

No MEC a discretização do problema é feita em elementos somente no contorno – Figura 2.9 – que servem para integrar as equações para cada ponto, tornando-se uma ótima ferramenta para resolução de equações integrais de contorno. As variáveis que são consideradas são: deslocamentos e trações de superfícies. Isso gera a vantagem de diminuir a dimensionalidade dos problemas trabalhando com um menor volume de dados (GOMES, 2006).

2.6 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL (MECD)

Quando se tem problemas em que há presença de trincas, o MEC não funciona por causa de que a coincidência das superfícies das trincas gera uma singularidade no sistema de equações. Isso ocorre por causa que as equações para um ponto localizado em uma face da trinca são idênticas às equações para outro ponto, de mesmas coordenadas, só que na outra face da fissura. Essa coincidência gera a singularidade (PORTELA, 1992).

Para contornar isso, usa-se o MECD, que consiste em aplicar equações integrais de contorno de deslocamento em uma face da trinca, e na outra face, aplicar equações integrais de contorno de tração. Mesmo os pontos de um lado da fissura sendo os mesmos do outro lado, as equações de contorno não são mais as mesmas, fugindo assim, da singularidade (PORTELA, 1992).

As equações integrais de contorno dual em que o MECD é baseado são as de deslocamento e de tração. Na ausência de forças de corpo, a representação da equação integral de contorno dos deslocamentos u_i para um ponto no contorno é dado por:

$$c_{ij}(x')u_j(x') + CPV \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x)d\Gamma(x) \quad (10)$$

Onde i e j representado componentes cartesianas; T_{ij} e U_{ij} são as soluções fundamentais de Kelvin para tração e deslocamento, respectivamente; $CPV \int$ representa integral de valor principal de Cauchy; c_{ij} é um coeficiente dado por $\delta_{ij}/2$ para um ponto x' no contorno, sendo δ_{ij} o delta de Kronecker (PORTELA, 1992).

A representação da equação integral de contorno para tração t_j , na ausência de forças de corpo, para um contorno é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t_j(x') + n_i(x')HPV \int_{\Gamma} S_{ijk}(x', x)u_k(x)d\Gamma(x) \\ = n_i(x') \int_{\Gamma} D_{ijk}(x', x)t_k(x)d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (11)$$

Onde n_j representa o i -ésimo componente do vetor unitário normal ao contorno, no ponto x' ; S_{ijk} e D_{ijk} são combinações lineares de derivadas de T_{ij} e U_{ij} , respectivamente; $HPV \int$ representa a integral de valor principal de Hadamard (PORTELA, 1992).

2.7 BEMCRACKER2D

O BEMCRACKER2D (GOMES et al, 2016) é um software escrito em linguagem de programação C++ utilizando conceitos de Programação Orientada a Objetos (POO) com a finalidade de analisar problemas elastostáticos bidimensionais, usando como base o método dos elementos de contorno (GOMES et al, 2016).

O programa possui 3 módulos de cálculo:



MEC padrão (módulo I) – para análise de elementos sem descontinuidade, ou seja, sem fissura;

MECD Sem Propagação (módulo II) – para análise de elementos com descontinuidade (trincas), porém, sem propagação;

MECD Com Propagação (módulo III) – para análise de elementos com descontinuidade quando há propagação.

2.8 BEMLAB2D

O programa BEMLAB2D (DELGADO NETO, 2016) é uma interface gráfica escrita em MATLAB com o objetivo de fazer pré e pós-processamento. A interface é do tipo GUI – Interface Gráfica do Utilizador – e tem como finalidade gerar malhas para problemas bidimensionais e possibilitar sua visualização, assim como fazer a análise elastostáticas em conjunto com o programa BEMCRACKER2D (GOMES et al, 2016).

3 MODELAGEM NUMÉRICA

A modelagem é feita utilizando tanto o BEMLAB2D quanto o BEMCRACKER2D. O primeiro permite desenhar a geometria do problema, criar a malha de elementos de contorno e inserir parâmetros do material – como módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson. O segundo programa faz o processamento propriamente dito, lê os dados do pré-processamento e utiliza os métodos programados para calcular FITs (pela Integral J), direção de propagação de trinca (pela Máxima Tensão Circunferencial) e outros. Por fim, volta-se ao BEMLAB2D para fazer o pós-processamento, que consiste em gerar gráficos de deformações, propagação de trinca e outros com base nos dados exportados do BEMCRACKER2D.

O exemplo (SPDL) utilizado foi tirado de um estudo de Ayatollahi e Aliha (2009) que consiste em uma placa quadrada com uma trinca central como mostra a Figura 2.

Os valores propostos de w , a , P e α foram, respectivamente, de: 75mm, 22.5mm, 0.7941 kN e 45°. Os furos têm raio r de 4mm e o centro de ambos se distanciam 25mm da quina mais próxima.

Após a geometria, foram criadas 4 zonas. A primeira zona criada foi a mestre, que são as arestas externas, constituindo a placa em si. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson usados foram 2940 MPa e 0.38, respectivamente. As demais zonas são os dois furos e a trinca central.

O passo seguinte foi gerar as malhas de elementos de contorno. As arestas externas e dos arcos tiveram 10 elementos quadráticos contínuos cada, e a trinca 14 elementos quadráticos descontínuos, sendo 7 elementos por face.

A análise feita foi “Com Crescimento De Trinca”. Nessa etapa definiu-se o número de incrementos para a trinca igual a 30, com avanço de 2.25 mm a cada incremento.

A Figura 3 mostra como ficou a geometria após todo o lançamento.

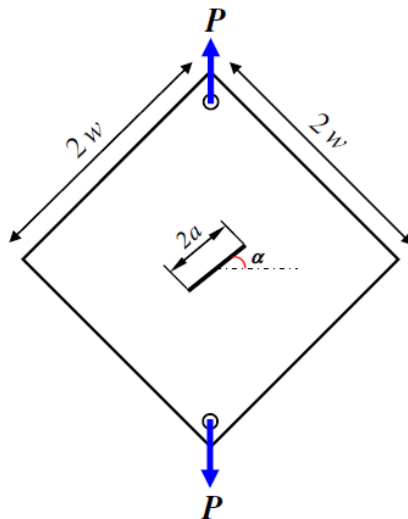


Figura 2. Placa quadrada carregada diagonalmente (AYATOLLAHI et al, 2009).

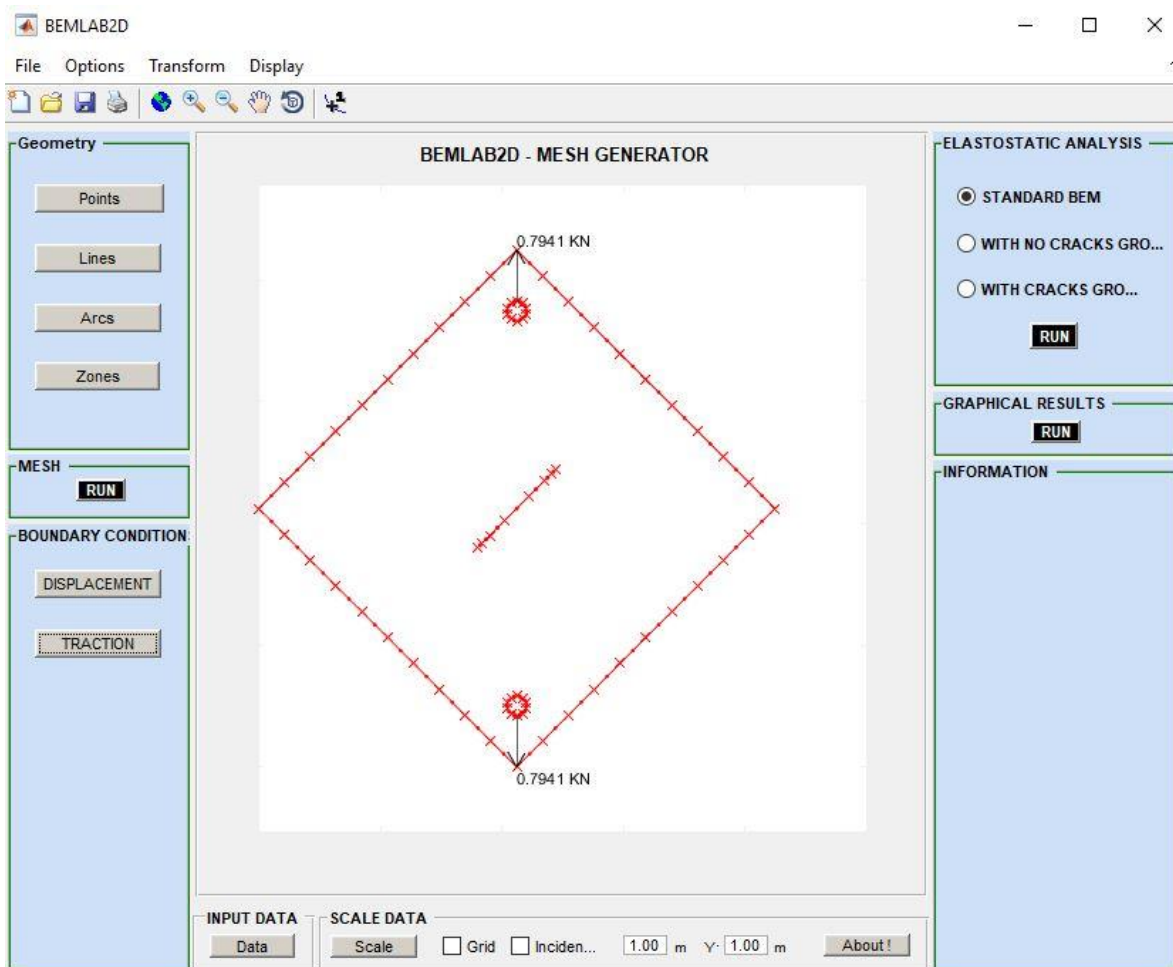


Figura 3. Geometria com condições de contorno e malha lançadas.

4 RESULTADOS

A Figura 4 mostra as direções de propagação da trinca de centro no corpo de prova SPDL (Square Plate Diagonally Loaded) calculadas por meio do programa BEMCRACKER2D, e pelos critérios MTLEP e MDED. Já na Figura 5, tem-se essas propagações ampliadas na ponta da trinca. Em todos os critérios, nota-se o início da fissuração em modo misto, mas logo em seguida a influência do K_{II} diminui e a propagação se mantém em modo I de abertura.

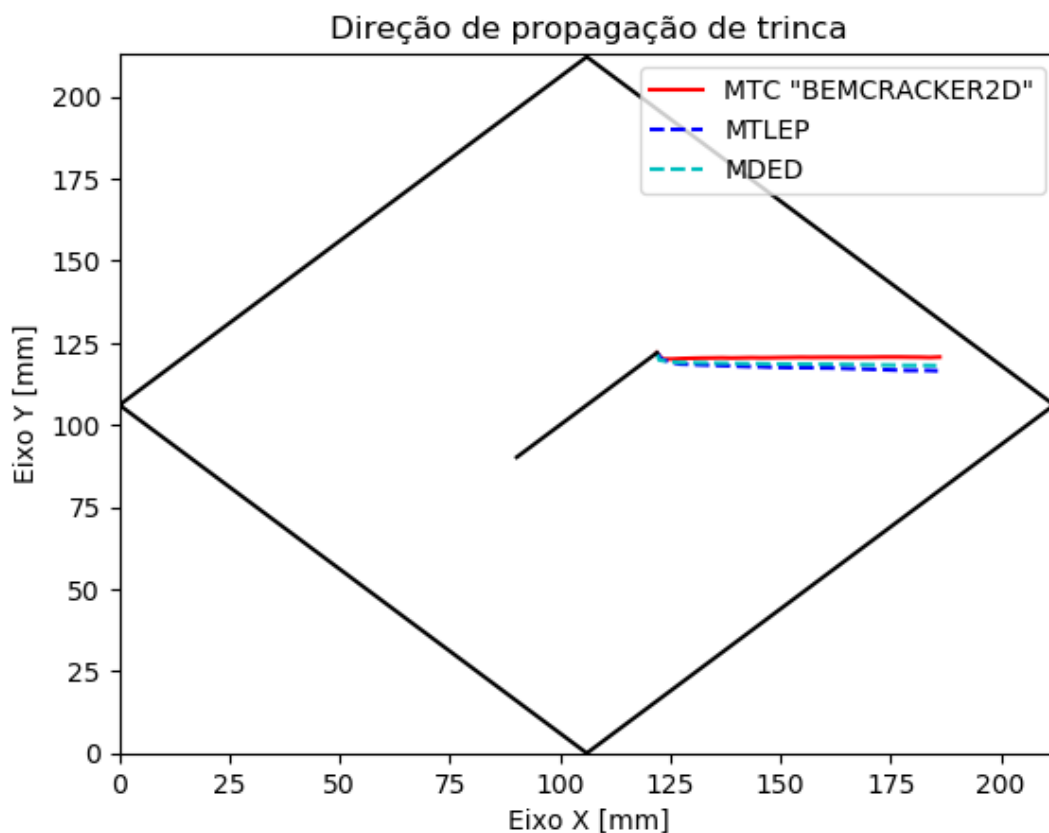


Figura 4. Direção de propagação de fissura no corpo de prova SPDL.

A Figura 6 mostra o comportamento do K_I e K_{II} ao longo do crescimento da trinca. Nota-se que o K_I tende a aumentar seu valor a medida que o número de incrementos aumenta enquanto que o K_{II} tende a diminuir. Isso explica o fato de a propagação ser em modo misto inicialmente e, após o decréscimo do K_{II} , ser basicamente em modo I de abertura.

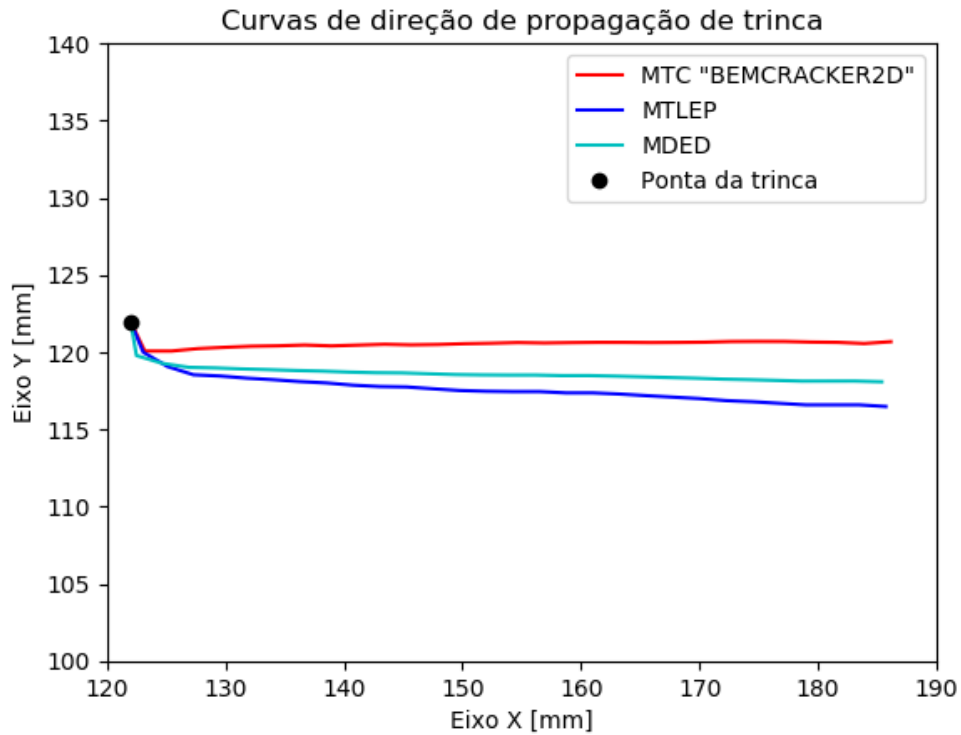


Figura 5. Curvas das direções de propagação de trinca.

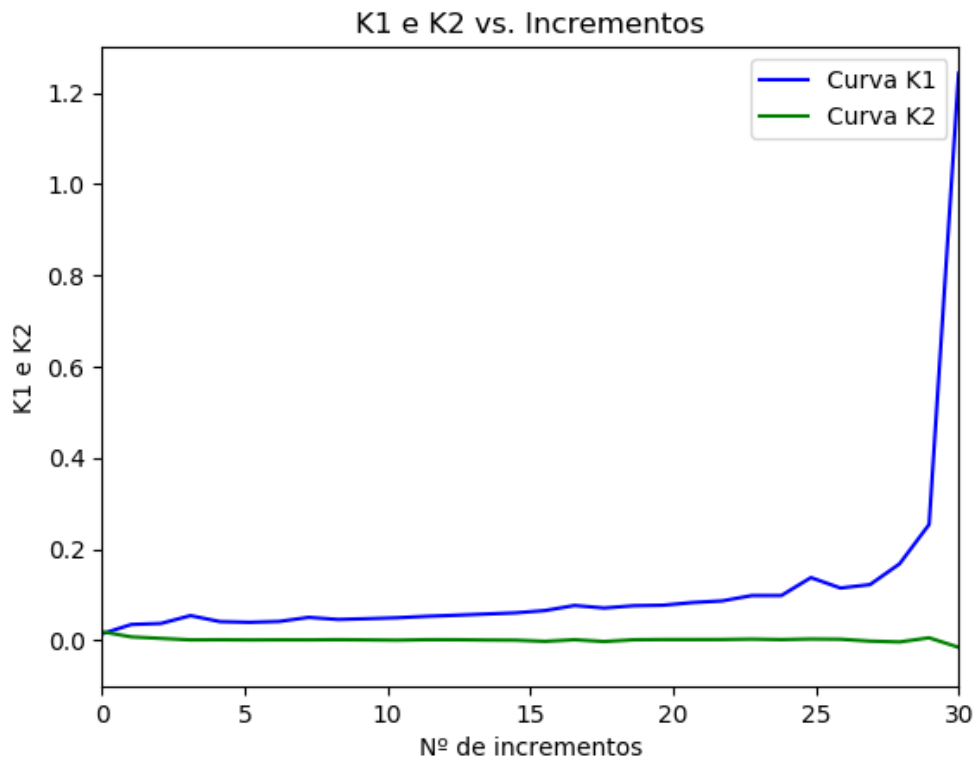


Figura 6. K1 e K2 vs. número de incrementos de propagação de trinca.

A Figura 7 apresenta uma comparação entre o resultado experimental obtido no estudo do Ayatollahi (2009) e o resultado numérico obtido pelo pelos programas BEMCRACKER2D e BEMLAB2D calculados com MEF e MTC. Nota-se que há coerência entre os resultados experimentais e numéricos.

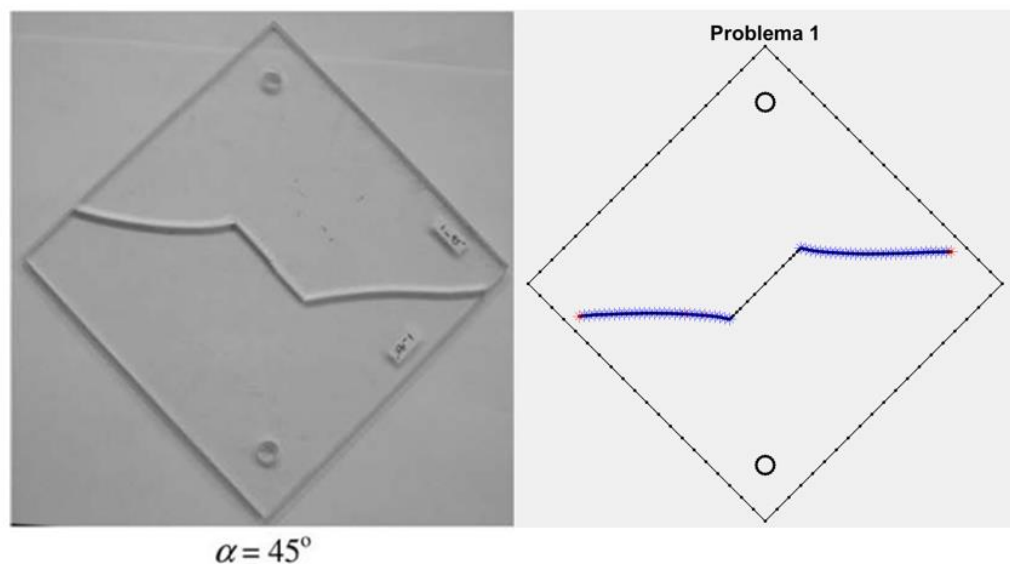


Figura 7. Padrão de fissura para $\alpha=45^\circ$ de corpo de prova à esquerda (AYATOLLAHI et al, 2009). Resultado numérico para $\alpha=45^\circ$ à direita.

Tabela 1. Valores dos ângulos para os três critérios e o erro absoluto com o valor do MTC calculado pelo BEMCRACKER2D.

MTC "BEMCRACKER 2D"	θ°			
	MTLEP	Erro Absoluto	MDED	Erro Absoluto
-57.7965°	-61.6503°	3.8538°	-77.2114°	19.4149°
0.0036°	-24.2934°	24.2898°	-13.0974°	13.0938°
4.0113°	-13.7510°	9.7397°	-6.5657°	2.5544°
2.1003°	-2.0627°	0.0377°	-0.9507°	1.1496°
1.8175°	-3.5523°	1.7348°	-1.6382°	0.1793°
0.6761°	-2.5210°	1.8449°	-1.1799°	0.5038°
1.3414°	-3.0940°	1.7526°	-1.4091°	0.0677°
-1.4654°	-2.2918°	0.8264°	-1.0080°	0.4575°
1.3181°	-3.6669°	2.3489°	-1.6382°	0.3202°
1.3332°	-2.2345°	0.9014°	-1.0080°	0.3252°
-0.9327°	-0.6875°	0.2452°	-0.3204°	0.6123°
0.5810°	-3.0367°	2.4557°	-1.4091°	0.8281°
1.3231°	-2.8075°	1.4844°	-1.2945°	0.0286°
0.7415°	-1.2605°	0.5191°	-0.5496°	0.1918°
1.0980°	-0.5730°	0.5250°	-0.2631°	0.8349°
-0.6698°	0.0000°	0.6698°	0.0340°	0.6358°
0.5953°	-2.1199°	1.5246°	-0.9507°	0.3554°
0.4214°	0.0000°	0.4214°	0.0340°	0.3875°
-0.0320°	-1.8908°	1.8588°	-0.8934°	0.8614°
-0.3049°	-2.6356°	2.3307°	-1.1799°	0.8750°
0.2407°	-2.4637°	2.2230°	-1.1226°	0.8818°
0.3601°	-2.4064°	2.0463°	-1.1226°	0.7625°
1.1199°	-3.3232°	2.2033°	-1.5237°	0.4038°
0.2356°	-1.8908°	1.6551°	-0.8934°	0.6578°
-0.0993°	-2.5783°	2.4790°	-1.1799°	1.0806°
-1.0552°	-2.5783°	1.5231°	-1.1799°	0.1247°
-0.4614°	0.0000°	0.4614°	0.0340°	0.4274°
-1.8869°	0.0000°	1.8869°	0.0340°	1.8530°
2.9963°	-2.6929°	0.3034°	-1.2372°	1.7591°
-2.4905°	0.0000°	2.4905°	0.0340°	2.4565°

A Tabela 1 mostra os resultados dos ângulos de propagação calculados por meio dos três critérios. Os erros absolutos foram calculados com relação ao valor do ângulo calculado pelo MTC presente no BEMCRACKER2D.



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observando a comparação entre o resultado experimental e o resultado gráfico gerado a partir dos programas BEMCRACKER2D e BEMLAB2D nota-se a efetividade do Método dos Elementos de Contorno quanto ao cálculo de propagação de fissura por meio do critério da Máxima Tensão Circunferencial (MTC) e, portanto, quanto ao cálculo dos K_I e K_{II} .

A partir dessa validação, nota-se ainda que os outros critérios que preveem os ângulos no qual a trinca irá seguir geram resultados bem próximos. Embora haja erro, as curvas variam entre uma faixa menor que 10 mm no eixo das ordenadas, sendo que esse valor representa cerca de 4.7% da maior dimensão do corpo de prova.

O MTC, quando calculado pelo BEMCRACKER2D, sofre uma correção a cada incremento enquanto que os outros critérios foram calculados sem correção alguma, usando as formulações puramente.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelos recursos recebidos e ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC, da Universidade de Brasília.



REFERÊNCIAS

Anderson, T.L., Fracture Mechanics: Fundamentals and Application, 3rd Edition, CPC Press, 2005.

Ayatollahi, M.R., Aliha, M.R.M., “Analysis of a new specimen for mixed mode fracture tests on brittle materials”, Engineering Fracture Mechanics Journal, v. 76, 2009, pp. 1563-1573.

Barsom, J.M. e Rolfe, S.T., Fracture and Fatigue Control in Structures, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.

Delgado Neto, A.M., “BEMLAB2D: Interface Gráfica de Modelagem, Visualização e Análise com Elementos de Contorno – Uma Aplicação em Problemas Elastostáticos”, 2017, 112 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-graduação em Estrutura e Construção Civil, Universidade de Brasília, UnB – Brasília.

Gomes, G., “Aplicação dos métodos de elementos de contorno e reciprocidade dual em problemas de plasticidade 2D orientada a objeto”, 2006, 168 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-graduação em Estrutura e Construção Civil, Universidade de Brasília, UnB – Brasília.

Gomes, G, Delgado Neto, A.M., “Modelling and 2D Cracks View Using Dual Boundary Integral Equation”, 2016, XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE, Brasília.

Hussain, M.A., PU, S.U., e UNDERWOOD, J., “Strain Energy Release Rate for a Crack under Combined Mode I and II”, ASTM STP 560, 1974, pp. 2-28.

Portela, A., Aliabadi, M.H., ROOKE, D.P., “The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems”, International Journal for Numerical Method in Engineering, v. 33, 1992, pp. 1269-1287.

Rice, J.R., A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks”, Journal of Applied Mechanics, v. 35, 1968, pp 379-386.

Sanford, R.J., Fundamentals of Frature Mechanics, Prentice Hall, 2002.

Sih, G.C., “Strain-Energy-Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems”, International Journal of Fracture Mechanics, v.10, 1974, pp. 305-321.