



Um estudo da influência dos parâmetros de discretização no domínio do tempo e do espaço em um carregamento tipo função degrau.

A study of influence the discretization parameters in time and space on Heaviside function loading

Antônio Manoel Ferreira Frasson¹; Julio Tomás Aquije Chacaltana²; Carlos Friedrich Loeffler³.

- (1) Dr. Prof., Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.
(2) Dr. Prof., Departamento de Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.
(3) Dr. Prof., Departamento de Engenharia MECânica Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil

Email para Correspondência: antonio.frasson@gmail.com; (P) Apresentador

Resumo: Na simulação numérica da resposta dinâmica, as relações entre os valores de incremento de tempo em esquemas de integração e as dimensões dos elementos gerados pela discretização espacial pelos vários métodos devem levar em consideração o espectro do carregamento dinâmico. Este artigo examina o efeito das altas frequências presentes no carregamento dinâmico quando ocorrem em problemas estruturais constituídos por barras fisicamente homogêneas e não homogêneas. Usando o Método dos Elementos Finitos e diferenças finitas, é mostrado que a suavização limitada do carregamento dinâmico não compromete a resposta em termos de precisão e evita o efeito de Gibbs. As relações experimentais de refinamento da malha são examinadas a partir do espectro de carga proposto. Os resultados são apresentados e comparados com a solução analítica

Palavras chaves: Transformada de Fourier, elementos finitos, diferenças finitas.

Abstract: In numerical simulation of the dynamic response, the relations between the time increment values in integration schemes and the dimensions of the elements generated by spatial discretization by the various methods must take into account in dynamic loading. In this present work, it is examined the effect of the high frequencies in dynamic loading of the homogeneous and non-homogeneous bars with structural problems. Using the Finite Element Method and Finite Differences, it is shown that smoothing doesn't compromise the response in terms of accuracy and avoids the Gibbs effect. Experimental refinement relationships of the mesh are examined from the proposed loading spectrum. Results are presented and compared with the analytical solution.

Keywords: Fourier transform, finite elements, finite differences.

1. Introdução.

O carregamento dinâmico do tipo degrau possui um espectro contendo frequências elevadas. Mesmo a solução analítica da equação de onda para casos não homogêneos, com a variação da constante de elasticidade em todo domínio, quando possível, é obtida pela separação de variáveis resultando em uma série com infinitas harmônicas (Loeffler et al. 2012). O truncamento do número de harmônicas resulta na aparição do fenômeno de Gibbs. Para diversos outros casos a solução analítica fechada dificilmente é obtida. A obtenção da resposta através dos diversos métodos numéricos é necessária e esses atuam como se fossem filtros passa baixa ideal, gerando o efeito de Gibbs. Um carregamento com frequências elevadas pode ser substituído por outro suavizado na transição com o compromisso da precisão necessária dada a discretização utilizada. O objetivo desse trabalho é obter uma forma simples de determinar a suavização necessária para o não aparecimento do fenômeno de Gibbs comprometendo ao mínimo possível a perda de precisão. É utilizando um problema de uma barra não homogênea para testar o método de determinação da suavização em conjunto com dois métodos numéricos bastantes conhecidos, o método dos Elementos Finitos e o das Diferenças Finitas.

2. Equação de Governo.

O problema físico utilizado nesse trabalho consiste de uma barra heterogênea submetida a uma deformação súbita na extremidade da direita, em $x=b$, engastada na extremidade da esquerda, em $x=a$, conforme a Figura 1. A heterogeneidade se deve a variação do módulo de elasticidade longitudinal (Loeffler et al. 2012). A obtenção da equação diferencial de equilíbrio dinâmico é feita a partir da Lei de Newton (Leissa et al. 2011), considerando que atua apenas uma tensão uniaxial. Esta é constante ao longo da barra, mas a deformação varia na direção axial, por depender do módulo de elasticidade (Little 1973).

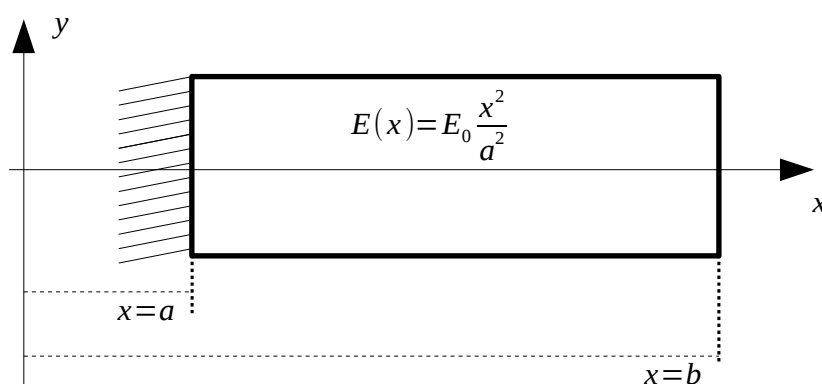


Figura 1. Barra engastada com módulo de rigidez longitudinal variável.

Da equação de equilíbrio, pode-se encontrar;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

sendo $E(x)$ o módulo da elasticidade, ρ a massa específica e u o deslocamento.

3. O Método dos Elementos Finitos.

Aplicando o método de Galerkin na Eq. (1) e aplicando-se a discretização com as funções de interpolação de Lagrange, resulta em;

$$[K]\{u(t)\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u(t)\} = 0, \quad (2)$$

onde;

$K_{i,j} = \int_a^b \frac{E(x)}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx$, $M_{i,j} = \int_a^b N_i(x) N_j(x) dx$ são os elementos da matriz $[K]$ e $[M]$ respectivamente, com $N_i(x)$ as funções de interpolação de Lagrange, nesse trabalho, as integrais são calculadas utilizando integração numérica por quadratura de Gauss com até 8 pontos.

4. O método das diferenças Finitas de ordem 2.

Utilizando-se a aproximação de segunda ordem na Eq. (1), pode-se escrever;

$$\frac{E(x_{i+1/2}) \frac{(u_{i+1}^n - u_i^n)}{\Delta x} - E(x_{i-1/2}) \frac{(u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta x}}{\Delta x} - \rho \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = 0, \quad (3)$$

que leva a relação de recorrência;

$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t^2}{\rho \Delta x^2} \left(E(x_{i-1/2}) u_{i+1}^n + E(x_{i-1/2}) u_{i-1}^n \right) + \left(2 - \frac{\Delta t^2}{\rho \Delta x^2} (E(x_{i+1/2}) + E(x_{i-1/2})) \right) u_i^n - u_i^{n-1} \quad (4)$$

6. Fenômeno de Gibbs.

O fenômeno de Gibbs é a representação de sinais com o desprezo das frequências a partir de um certo valor, correspondendo à passagem do mesmo por um filtro passa baixa ideal. Assim, o resultado no domínio do tempo se apresenta como a convolução do mesmo com a resposta impulsional do filtro passa baixa ideal, com ou sem atraso, cuja transformada de Fourier do filtro sem atraso é mostrada na Eq. (5);

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{para } |f| \leq f_c \\ \text{alhures} & \end{cases}, \quad (5)$$

a transformada inversa de Fourier é dada na Eq. (9);

$$h(t) = \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{\pi t}, \quad (6)$$

sendo $u(t)$ a função degrau unitário, $h(t)$ e $u(t)*h(t)$ são representados na Figura 1.

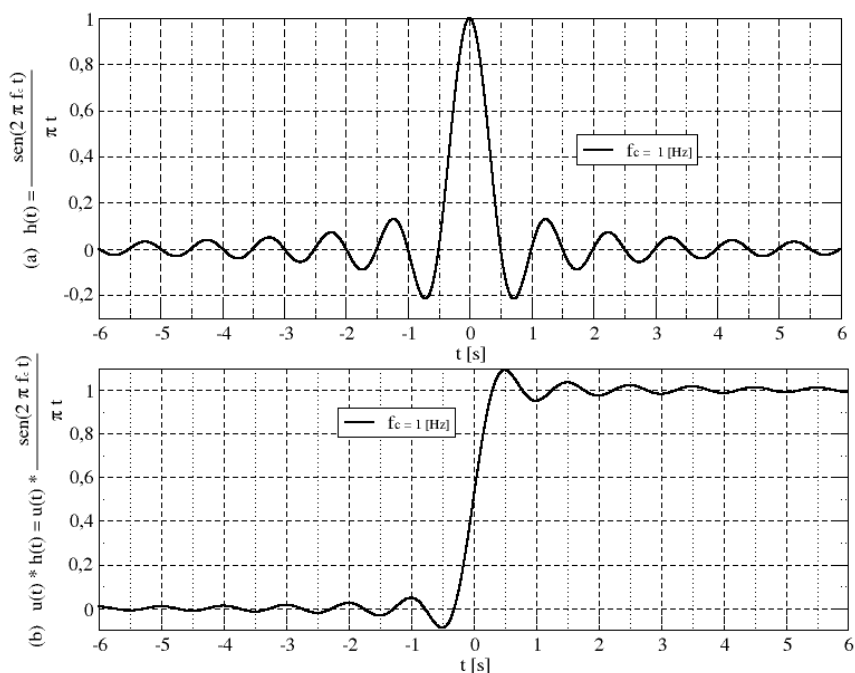


Figura 1. (a) Resposta impulsiva do filtro passa baixa ideal para $f_c = 1$ [Hz]. (b) convolução do mesmo com a função degrau. Fonte: (Autor, 2018)

Pode-se observar na Figura 1.b que o intervalo de tempo entre os picos do gráfico resultante da convolução, os picos estão espaçados de uma frequência de corte. Outro exemplo do aparecimento do fenômeno de Gibbs pode ser observado na aproximação pela série de Fourier de um sinal quadrado truncando-se o número de harmônicas.

Na Figura 2.a é mostrado um sinal quadrado de 1 [Hz] que foi aproximado pela Série de Fourier cortando-se da vigésima harmônica em diante. Pode-se observar que os picos estão espaçados de $1/20$ [Hz]. O espectro do sinal quadrado é mostrado na Figura 2.b.

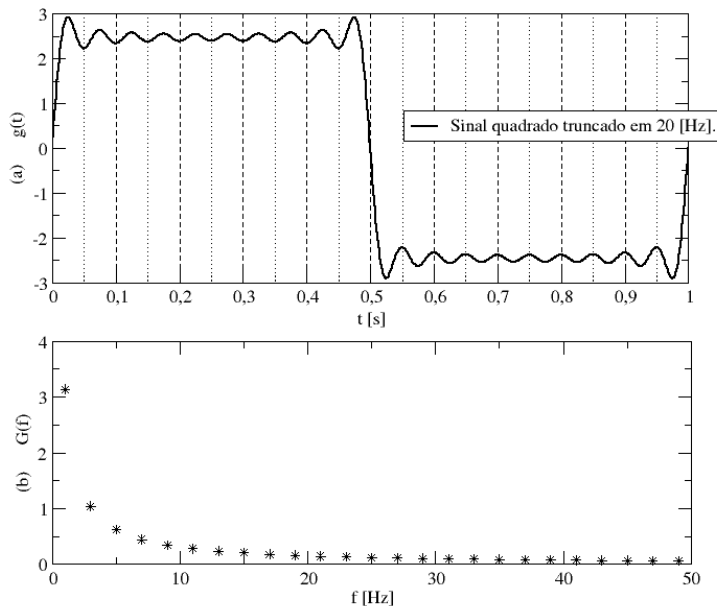


Figura 2. (a) Sinal quadrado de 1 [Hz] que foi aproximado pela Série de Fourier cortando-se da vigésima harmônica em diante. (b) Espectro correspondente até a 49ª harmônica. Fonte: (Autor, 2018)

Na aproximação mostrada na Figura 2.a, foi desprezado apenas 2,0245% da energia total do sinal, e, mesmo assim, aparece de forma pronunciada o fenômeno de Gibbs.

Nos dois exemplos mostrados, verifica-se que a frequência de corte do filtro ideal pode ser determinado conhecendo-se o intervalo de tempo entre os picos do sinal de saída.

5. Espectros dos carregamentos utilizados.

Uma função suavizada que pode ser utilizada pode ser;

$$g(t) = \frac{\text{erf}(\sqrt{\pi})t \tau + 1}{2}, \quad (7)$$

a convolução com a resposta ao impulso no domínio do tempo do filtro passa baixa ideal com a frequência de corte de 1 [Hz] é mostrada na parte superior da Figura 3 para $\tau=1$ e $\tau=10$, e o espectro é dado por;

$$G(f) = \frac{\delta(f)}{2} + \frac{e^{-\pi(f/\tau)^2}}{j2\pi f}, \quad (8)$$

onde $j = \sqrt{-1}$ que é mostrado na parte inferior da Figura 3 com $\tau=1$ e $\tau=10$.

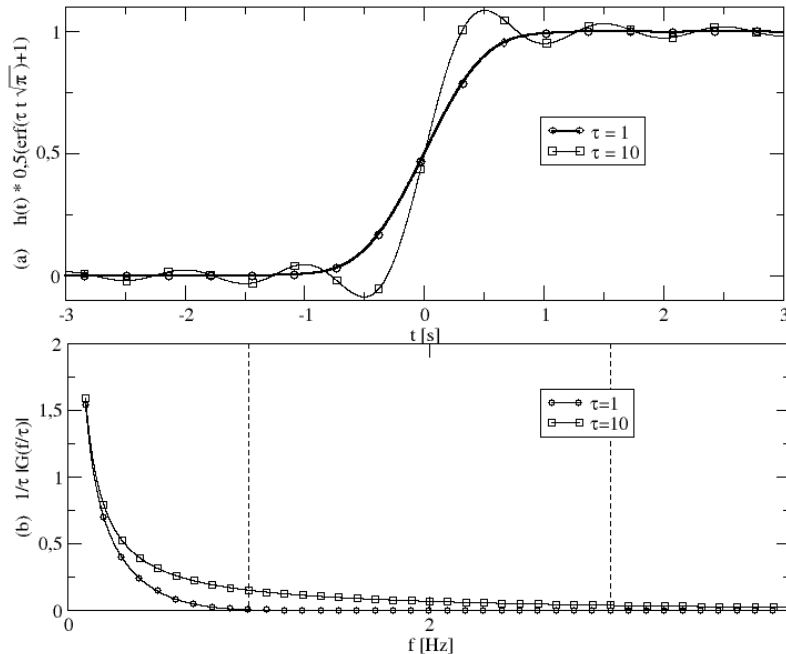


Figura 3. (a) Convolação entre a função de suavização e a resposta ao impulso do filtro passa baixa. (b) O módulo do espectro da função de suavização. Fonte: (Autor, 2018)

Passando o sinal no filtro ideal de 1 [Hz], corta-se 0,37425% da energia total a partir de 0,1 Hz para função de suavização com $\tau = 1$ e 38,824% da energia total a partir de 0,1 [Hz] para $\tau = 10$.

Observa-se na Figura 3.a que com a supressão de muita energia o fenômeno de Gibbs aparece com muita intensidade. Por outro lado, com pouca supressão de energia, o carregamento pode ficar muito suave. Como compromisso, recomenda-se a utilização de $\tau = f_c$, sendo f_c do método numérico para uma dada discretização.

6. Resultados Numéricos.

Simulando-se o problema da barra não homogênea, considerando-se o domínio com

$$2 \leq x \leq 3 \quad [\text{m}], \quad \text{com} \quad \rho = 1 \quad [\text{kg/m}^3] \quad \text{e} \quad E(x) = \frac{x^2}{2} \quad [\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}]$$

os métodos das Diferenças Finitas e dos Elementos Finitos, obteve-se as frequências de corte versus o número de elementos de discretização que é apresentado na Figura 4.

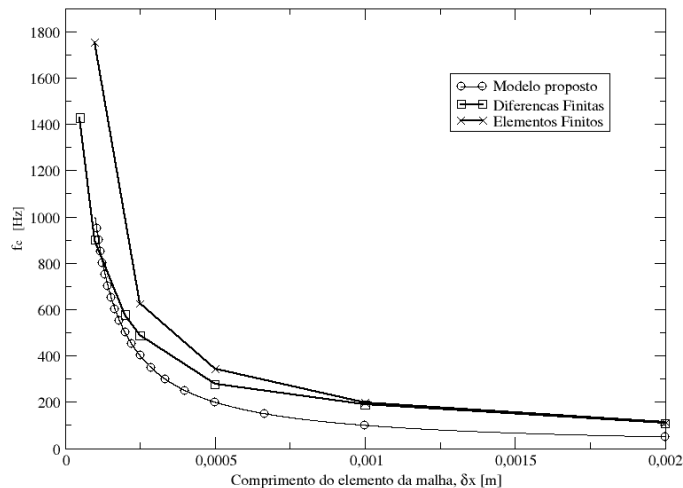


Figura 4. Frequência de corte do método das diferenças finitas, dos Elementos Finitos e calculada com expressão proposta pelos comprimento dos elementos da malha δx . Autor (2018).

A expressão proposta para o cálculo aproximado da frequência de corte do método numérico é;

$$f_c \sim \frac{1}{10 v_{max} \delta x}, \quad (9)$$

onde v_{max} é a máxima velocidade no domínio e δx o comprimento do maior elemento.

Resultados do deslocamento calculados utilizando a aproximação da Eq. (9) em três métodos são apresentados na Figura 5.

7. Conclusão.

O cálculo feito pela expressão descrita na Eq. (9) é um pouco pessimista em relação à realidade, mas garante uma forma de calcular o valor de τ para a expressão do carregamento dinâmico, sendo $\tau = f_c$ garante-se que o fenômeno de Gibbs fica desprezível na simulação, sem, contudo, perder a máxima acurácia permitida por uma certa discretização do domínio. Isso é fundamental, principalmente em análise em duas dimensões ou, até mesmo em três dimensões.

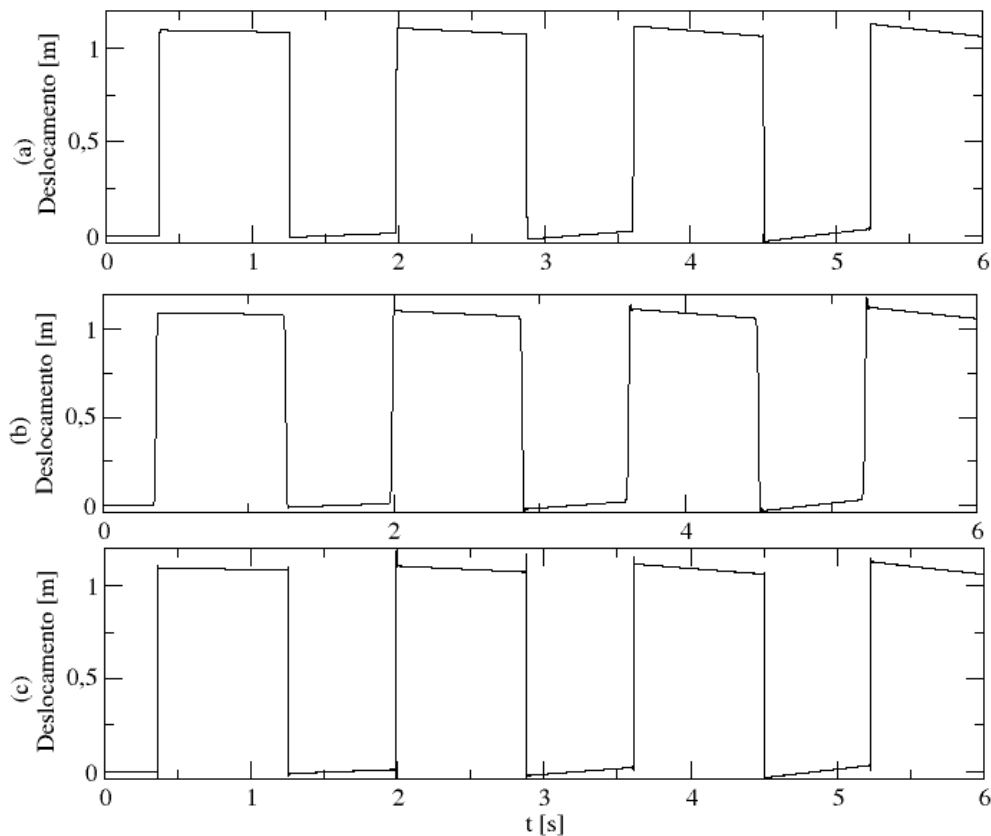


Figura 5. O resultado do deslocamento para a barra não homogênea calculado por; a) Método dos Elementos Finitos; b) Método das Diferenças Finitas; c) Solução analítica (Loeffler et al. 2012). (autor 2018)

REFERÊNCIAS

Carlos F. Loeffler, Fábio C. Fernandes, CMAC, 2012. *Solução Analítica do Problema da Barra de Rigidez Variável Sujeita a Carga de Impacto através do Método de Separação de Variáveis*, pp 372-375.

A. W. Leissa, M.S. Qatu, *Vibrations of Continuous Systems*, McGraw-Hill Companies, 2011.

R.W. Little, *Elasticity*, Prentice-Hall, New Jersey, 1973.

Timothy Davis, *Algorithm 832: UMFPACK, an unsymmetric-pattern multifrontal method*, ACM Transactions on Mathematical Software, Volume 30, Number 2, June 2004, pages 196-199.

Timothy Davis, *Direct Methods for Sparse Linear Systems*, SIAM, 2006, ISBN: 0898716136, LC: QA188.D386.