



## ALTERNATIVA À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ASSOCIADO AO S.O.R.

### Alternative resolution of engineering problems by applying the Finite Difference Method associated to S.O.R.

Lucas Fadini Favarato (1); Matheus Rocha (2); Rodrigo Silveira Camargo (3);

(1)(P) Graduando em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil.

(2) Mestrando em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil.

(3) Professor Doutor, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil.

E-mail para Correspondência: lucasffavarato@gmail.com; (P) Apresentador

#### Resumo

A resolução dos problemas de Engenharia recai, na quase totalidade dos casos, em equações diferenciais ordinárias ou parciais, cujas soluções analíticas nem sempre são triviais de se obter. Neste contexto, a opção por métodos numéricos se torna uma alternativa vantajosa, tanto devido à fácil adaptação a equações complexas como pela qualidade do resultado. Dentre eles, destaca-se o Método das Diferenças Finitas, no qual o domínio é discretizado em uma malha e as derivadas das funções são aproximadas por diferenças finitas. As soluções, dessa forma, são calculadas em pontos discretos, obtidas pela resolução de um sistema linear de ordem proporcional à discretização adotada, cuja dimensão também afeta o tempo de processamento computacional. A fim de agilizar este processo, recorre-se a métodos iterativos de solução, que apresentam rápida convergência, a menos de uma tolerância pré-estabelecida, e dispensam o cálculo de determinantes e inversas de matrizes, comum nos métodos tradicionais. Neste estudo, o Método das Diferenças Finitas é aplicado na solução do problema de escoamento em estado estacionário de um fluido em torno de um obstáculo, no equilíbrio dinâmico para sistemas com um grau de liberdade, na flexo-compressão de peças prismáticas esbeltas e em problemas da elasticidade linear, associado às funções de tensão de Airy. Os sistemas lineares resultantes são resolvidos pelo método da Sobre-Reflexão Sucessiva (*Successive Over-Reflection*, S.O.R.), conhecido por sua rápida convergência devido ao parâmetro  $\omega$ . Foram testadas diferentes malhas e, para cada uma delas, avaliados o erro absoluto e o número de iterações necessárias para a convergência do método. Desse modo, é possível discutir a eficiência, vantagens e desvantagens acerca da associação do SOR em cada uma das quatro abordagens.

*Palavras chaves: diferenças finitas; SOR; método numérico; equações diferenciais.*

#### Abstract

In almost all cases, the resolution of engineering problems is based on ordinary or partial differential equations, whose analytical solutions are not usually simple. In this context, the use of a numerical approach is an advantageous alternative, due to its easy conformation to complex



equations and the quality of the result as well. Among all numerical methods, it's worth to highlight the Finite Difference Method, in which the domain of a function is meshed and the derivatives are approximated by finite differences. The solutions, in this sense, are calculated at discrete points, obtained by the resolution of a linear system as big as the mesh discretization, whose dimension also affects the computational processing. In order to speed up this process, iterative methods with fast convergence might be used, which also don't require the calculation of matrixes and determinants, common in traditional methods. In this article, the Finite Difference Method is applied to the problems of stationary fluid flow around an obstacle, dynamic equilibrium of single-degree-of-freedom systems, combined bending and compression of prismatic slender columns and linear elasticity problems, associated to Airy Stress Functions. The resulting linear systems are solved through the Successive-Over Reflection (S.O.R.), known by its fast convergence due to  $\omega$  parameter. Different meshes have been tested and both absolute error and number of iterations have been analyzed. Thus, it's possible to evaluate the efficiency, advantages and disadvantages of S.O.R. for each of the four proposals.

*Keywords: finite differences; SOR; numerical method; differential equations.*

## 1 INTRODUÇÃO

Os problemas físicos estudados pela engenharia são, de modo geral, representados por equações diferenciais. Nesse contexto, é necessário estudar técnicas que possibilitem resolvê-las, de forma a determinar as grandezas de interesse. Nos problemas em que a solução analítica é de difícil determinação ou inexistente, o uso de métodos numéricos baseados em aproximações pode contornar tal limitação. Uma das alternativas existentes para tal fim, neste contexto, é o Método das Diferenças Finitas, em que as derivadas das funções incógnitas são aproximadas com seus valores nas vizinhanças da função. Um sistema linear é montado, tendo como incógnitas os valores desejados em todo domínio, o qual é discretizado por pontos.

## 2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

### 2.1 Método das Diferenças Finitas

Em conformidade com Wrobel et al. (1989), o princípio do método é a discretização do domínio de uma equação diferencial em uma malha e a aproximação das derivadas pelas diferenças correspondentes, respeitando as condições de contorno do problema. Como resultado, chega-se a um sistema linear cuja solução fornece o valor da função desejada nos pontos de interesse.

Para aproximar as diferenças finitas num ponto, considere uma função a valores reais,  $y = y(x)$ , definida e diferenciável em  $\mathbb{R}$ , cujas expansões dos valores em  $x = x_i + h$  e  $x = x_i - h$  em torno de  $x = x_i$  se desejam conhecer. Utilizando séries de Taylor, conforme Eq. (1) e (2), respectivamente:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \frac{h^3}{6} \left( \frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (1)$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - h \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=x_i} - \frac{h^3}{6} \left( \frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (2)$$

Reorganizando os termos das equações anteriores, é possível isolar as derivadas de primeira ordem do lado esquerdo da igualdade, conforme Eq. (3) e (4).

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} - \frac{h}{2} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=x_i} - \frac{h^2}{6} \left( \frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (3)$$

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=x_i} - \frac{h^2}{6} \left( \frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (4)$$

Trucando os valores da série a partir da derivada de segunda ordem, chega-se à aproximação por diferenças finitas para derivadas de primeira ordem. Observe que o erro da aproximação (valores desprezados) é pequeno, igual a  $h$  multiplicado por uma constante, i.e, da ordem de  $h$ .

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} + O(h) \quad (5)$$

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h} + O(h) \quad (6)$$

A Equação (5) fornece uma aproximação denominada diferença finita adiantada, posto que a derivada foi aproximada pela diferença entre o valor num ponto e outro à sua frente, enquanto a Eq. (6) é conhecida por diferença finita atrasada por motivo semelhante. Somando as Eq. (3) e (4) membro a membro, é possível obter uma nova aproximação para derivadas de primeira ordem, truncando a série resultante na derivada de ordem três. Esta outra formulação, chamada diferença finita central, fornece uma aproximação com menor erro cometido, da ordem de  $h^2$  (Equação 7).

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} + O(h^2) \quad (7)$$

Derivadas de qualquer ordem podem ser aproximadas para utilização deste método por meio da correta combinação das Eq. (1) e (2). Considere, por fim, a aproximação de derivadas de ordem dois, somando as respectivas equações membro a membro (Equação 8). O erro cometido é da ordem de  $h^4$ .

$$\left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=x_i} = \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} + O(h^4) \quad (8)$$

## 2.2 Discretização de uma equação diferencial

Para aplicar o Método das Diferenças Finitas a uma equação diferencial, deve-se, em primeiro lugar, substituir as derivadas pelas correspondentes diferenças finitas, como aquelas apresentadas nas Eq. (7) e (8). Na sequência, o domínio deve ser discretizado em uma malha condizente com a precisão desejada para o problema – quanto maior a malha, maior o erro na aproximação. A Figura 1 exemplifica a criação de uma malha em um domínio bidimensional, em que o valor da função,  $u$ , em um ponto  $P$  de coordenadas  $(x_i, y_j)$ , será aqui denominado  $u_{ij}$ . Vale também ressaltar que os passos nas duas direções,  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , podem ser tomados de forma adaptativa, isto é, reduzidos nas regiões do domínio em que se deseja obter maior acurácia na análise. Neste estudo, pela simplicidade dos problemas abordados, a malha utilizada em todos os casos foi uniforme.

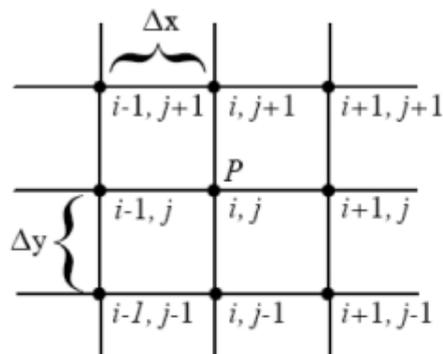


Figura 1. Discretização de um domínio bidimensional.

Fonte: (Costa e Ribeiro, 2010)

Por fim, deve-se aplicar a equação na forma de diferenças obtida na etapa anterior a todos os pontos do domínio cujo valor se deseja conhecer, respeitando as condições de contorno. Ao fim deste processo, será gerado um sistema linear, cuja resolução faz-se mais facilmente utilizando métodos iterativos.

## 2.3 Método da Sobre-Reflexão Sucessiva (SOR)

Seja  $[A]\{X\} = \{b\}$  um sistema linear. A resolução direta envolve o cálculo da inversa de  $[A]$ , o que, dependendo do refinamento da malha utilizada, exige um alto esforço computacional, seguido por seu produto pelo vetor  $\{b\}$ . O emprego de um método iterativo, neste contexto, torna-se mais vantajoso.

Considere o mesmo sistema linear apresentado no parágrafo anterior, possível e determinado. A matriz  $[A]$  pode ser escrita como a soma de uma matriz triangular superior com elementos da diagonal nulos –  $[E]$ , uma matriz diagonal –  $[D]$ , e uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal nulos –  $[F]$ , conforme Eq. (9).

$$[A] = -[E] + [D] - [F] \quad (9)$$

Substituindo a Eq. (9) no lugar de  $[A]$  e isolando  $\{X\}$  à esquerda da equação:

$$[-E + D - F]\{X\} = \{b\} \quad (10)$$

$$\{X\} = [D - E]^{-1}[F]\{X\} + [D - E]^{-1}\{b\} \quad (11)$$

$$\{X\}^{k+1} = [S]\{X\}^k + [C] \quad (12)$$

A Eq. (12) é a equação de iteração para resolução do sistema linear proposto. Note que as matrizes de iteração  $[S]$  e  $[C]$  são obtidas a partir daquelas provenientes da decomposição de  $[A]$ . O termo  $k$  representa a iteração do processo, o qual deve ser repetido até que o erro relativo entre dois passos sucessivos seja menor que uma tolerância preestabelecida.

Este método, conhecido como Gauss-Seidel, sempre converge desde que  $[A]$  seja diagonalmente dominante e que o critério de Sassenfeld seja satisfeito. Por outro lado, a convergência pode ser ainda acelerada pela ligeira modificação da Eq. (12) por meio da introdução do fator  $\omega$ , responsável pela ponderação do resultado entre as iterações anterior e presente (Chapra & Canale, 2015).

$$\{X\}^{k+1} = \omega\{X\}^{k+1} + (1 - \omega)\{X\}^k \quad (13)$$

Observa-se que se  $\omega = 1$ , o método de Gauss-Seidel permanece inalterado. No entanto, se  $0 < \omega < 1$  (denominado sob-reflexão), o resultado é ponderado entre as iterações presente e anterior, o que é largamente utilizado para sistemas de difícil convergência ou a fim de eliminar oscilações na resposta. Por outro lado, se  $1 \leq \omega \leq 2$  (denominado sobre-reflexão), o resultado é extra ponderado na iteração presente. Este procedimento é empregado para acelerar a convergência de um sistema cuja solução caminha na direção correta. Uma vez que os problemas apresentados neste estudo apresentam fácil convergência, foram analisados os valores de  $\omega$  apenas no intervalo  $[1,2]$  na maioria dos casos.

### 3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

#### 3.1 Validação do problema

A fim de verificar e validar a eficiência das estratégias apresentadas na solução de problemas, foi selecionada uma equação diferencial parcial (Eq. 14) de solução conhecida (Eq. 15), em domínio retangular, e resolvida através do Método das Diferenças Finitas. Diferentes malhas foram testadas e, para cada uma delas, variou-se o parâmetro  $\omega$  a fim de avaliar o número de iterações necessárias para a convergência, o máximo erro entre solução exata e aproximada e máximo erro do método numérico entre as duas últimas iterações.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(x - 5)^2 + 2y(y - 1), \quad (x, y) \in [0,5] \times [0,1] \quad (14)$$

$$u(x, y) = (x - 5)^2 y(y - 1) \quad (15)$$

Devem ser satisfeitas as condições de contorno indicadas pelas Eq. (16) a (19).

$$u(0, y) = 25y(y - 1) \quad (16)$$

$$\partial u(5, y) / \partial x = 0 \quad (17)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (18)$$

$$u(x, 1) = 0 \quad (19)$$

Além disso, restringiram-se o número máximo de iterações a 2000 e o erro absoluto do método numérico a  $10^{-5}$ , isto é, uma solução satisfatória será encontrada quando a diferença absoluta entre os valores da variável entre duas iterações sucessivas for inferior a este valor.

Os resultados encontram-se nas Tabelas 1, 2, 3 e 4.

**Tabela 1. Resultados da análise para malha 20x4.**

$\omega$	Erro exato máximo	Erro SOR máximo	Número de iterações
0,4	0,00011110	0,00000906	131
0,6	0,00006247	0,00000930	80
0,8	0,00003719	0,00000906	53
1,0	0,00002003	0,00000763	36
1,2	0,00001144	0,00000906	23
1,4	0,00000381	0,00000751	15
1,6	0,00000381	0,00000882	28
1,8	0,00000858	0,00000918	55

**Tabela 2. Resultados da análise para malha 40x8.**

$\omega$	Erro exato máximo	Erro SOR máximo	Número de iterações
0,4	0,00047517	0,00000978	436
0,6	0,00027657	0,00000978	269
0,8	0,00016880	0,00000978	181
1,0	0,00010705	0,00000930	125
1,2	0,00006199	0,00000858	86
1,4	0,00003743	0,00000906	55
1,6	0,00001597	0,00000763	27
1,8	0,00000763	0,00000763	62

**Tabela 3. Resultados da análise para malha 80x16.**

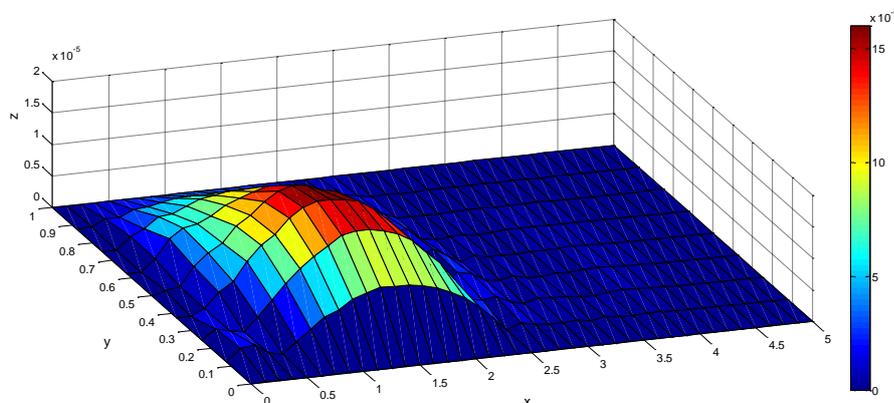
$\omega$	Erro exato máximo	Erro SOR máximo	Número de iterações
0,4	0,00191045	0,00000978	1461
0,6	0,00112462	0,00000978	911
0,8	0,00069904	0,00000978	619
1,0	0,00046444	0,00000978	431
1,2	0,00029635	0,00000954	300
1,4	0,00018430	0,00000978	200
1,6	0,00009179	0,00000906	120
1,8	0,00002337	0,00000918	51

**Tabela 4. Resultados da análise para malha 160x32.**

$\omega$	Erro exato máximo	Erro SOR máximo	Número de iterações
0,4	0,29656935	0,00040770	2000
0,6	0,04390025	0,00009966	2000
0,8	0,00363278	0,00001287	2000
1,0	0,00185752	0,00000978	1460
1,2	0,00122142	0,00000978	1025
1,4	0,00075150	0,00000930	696
1,6	0,00041270	0,00000954	430
1,8	0,00014639	0,00000954	200

O gráfico da

Figura 2 representa a diferença entre as soluções analítica e aproximada para a malha de 40x8.



**Figura 2. Diferença entre soluções analítica e aproximada.**

Os resultados apresentados são unânimes e mostram como é possível diminuir significativamente o número de iterações necessárias para a convergência do método iterativo. Para as malhas de 20x4, 40x8, 80x16 e 160x32, respectivamente, as reduções são de 58,3%, 78,4%, 88,2% e 86,30% quando se compara o número de iterações mínimo com aquele referente ao método de Gauss-Seidel ( $\omega = 1$ ).

### 3.2 Escoamento de fluido em torno de um obstáculo

Em conformidade com White (2003), o escoamento de um fluido incompressível e não viscoso em estado estacionário em torno de um obstáculo (Figura 3) pode ser traduzido pelo modelo diferencial da Eq. (20), na qual  $\psi$ , função escalar de  $x$  e  $y$ , denota as linhas de corrente, tangentes em cada ponto do domínio ao vetor velocidade  $(u, v)$ . Deve-se admitir ainda que não há troca de calor entre as partículas e entre estas e o meio.

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$

Para este problema, deve-se assumir que o canal em que o escoamento se estabeleceu seja de tamanho  $500 \times 100$  e que o obstáculo retangular tenha seu vértice superior esquerdo, conforme Figura 3, localizado em  $(x_p, y_p) = (400, 70)$ . A velocidade inicial ( $u_0$ ) em  $x = 0$ , para qualquer ponto, é 1. As condições de contorno resumidas pelas Eq. (21) a (24) devem ser garantidas.

$$\psi(0, y) = u_0 y \quad u = u_0, v = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial \psi(500, y)}{\partial x} = 0 \quad v = 0 \quad (22)$$

$$\psi(x, 0) = 0 \quad u = v = 0 \text{ ou } (x, y) \text{ no obstáculo} \quad (23)$$

$$\psi(x, 100) = u_0 100 = 100 \quad u = u_0, v = 0 \quad (24)$$

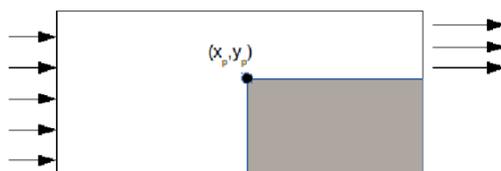




Figura 3. Escoamento ao redor de um obstáculo.

Fonte: (Valli, 2015)

Para a resolução deste problema, foi adotada uma malha de  $50 \times 20$ , compatível com a precisão desejada e com as dimensões do obstáculo. O número de máximo de iterações foi fixado em 2000 e o máximo erro absoluto, utilizado como critério de parada, em 0,01. As soluções foram calculadas para  $\omega = 1$  e  $\omega = 1,8$ , calculando-se o número máximo de iterações e o erro absoluto máximo para cada abordagem. Os resultados encontram-se na Tabela 5.

Tabela 5. Resultados da análise para malha 50x20.

$\omega$	Erro SOR máximo	Número de iterações
1,0	0,00992584	425
1,8	0,00810051	68

Observa-se que o número de iterações foi reduzido em 84% com o aumento de  $\omega$  de 1,0 para 1,8. Por fim, o resultado da análise numérica está mostrado na Figura 4. Ao passar pelo obstáculo, as linhas de corrente se aproximam, indicando um aumento da velocidade de escoamento do fluido, fato que era esperado, pois a redução da seção transversal deve ser compensada para permitir que o mesmo volume seja escoado entre as seções de jusante e montante sem aumento de nível.

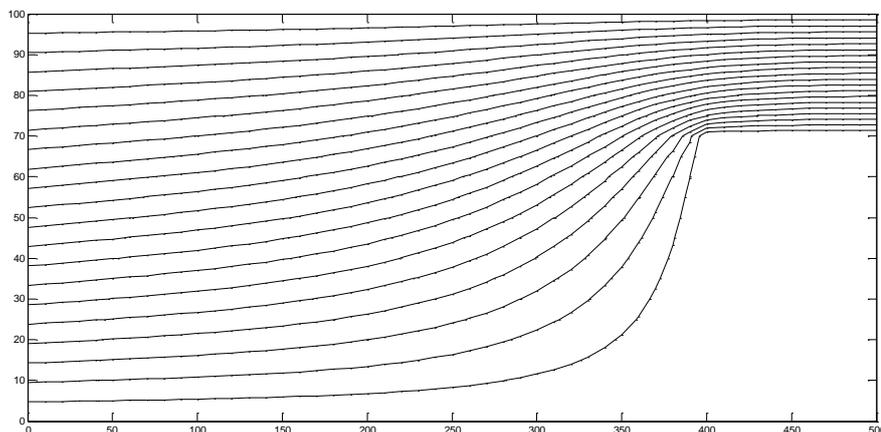


Figura 4. Linhas de corrente para escoamento em torno do obstáculo localizado em (400,70).

### 3.3 Equilíbrio dinâmico

Em conformidade com Clough e Penzien (2003), quando a um sistema são aplicados carregamentos dinâmicos, três tipos de forças reativas opostas ao movimento são desenvolvidas – inerciais, de amortecimento e de rigidez, proporcionais à

aceleração, velocidade e deslocamento observados, respectivamente. Para um sistema com um grau de liberdade (1GL), aplicando a Segunda Lei de Newton e o princípio de D'Alembert, o equilíbrio dinâmico pode ser expresso pela equação diferencial indicada em (25), em que  $m$  é a massa,  $c$  a constante de amortecimento,  $k$  a rigidez e  $p(t)$  a carga cuja magnitude varia com o tempo.

$$mv''(t) + cv'(t) + kv(t) = p(t) \quad (25)$$

Devem ser satisfeitas as condições de contorno em  $t = 0$ , indicadas pelas Eq. (26) e (27).

$$v(0) = v_0 \quad (26)$$

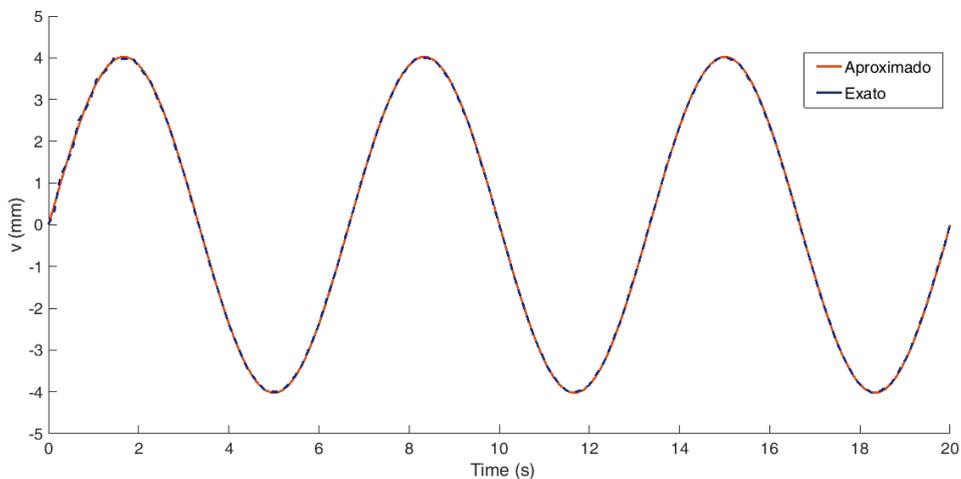
$$\frac{dv(0)}{dx} = v'_0 \quad (27)$$

Para exemplificar a resolução deste problema de valor inicial utilizando o método das diferenças finitas, considerou-se uma carga harmônica senoidal, de amplitude 2 kN e frequência de excitação 0,15 Hz, aplicada a um sistema de um grau de liberdade, de rigidez 500 kN/m; massa de 2000 kg e taxa de amortecimento viscoso de 5%. Assumiu-se velocidade e posição iniciais nulas, número máximo de iterações de 2000 e erro absoluto de  $10^{-4}$ . A análise foi realizada até 20 s, utilizando uma malha de tamanho 150. Os resultados encontram-se na Tabela 6.

**Tabela 6. Resultados da análise para o problema dinâmico.**

$\omega$	Erro exato máximo	Erro SOR máximo	Número de iterações
0,6	0,00019588	0,000044099	3
0,8	0,00018799	0,000073759	3
1,0	0,00017892	0,000644380	5
1,2	0,00020785	0,000072296	8
1,4	0,00020377	0,000073202	14
1,6	0,00019641	0,000096051	25
1,8	0,00019377	0,000081814	162

Como se pode observar, o número de iterações necessário para a resolução do problema de valor inicial foi aumentado em 3140% com o aumento do parâmetro de convergência do método numérico quando comparado à estratégia de Gauss-Seidel. No entanto, observou-se que a diminuição de  $\omega$ , por outro lado, acelerou a convergência. As soluções aproximada e exata podem ser comparadas através da Figura 5.



**Figura 5. Respostas dinâmicas aproximada e exata.**

### 3.4 Flexo-compressão de peças prismáticas esbeltas

O conceito de estabilidade está associado aos três estados de equilíbrio que um sistema pode ter: estável, indiferente e instável. O primeiro se caracteriza pela volta à configuração de equilíbrio original ao cessar uma pequena perturbação atuante no sistema. O segundo é associado a elementos que sofrem um deslocamento quando perturbados e permanecem na posição deformada ao cessar a perturbação. Já no equilíbrio instável, o sistema encontra equilíbrio em uma configuração diferente da original, ao cessar a perturbação. Nesse âmbito, são formuladas equações para considerar a carga crítica para elementos estruturais comprimidos de material homogêneo, isotrópico e com carga centrada.

Conforme Coda (2017), em engenharia inexitem tanto a situação de carregamento perfeitamente centrado quanto material perfeitamente homogêneo e isotrópico, devido ao princípio da incerteza, pois erros intrínsecos à produção e ao material sempre estariam presentes, mesmo que se deseje atingir alta precisão. Dessa forma, é necessário abordar a flexo-compressão, ou compressão excêntrica, como uma forma de montar este problema de forma mais próxima à realidade.

Neste estudo, fez-se a análise de flexo-compressão de uma barra com excentricidade inicial e igual a 1 cm. A carga de compressão  $P$  aplicada é de 10 kN, o módulo de rigidez  $EI$  vale  $10^6$  kNm<sup>2</sup> e o comprimento  $L$  da barra é 4 m. A Figura 6 representa o esquema estático do problema proposto, e a Eq. (28) descreve o problema, com condições de contorno apresentadas pela Eq. (29). A tolerância adotada é  $10^{-9}$ , o número limite de iterações é 10000 e a discretização é feita com elementos de 0,25 m de comprimento.



**Figura 6. Flexo-compressão com excentricidade**

Fonte: (Coda, 2017)

$$v''(x) + \frac{P}{EI}v(x) + \frac{P}{EI}e = 0 \quad (28)$$

$$v(0) = 0 \quad (29)$$

$$v(6) = 0$$

A resposta exata desse problema é dada pela Equação 30.

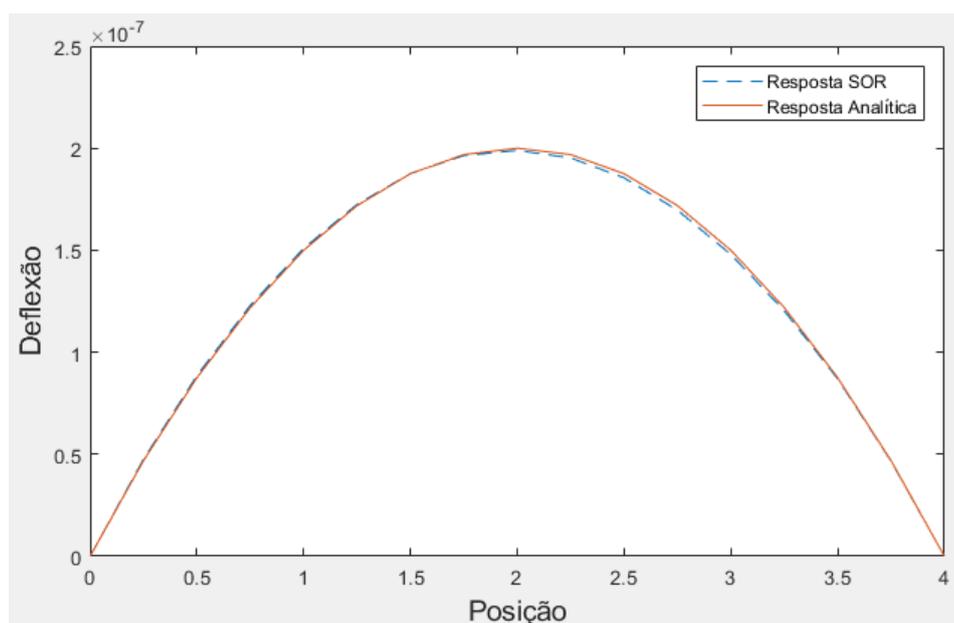
$$v(x) = e \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{kL}{2} \right) \operatorname{sen}(kx) + \cos(kx) - 1 \right] \quad (30)$$

$$k = \sqrt{P/EI}$$

Assim, são mostrados os resultados obtidos na Tabela 7 e Figura 7.

**Tabela 7. Resultados da análise para o problema de flexo-compressão.**

$\omega$	Erro exato máximo ( $\times 10^{-8}$ )	Erro SOR máximo ( $\times 10^{-10}$ )	Número de iterações
1,0	2,570	9,781	55
1,2	1,683	9,729	44
1,4	1,066	9,921	33
1,6	0,439	8,454	23
1,8	0,110	8,840	19



**Figura 7. Deflexão no problema de flexo-compressão.**

### 3.5 Problema de Elasticidade Linear

Na elasticidade linear, diversos problemas são tratados com base em equações diferenciais. Nesse contexto, há a equação de torção de barras de Saint-Venant (Equação 31), que relaciona a função de tensão de Airy com o módulo de cisalhamento  $G$  do corpo e o ângulo de giro da seção  $\theta$ . Essa função é importante pois, com ela, é possível determinar as tensões de um dado infinitésimo a partir de suas derivadas parciais de segunda ordem (Timoshenko e Goodier, 1980).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (31)$$

Dessa forma, resolve-se o problema considerando valores arbitrários para  $G$  e  $\theta$  de forma a testar a eficiência do método na resolução dessa EDP. Neste problema, é considerado que a função de tensão apresenta valores tão pequenos que podem ser considerados nulos nas fronteiras do domínio. A malha adotada (seção transversal) é quadrada de lado 4, e discretização igual nas duas direções de 0.25. A tolerância adotada foi de  $10^{-7}$ . O número limite de iterações é de 10000. Na Tabela 8 são mostrados os resultados e na Figura 8 é mostrado o gráfico da função de tensão em função das coordenadas  $x$  e  $y$ .

**Tabela 8. Resultados da análise função de tensão no problema de torção.**

$\omega$	Erro SOR máximo ( $\times 10^{-8}$ )	Número de iteraões
0,6	9,866	788
0,8	9,838	523
1,0	9,742	358
1,2	9,526	244
1,4	9,268	158
1,6	8,352	86
1,8	6,347	79

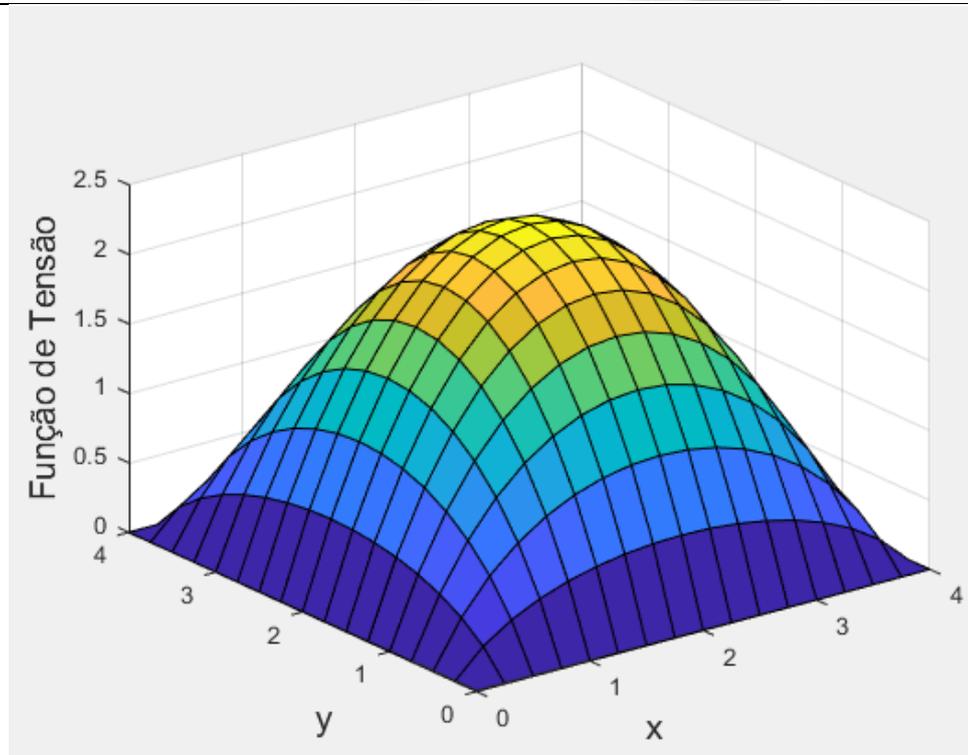


Figura 8. Função de Tensão.

#### 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

Como se pode observar no problema de validação, diferentes malhas foram testadas para a resolução de uma equação diferencial parcial de solução conhecida e, para cada uma delas, observou-se que o número de iterações necessárias para a convergência do método variou com o parâmetro  $\omega$ , chegando a 15 iterações para a malha mais grosseira (20x4).

Nas análises seguintes, aplicações corriqueiras de engenharia, foi possível observar, de fato, uma redução significativa no número de iterações para soluções, complexas do ponto de vista analítico. Para o escoamento de um fluido em regime permanente em torno de um obstáculo, tal diminuição chegou a 84%. Por outro lado, o problema do equilíbrio dinâmico revelou um aumento do número de iterações para o aumento do parâmetro  $\omega$ .

Tanto o problema de flexo-compressão quanto o problema proposto de elasticidade linear convergiram mais rapidamente para a resposta exata com o parâmetro  $\omega$  valendo 1,8. Isso demonstra uma vantagem do método S.O.R. em relação ao Método de Gauss-Seidel. Além disso, quando se compara o problema de flexo-compressão com a resposta analítica, percebe-se que a resposta exata é suficientemente próxima daquela numérica, o que permite confirmar a eficiência do método, bem como uma boa ferramenta para agilizar as respostas de problemas de engenharia, podendo ser aplicado também a outros



---

métodos numéricos que encontram sistemas lineares, como o Método dos Elementos Finitos.

A utilização do Método das Diferenças Finitas, portanto, mostrou-se uma poderosa ferramenta para a resolução de equações diferenciais nos mais diversos campos da engenharia. A adoção de um método iterativo de solução também se mostrou vantajosa, dado o baixo número de iterações para a convergência e por não necessitar montar e inverter matrizes.



---

## REFERÊNCIAS

- Chapra, S. C.; Canale, R. P., 2015. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill.
- Clough, R. W., Penzien, J., 2003. *Dynamics of Structures*. Computers & Structures.
- Coda, H. B., 2017. *Mecânica dos Sólidos: Volume II*. EESC/USP.
- Costa, L. T.; Ribeiro, M. C. C., 2010. *Propriedades dinâmicas de fluidos por simulação computacional: métodos híbridos atômico-contínuo*. Química Nova, vol. 33, n. 4, pp. 938–944.
- Hibbeler, R.C., 2010. *Resistência dos Materiais*. Pearson Prentice Hall.
- Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., 1980. *Teoria da Elasticidade*. Guanabara 2.
- Valli, A. M. P., 2015. *Notas de aula de Algoritmos Numéricos I*. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES.
- White, R. E., 2003. *Computational Modeling with Methods and Analysis*. Department of Mathematics, North Carolina State University.
- Wrobel, L. C.; Eiger, S.; Rosman, P. C.; Tucci, C. E.; Cirillo, J. A.; & Cabral, J. P., 1989. *Métodos numéricos em recursos hídricos*. Associação Brasileira de Recursos Hídricos – ABRH, Rio de Janeiro. 380p.