



## MÉTODO SIMPLIFICADO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE EDIFÍCIOS DE CONCRETO ARMADO CONSIDERANDO DEFORMAÇÃO POR CISALHAMENTO NO MASTAN2

### Simplified method for geometric non-linear analysis of reinforced concrete buildings considering shear deformation in Mastan2

João Octávio de V. Martins (1); Marcos Antonio C. Rodrigues (2);  
Rodrigo Bird Burgos (3); Luiz Fernando Martha (4)

- (1) Estudante de Engenharia Civil., Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.  
(2) Msc.. Prof., Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.  
(3) Dr. Prof., Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, Brasil  
(4) Dr. Prof., Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, Brasil.  
Email para Correspondência: rodriguesma.civil@gmail.com; (P) Apresentador

**Resumo:** Neste trabalho foi implementado no software MASTAN2 um método simplificado, o método dos Dois Ciclos Iterativos, para análise não linear geométrica de estruturas considerando deformação por cisalhamento nos elementos. O objetivo deste estudo é fornecer uma ferramenta acadêmica para análise não linear de edifícios de concreto armado, utilizando o MASTAN2, com código aberto, servindo como recurso didático a níveis de graduação e pós-graduação. A influência da consideração da deformação por cisalhamento, assim como o método dos Dois Ciclos Iterativos na análise de edifícios de concreto armado, são avaliados com relação ao método simplificado,  $\gamma_z$ , indicado pela NBR 6118:2014 para análise não linear, e também com o método completo de Newton-Raphson.

*Palavras chaves:* Não-Linearidade Geométrica; Dois Ciclos Iterativos; Deformação por Cisalhamento; Programa Acadêmico; Código Livre.

**Abstract:** In this work, the Two Cycles iterative method, a simplified method for geometric nonlinear analysis was implemented on the MASTAN2 software, considering shear deformation in the elements. The objective of this study is to provide an academic tool for nonlinear analysis of reinforced concrete buildings using MASTAN2, with open source, serving as a didactic resource at undergraduate and graduate levels. The influence of shear deformation consideration, as well as the Two Cycles iterative method on the analysis of reinforced concrete buildings, are evaluated in relation to the simplified method,  $\gamma_z$ , suggested by NBR 6118: 2014 for nonlinear analysis, and with the complete method of Newton-Raphson.

**Keywords:** Geometric Nonlinearity; Two Cycles Iterative Method; Shear Deformation; Academic Software; Open Source.



## 1 INTRODUÇÃO

Um dos fatores mais importantes no projeto de edifícios altos de concreto armado é o seu comportamento com relação às cargas horizontais, sendo muitas vezes necessário realizar uma análise não linear da estrutura já que, devido ao seu deslocamento horizontal e a carga axial nos elementos, ocorre o efeito  $P-\Delta$ .

Para essa consideração pode-se utilizar como alternativa a métodos completos de análise não linear de estruturas (Newton-Raphson) ou análises aproximadas, tais como: Método da “Pseudo Carga” (Chen e Lui 1991, Silva 1996, Moncayo 2011) e o método dos “Dois Ciclos Iterativos” (Chen e Lui 1991, Silva M. F. et al. 2016), objeto de estudo deste trabalho. Estes métodos encontram-se disponíveis em programas comerciais como: TQS, SAP2000, Eberick, dentre outros (Junges et al. 2012). A norma brasileira de Projeto de Estruturas de Concreto (NBR 6118:2014) permite ainda calcular os esforços de segunda ordem utilizando o coeficiente  $\gamma_z$ .

Outro aspecto que influencia na análise é a teoria de flexão considerada. Segundo Burgos e Martha (2013), em análises modernas usualmente considera-se a deformação por cisalhamento (teoria de flexão de Timoshenko). Em elementos estruturais com baixo índice de esbelteza, essa consideração é ainda mais importante, conforme estudado por Silva J. L. et al. (2016).

Entretanto, Ziemian e McGuire (2008) explicitam que devido aos grandes avanços da computação gráfica e de *hardware*, os *softwares* comerciais estão cada vez mais fáceis de usar e com mais recursos. Porém, sua utilização como “caixa-preta” pode ser perigosa.

Ainda conforme Ziemian e McGuire (2008), para desencorajar esta prática no meio acadêmico foi desenvolvido o *software* MASTAN2 (McGuire et al. 2000). O MASTAN2 é um software livre e acadêmico para análise linear e não linear de estruturas de barras desenvolvido utilizando o *software* MATLAB. Além disso, uma das grandes contribuições do MASTAN2 é permitir que o usuário desenvolva suas próprias rotinas.

Além do mais, como auxílio no desenvolvimento do código, empregou-se a ferramenta CALFEM, “*Computer Aided Learning of the Finite Element Method*” (Austrell et al. 2004). Essa ferramenta foi desenvolvida para o ensino do método dos elementos finitos e combina as capacidades de pré e pós-processamento do MASTAN2.

Portanto, neste trabalho, desenvolveu-se uma ferramenta acadêmica para análise não linear de edifícios de concreto armado empregando o método dos Dois Ciclos Iterativos e considerando deformação por cisalhamento utilizando os recursos de pré e pós-processamento do MASTAN2.

## 2 TEORIA DE FLEXÃO DE TIMOSHENKO

As duas teorias de vigas mais difundidas para o comportamento à flexão são a teoria de Euler-Bernoulli e a teoria de vigas de Timoshenko, sendo que a diferença

básica entre estes dois modelos está na consideração ou não da distorção por cisalhamento.

Quanto à aplicabilidade, a hipótese de Timoshenko possui maior importância para elementos de pequena esbeltez, enquanto Euler-Bernoulli é comumente usada para elementos onde o comprimento longitudinal é predominante. Contudo, com o avanço nos métodos computacionais para a análise estrutural, constata-se que os programas de computador mais modernos consideram as deformações por cisalhamento, visto que o esforço computacional adicional requerido para tal é pequeno.

A teoria de vigas de Timoshenko adota a hipótese que as seções transversais permanecem planas, sem empenamento da seção. No entanto, diferentemente de Euler-Bernoulli, Timoshenko considera que o cisalhamento provoca uma deformação angular nas seções, fazendo com que tais não permaneçam ortogonais ao eixo da viga, conforme Figura 1. A rotação total da seção transversal ( $dv_0/dx$ ) é, portanto, dada pela soma da rotação devido à flexão  $\theta$  e a distorção por cisalhamento  $\gamma$ . Em suma, as formulações para a teoria de vigas de Timoshenko podem ser encontradas em (Reddy et al., 1997).

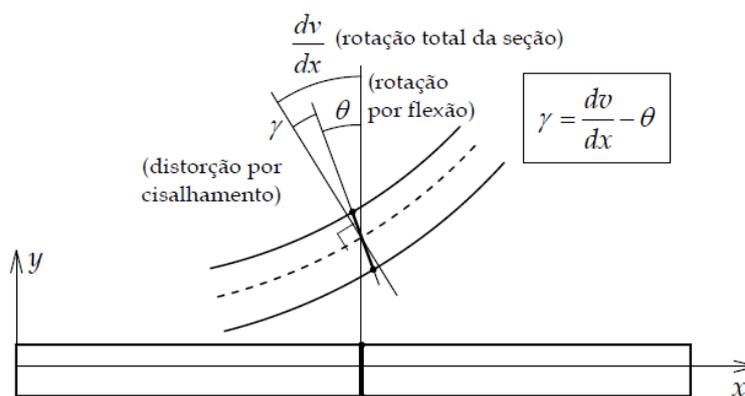


Figura 1. Consideração do cisalhamento na viga de Timoshenko.

Fonte: (Martha, 2015)

### 3 MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR

#### 3.1 Coeficiente $\gamma_z$

O coeficiente  $\gamma_z$  é um parâmetro indicado pela NBR 6118:2014 para a avaliação da importância dos esforços de segunda ordem globais em uma estrutura reticulada, sendo válido somente se a estrutura possuir no mínimo quatro andares. Segundo a norma, o coeficiente  $\gamma_z$  pode ser determinado a partir dos resultados de uma análise linear de primeira ordem, e seu valor é para pela expressão contida na Eq. (1):

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (1)$$

em que:

$M_{1,tot,d}$  é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura;

$\Delta M_{tot,d}$  é a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de 1ª ordem.

A NBR 6118:2014 diz que, se obedecida à condição  $\gamma_z \leq 1,1$ , a estrutura pode ser considerada como de nós fixos e é dispensável a consideração dos esforços globais de 2ª ordem. Em tais casos, só é necessário contemplar a análise de 2ª ordem para os efeitos locais (efeito P- $\delta$ ).

Se, porém,  $1,1 \leq \gamma_z \leq 1,3$ , a estrutura é classificada como de nós móveis, havendo então a obrigatoriedade de se considerar os efeitos da não linearidade geométrica nos esforços globais, para o dimensionamento.

Ainda, o coeficiente  $\gamma_z$ , além de um parâmetro para avaliar se a estrutura é de nós fixos ou móveis, também o indica como um coeficiente de majoração para uma análise de segunda ordem simplificada. Segundo a NBR 6118:2014, se  $\gamma_z \leq 1,3$  e as estruturas reticuladas possuem no mínimo quatro andares, pode-se obter os esforços globais de cálculo da estrutura a partir de uma simples análise de primeira ordem contendo uma majoração adicional dos esforços horizontais por  $0,95 \cdot \gamma_z$ .

### 3.2 Método dos Dois Ciclos Iterativos considerando a teoria de flexão de Timoshenko

Este artigo tem como enfoque a validação do método dos Dois Ciclos Iterativos para análises utilizando a abordagem da teoria de flexão de Timoshenko.

O método dos Dois Ciclos Iterativos (Chen et al., 1991) é uma solução simples para a realização de uma análise de segunda ordem. Isto porque o procedimento consiste em somente duas etapas: a realização de uma análise linear prévia e, em seguida, a realização de uma segunda análise, agora com a inclusão dos efeitos da não linearidade geométrica às matrizes de rigidez local dos elementos.

O método dos Dois Ciclos se inicia com uma análise linear da estrutura, através da resolução da Eq. (2) de equilíbrio.

$$[K] \cdot \{D\} = \{F\} \quad (2)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $\{D\}$  é o vetor de deslocamentos e  $\{F\}$  é o vetor de forças externas.

Para essa análise, considerando o efeito da deformação devido ao cisalhamento (teoria de flexão de Timoshenko), tem-se que a matriz de rigidez do elemento de barra no sistema de eixos locais é conforme dado pela Eq. (3).

$$[K]_l = \frac{1}{(12\Omega+1)} \begin{bmatrix} \frac{EA.(12\Omega+1)}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA.(12\Omega+1)}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA.(12\Omega+1)}{L} & 0 & 0 & \frac{EA.(12\Omega+1)}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Para:

$$\Omega = \frac{EI}{G \cdot A_c \cdot L} \quad (4)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia da seção transversal, A é a área da seção transversal, L o comprimento do elemento, G o módulo de elasticidade transversal e  $A_c$  a área da seção transversal corrigida.

Determinados os esforços globais através da análise de primeira ordem utilizando a matriz disposta na Eq. (3), deve-se incluir os efeitos da não linearidade geométrica às matrizes de rigidez locais de cada elemento. Isto é realizado com o acréscimo, à matriz de rigidez local, de uma matriz de rigidez geométrica, que se utiliza dos esforços axiais já obtidos na primeira análise. A matriz de rigidez geométrica considerando a teoria de flexão de Timoshenko (Burgos et al., 2013), pode ser adotada como disposta na Eq. (5).

$$[K]_g = \frac{P}{(12\Omega + 1)^2} * [S] \quad (5)$$

sendo P a força axial no elemento e [S] a matriz em (6):

$$\begin{bmatrix} \frac{(12\Omega + 1)^2}{L} & 0 & 0 & -\frac{(12\Omega + 1)^2}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{5L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L(90\Omega^2 + 15\Omega + 1)}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{-L(360\Omega^2 + 60\Omega + 1)}{12} \\ -\frac{(12\Omega + 1)^2}{L} & 0 & 0 & \frac{(12\Omega + 1)^2}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{5L} & \frac{-1}{10} & 0 & \frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{5L} & \frac{-1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{-L(360\Omega^2 + 60\Omega + 1)}{12} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L(90\Omega^2 + 15\Omega + 1)}{15} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Assim, pode-se montar a matriz de rigidez local atualizada, conforme Eq. (7), e recalculer os esforços globais em cada barra, agora considerando os efeitos de não linearidade geométrica. Tal se dá através de uma nova análise de primeira ordem, agora utilizando a matriz  $[K]_{l,atualizada}$ .

$$[K]_{l,atualizada} = [K]_l + [K]_g \quad (7)$$

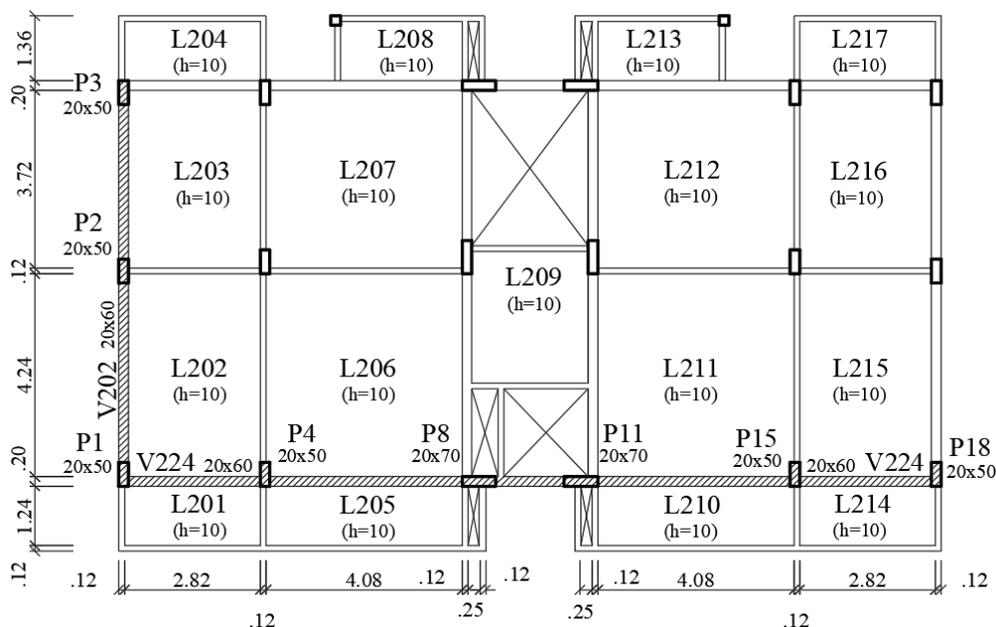
## 4 APLICAÇÃO NUMÉRICA

O elemento implementado no programa MASTAN2, considera deformação por cisalhamento e realiza análise não linear geométrica empregando o método dos Dois Ciclos Iterativos. O elemento foi aplicado para análise não linear de edifícios de concreto armado, conforme aplicação numérica apresentada, considerando a não linearidade física.

### 4.1 Apresentação da Aplicação

Para a análise não linear geométrica de edifícios de concreto considerando a deformação por cisalhamento, utilizou-se da adaptação de dois pórticos planos estudados por Araújo (2014) como subestruturas de contraventamento do edifício modelo desenvolvido pelo autor.

O edifício modelo analisado por Araujo (2014) é composto de um pavimento térreo, oito pavimentos tipo e um pavimento telhado/casa de máquinas. Além disso, em todo o edifício foi utilizado concreto de classe C25, isto é, com  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$  aos 28 dias. A Figura 2 apresenta o pavimento tipo do edifício.



**Figura 2. Planta de formas do pavimento tipo do edifício modelo.**

Fonte: Adaptado de (Araújo, 2014)

Os pórticos planos analisados foram o pórtico do pilar P1 a P3 e o pórtico do pilar P18 a P1. Para as cargas do pavimento, de acordo com Araújo (2014), estimou-se uma carga de  $12 \text{ kN/m}^2$  para as lajes dos pavimentos tipo e  $10 \text{ kN/m}^2$  para a laje do telhado/casa de máquinas. Além disso, realizou-se uma área de influência simplificada para estimar a carga recebida em cada nó do pórtico plano. Por fim, os carregamentos

horizontais são idênticos aos utilizados por Araújo (2009). Os pórticos de contraventamento na direção X e Y são apresentados na Figura 3.

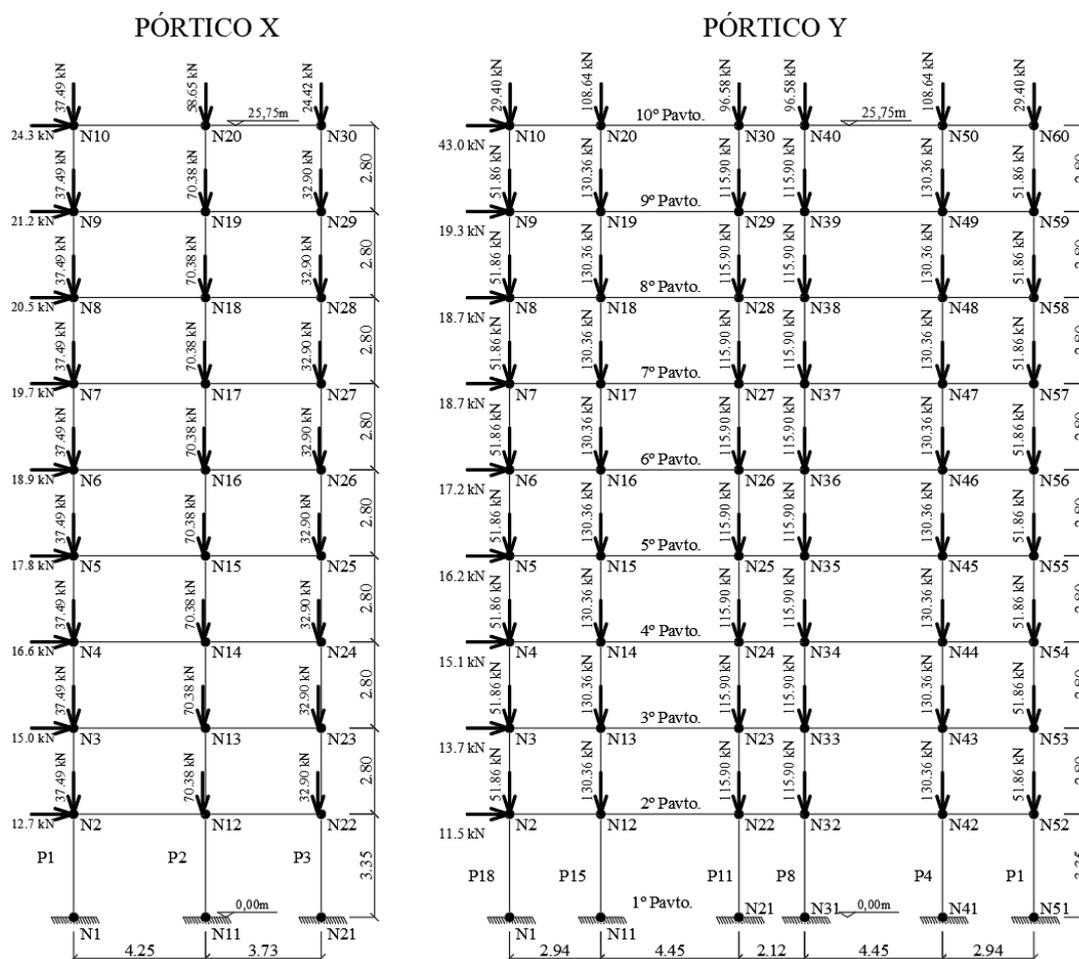


Figura 3. Pórticos X e Y de contraventamento e seus carregamentos.

Para a presente aplicação, encontrou-se o valor do módulo de elasticidade inicial,  $E_{ci}$ , conforme recomendação da NBR 6118:2014, diferentemente de Araújo (2009), que seguiu o adotado pelo *Comité Euro-International Du Béton* (CEB/90). Além disso, utilizou-se, também, o coeficiente de redução de rigidez decorrente da não linearidade física conforme a NBR 6118:2014, separando os coeficientes dos pilares e das vigas para a obtenção do módulo de deformação secante. As propriedades do concreto utilizadas são conforme Tabela 1.

**Tabela 1. Propriedades dos materiais**

Elemento	fck (MPa)	$\alpha_E$	$E_{ci}$ (MPa)	$(EI)_{sec} = coef * E_{ci} * I_c$	
				Coef.	$E_{sec}$ (MPa)
Pilares	25	1,0	28000	0,8	22400
Vigas	25	1,0	28000	0,4	11200

## 4.2 Verificação da Indeslocabilidade da Estrutura

Para a verificação da indeslocabilidade dos pórticos X e Y, utilizou-se o critério da NBR 6118:2014 baseado no coeficiente  $\gamma_z$ . A verificação seguiu os mesmos moldes da realizada por Araújo (2014), sendo os momentos de tombamento equivalentes aos utilizados pelo autor. Além disso, visto que a verificação de Araújo (2014) para a indeslocabilidade utilizou os mesmo carregamentos verticais admitidos nesta aplicação, os valores das resultantes das forças verticais de cálculo também são equivalentes às utilizadas por Araújo (2014). Assim, resta de diferente somente o deslocamento médio para cada pórtico.

Tem-se, então, para o Pórtico X:

$$M_{1tot,d} = 1,4 \sum F_x \bar{z}_i = 1,4 \times 8368 = 11715 \text{ kNm} \quad (8)$$

$$P_{tot,d} = 1,3 \times 19500 = 25350 \text{ kN} \quad (9)$$

Assim, conforme Eq. (1), o  $\gamma_z$  para o Pórtico X será determinado por:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{25350 \times U}{11715}} \quad (10)$$

Para os novos parâmetros de módulo de elasticidade, o pórtico X apresentou os resultados de  $\gamma_z$  conforme a Tabela 2, para as análises conforme a abordagem de Euler-Bernoulli, utilizada por Araújo, e Timoshenko, alvo de estudo deste artigo.

**Tabela 2.  $\gamma_z$  obtido para o Pórtico X.**

EULER-BERNOULLI		TIMOSHENKO	
Desloc. Médio (U)	0,0426 metros	Desloc. Médio (U)	0,0462 metros
$\gamma_z$	1,10	$\gamma_z$	1,11

Percebe-se que, utilizando a abordagem de Euler-Bernoulli, obtém-se que  $\gamma_z \leq 1,10$  e, portanto, classifica-se a estrutura, segundo a NBR 6118:2014, como estrutura de nós fixos. Assim, considera-se que os deslocamentos dos nós são pequenos e não introduzem esforços globais de segunda ordem significativos, podendo-se analisar tal estrutura dispensando-se a não linearidade geométrica e atendo-se aos resultados dos esforços globais obtidos pela análise teoria de primeira ordem. Após, os elementos



comprimidos devem ser considerados isoladamente, contemplando os efeitos locais de segunda ordem.

Porém, caso seja utilizada a abordagem de Timoshenko, obtém-se que  $\gamma_z = 1,11$ , valor um pouco superior a 1,10. Por uma análise rigorosa da norma, tem-se  $1,10 < \gamma_z \leq 1,30$  e, portanto, a estrutura é classificada como uma estrutura de nós móveis, requerendo uma análise de segunda ordem para determinação de esforços globais.

De forma semelhante, para o pórtico Y, tem-se que:

$$M_{1tot,d} = 1,4 \Sigma F_x \bar{z}_l = 1,4 \times 5550 = 7770 \text{ kNm} \quad (11)$$

$$P_{tot,d} = 1,3 \times 19500 = 25350 \text{ kN} \quad (12)$$

Com isso, há o resultado conforme Tabela 3.

**Tabela 3.  $\gamma_z$  obtido para o Pórtico Y.**

<b>EULER-BERNOULLI</b>		<b>TIMOSHENKO</b>	
Desloc.	0,0255	Desloc.	0,0274
Médio (U)	metros	Médio (U)	metros
$\gamma_z$	1,09	$\gamma_z$	1,10

Repara-se que, para o Pórtico Y, ambas as abordagens fornecem uma estrutura classificada como de nós fixos, não sendo obrigatória a análise de segunda ordem para determinação dos esforços globais. Porém, a título de comparação, opta-se por realizar a análise de segunda ordem e comparar com os resultados obtidos, caso fosse utilizada simplesmente a análise linear pela abordagem de Timoshenko ou pela abordagem de Euler-Bernoulli.

### 4.3 Análise do Pórtico X

Para a análise de segunda ordem do Pórtico X, será realizada a comparação dos esforços globais fornecidos pelo método dos Dois Ciclos Iterativos que foi implementado no programa MASTAN2, fonte de estudo deste artigo, com os resultados obtidos utilizando o método de Newton-Raphson através do MASTAN2, bem como a comparação com a análise indicada pela norma, que sugere a simples majoração dos esforços horizontais por  $0,95\gamma_z$ . Além disso, compara-se com os resultados que seriam obtidos caso fosse escolhida a análise linear de Euler-Bernoulli.

Ressalta-se que, uma vez que o objetivo desta análise é a comparação entre os resultados obtidos pelos métodos supracitados e não o dimensionamento da estrutura, não foi considerado a aplicação de coeficientes de ponderação nos carregamentos verticais e horizontais. Além disso, para as análises, todas as barras foram discretizadas em dez elementos.

A seguir, são apresentados os resultados dos esforços globais obtidos em cada método, para o Pilar P2, até o 5º pavimento. As Tabelas 4, 5 e 6 apresentam os esforços considerando a teoria de flexão de Timoshenko, enquanto a tabela 7 considera apenas a análise linear e a teoria de flexão de Euler-Bernoulli.

**Tabela 4. Esforços globais apresentados no pórtico X - Método simplificado da NBR 6118:2014.**

PILAR P2 - MÉTODO NBR 6118:2014				
Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	11	497,15	68,87	138,76
	12	-497,15	-68,87	91,95
3	12	440,78	78,38	111,63
	13	-440,78	-78,38	107,82
4	13	386,00	69,30	95,05
	14	-386,00	-69,30	98,98
5	14	331,33	61,39	83,46
	15	-331,33	-61,39	88,45

**Tabela 6. Esforços globais apresentados no pórtico X - Método de Newton-Raphson**

PILAR P2 - MÉTODO N.R.				
Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	11	498,53	65,58	133,63
	12	-498,44	-66,31	88,85
3	12	441,72	75,48	107,98
	13	-441,71	-75,52	104,34
4	13	386,63	66,71	91,78
	14	-386,64	-66,67	95,66
5	14	331,72	59,01	80,41
	15	-331,73	-58,97	85,31

**Tabela 5. Esforços globais apresentados no pórtico X - Método dos Dois Ciclos Iterativos .**

PILAR P2 - MÉTODO DOIS CICLOS				
Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	11	498,59	65,30	133,63
	12	-498,59	-65,30	88,86
3	12	441,89	74,57	107,99
	13	-441,89	-74,57	104,35
4	13	386,79	65,90	91,79
	14	-386,79	-65,90	95,67
5	14	331,84	58,37	80,41
	15	-331,84	-58,37	85,31

**Tabela 7. Esforços globais apresentados no pórtico X - Método linear usando a abordagem de Euler-Bernoulli**

PILAR P2 - LINEAR EULER-BERNOULLI				
Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	11	494,00	65,50	131,00
	12	-494,00	-65,50	88,90
3	12	438,00	75,00	107,00
	13	-438,00	-75,00	103,00
4	13	384,00	65,90	90,50
	14	-384,00	-65,90	94,10
5	14	329,00	58,50	79,70
	15	-329,00	-58,50	84,00

Verifica-se que todos os métodos produzem resultados próximos, sendo que a maior disparidade ocorre, para o esforço normal, quando se compara o método linear de Euler-Bernoulli com os demais métodos. Além disso, o método da NBR 6118:2014 provém esforços cortantes e o momentos fletores ligeiramente superiores aos demais.

Por sua vez, repara-se a quase equivalência dos resultados fornecidos pelo método dos Dois Ciclos Iterativos e o método de Newton-Raphson, havendo somente uma pequena divergência quanto ao esforço cortante no pilar. Por conseguinte, tem-se resultados bastante satisfatórios para a verificação da análise não-linear utilizando o procedimento dos Dois Ciclos Iterativos e teoria de flexão de Timoshenko.

Todas essas afirmações acima são melhores visualizadas com as tabelas 8 a 10, que demonstram a variação dos resultados do método dos Dois Ciclos Iterativos considerando deformação por cisalhamento quando comparados com as demais análises.

**Tabela 8. Comparação dos esforços globais no pórtico X - Dois Ciclos Iterativos x NBR 6118:2014**

Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	1	0,29%	-5,18%	-3,70%
	2	0,29%	-5,18%	-3,36%
3	2	0,25%	-4,85%	-3,26%
	3	0,25%	-4,85%	-3,22%
4	3	0,20%	-4,90%	-3,43%
	4	0,20%	-4,90%	-3,35%
5	4	0,15%	-4,92%	-3,65%
	5	0,15%	-4,92%	-3,54%
<b>Variação Média Absoluta:</b>		0,23%	4,97%	3,44%

**Tabela 9. Comparação dos esforços globais no pórtico X - Dois Ciclos Iterativos x Newton-Raphson**

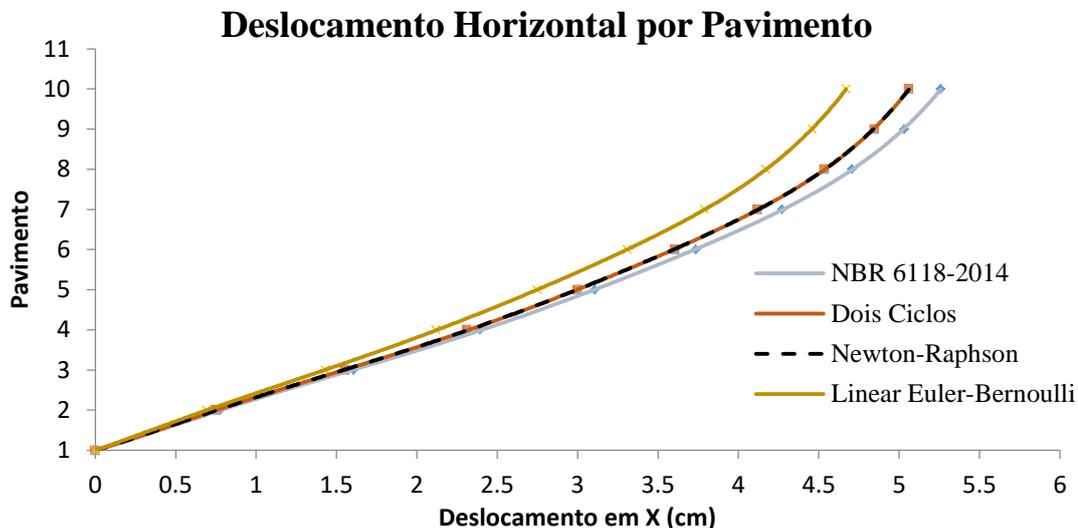
Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	1	0,01%	-0,42%	0,00%
	2	0,03%	-1,52%	0,01%
3	2	0,04%	-1,20%	0,01%
	3	0,04%	-1,25%	0,01%
4	3	0,04%	-1,21%	0,01%
	4	0,04%	-1,15%	0,01%
5	4	0,04%	-1,08%	0,01%
	5	0,03%	-1,01%	0,01%
<b>Variação Média Absoluta:</b>		0,03%	1,11%	0,01%

**Tabela 10. Comparação dos esforços globais no pórtico X – Dois Ciclos Iterativos vs E.B.**

Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	1	0,93%	-0,31%	2,01%
	2	0,93%	-0,31%	-0,04%
3	2	0,89%	-0,57%	0,93%
	3	0,89%	-0,57%	1,31%

Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
4	3	0,73%	0,00%	1,42%
	4	0,73%	0,00%	1,67%
5	4	0,86%	-0,22%	0,89%
	5	0,86%	-0,22%	1,56%
<b>Var. Média Absoluta:</b>		0,85%	0,27%	1,23%

Ademais, compara-se os deslocamentos horizontais apresentados por cada método na Figura 4. Nota-se que o método linear de Euler-Bernoulli apresentou os menores deslocamentos, seguido dos métodos dos Dois Ciclos e de Newton-Raphson, que apresentaram resultados idênticos, sendo o método simplificado sugerido pela NBR 6118:2014 aquele que resultou nos maiores deslocamentos horizontais do pórtico plano.



**Figura 4. Deslocamento horizontal do pórtico X.**

#### 4.4 Análise do Pórtico Y

Para a análise do pórtico Y, foram realizados procedimentos semelhantes aos realizados para o pórtico X. Porém, como o pórtico Y apresentou  $\gamma_z \leq 1,10$ , não é fundamental a realização de uma análise não linear. Assim, realizou-se uma análise linear com a abordagem de Timoshenko, análise linear com a abordagem de Euler-Bernoulli e, para efeito de comparação, as análises não lineares de Newton-Raphson e dos Dois Ciclos Iterativos, ambas com a teoria de flexão de Timoshenko.

A seguir, têm-se os esforços globais obtidos para o pilar P11 até o 5º pavimento, bem como a variação destes, quando comparados com a análise linear de Timoshenko.

**Tabela 11. Esforços globais apresentados no pórtico Y - Método linear com a abordagem de Timoshenko**

PILAR P11 - LINEAR TIMOSHENKO				
Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	21	829,00	70,20	166,00
	22	-829,00	-70,20	68,80
3	22	783,00	54,50	77,70
	23	-783,00	-54,50	74,90
4	23	723,00	49,60	67,30
	24	-723,00	-49,60	71,70
5	24	650,00	44,60	58,60
	25	-650,00	-44,60	66,40

**Tabela 12. Esforços globais apresentados no pórtico Y - Método dos Dois Ciclos Iterativos**

PILAR P11 - MÉTODO DOIS CICLOS				
Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	21	818,00	72,10	173,00
	22	-818,00	-72,10	71,60
3	22	776,00	56,00	81,70
	23	-776,00	-56,00	78,70
4	23	719,00	50,70	70,10
	24	-719,00	-50,70	75,20
5	24	648,00	45,40	60,70
	25	-648,00	-45,40	69,20

**Tabela 13. Esforços globais apresentados no pórtico Y - Método de Newton-Raphson**

PILAR P11 - MÉTODO NEWTON-RAPHSON				
Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	21	818,00	72,30	173,00
	22	-818,00	-73,30	71,60
3	22	775,00	57,10	81,60
	23	-775,00	-57,10	78,70
4	23	719,00	51,80	70,10
	24	-719,00	-51,70	75,20
5	24	648,00	46,30	60,70
	25	-648,00	-46,30	69,20

**Tabela 14. Esforços globais apresentados no pórtico Y - Método linear com a abordagem de Euler-Bernoulli**

PILAR P11 - LINEAR EULER-BERNOULLI				
Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	21	810,00	71,20	164,00
	22	-810,00	-71,20	74,30
3	22	774,00	56,00	79,80
	23	-774,00	-56,00	76,90
4	23	720,00	50,90	69,70
	24	-720,00	-50,90	72,70
5	24	651,00	45,60	60,80
	25	-651,00	-45,60	67,00

**Tabela 15. Comparação dos esforços globais no pórtico Y – Linear Timoshenko x Dois Ciclos Iterativos**

Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	1	1,34%	-2,64%	-4,05%
	2	1,34%	-2,64%	-3,91%
3	2	0,90%	-2,68%	-4,90%
	3	0,90%	-2,68%	-4,83%
4	3	0,56%	-2,17%	-3,99%
	4	0,56%	-2,17%	-4,65%
5	4	0,31%	-1,76%	-3,46%
	5	0,31%	-1,76%	-4,05%
<b>Var. Média Absoluta:</b>		0,78%	2,31%	4,23%

**Tabela 17. Comparação dos esforços globais no pórtico Y – Linear Timoshenko x Newton-Raphson**

Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	1	-1,34%	2,90%	4,05%
	2	-1,34%	4,23%	3,91%
3	2	-1,03%	4,55%	4,78%
	3	-1,03%	4,55%	4,83%
4	3	-0,56%	4,25%	3,99%
	4	-0,56%	4,06%	4,65%
5	4	-0,31%	3,67%	3,46%
	5	-0,31%	3,67%	4,05%
<b>Var. Média Absoluta:</b>		0,81%	3,99%	4,21%

**Tabela 18. Comparação dos esforços globais no pórtico Y – Linear Timoshenko x Linear de Euler-Bernoulli**

Pavto.	Nó	Normal (kN)	Cortante (kN)	Fletor (kN.m)
2	1	-2,35%	1,40%	-1,22%
	2	-2,35%	1,40%	7,40%
3	2	-1,16%	2,68%	2,63%
	3	-1,16%	2,68%	2,60%
4	3	-0,42%	2,55%	3,44%
	4	-0,42%	2,55%	1,38%
5	4	0,15%	2,19%	3,62%
	5	0,15%	2,19%	0,90%
<b>Variação Média Absoluta:</b>		0,94%	2,21%	2,90%

Novamente, os resultados são bem consistentes, sendo que não há quase nenhuma divergência entre os valores fornecidos por Newton-Raphson e pelo método dos Dois Ciclos Iterativos considerando a teoria de flexão de Timoshenko.

Além disso, tem-se também a análise dos deslocamentos horizontais do pórtico Y, conforme Figura 5. Repara-se que, novamente, os métodos não lineares apresentam resultados idênticos. Além do mais, tais são maiores que os deslocamentos apresentados pelas duas abordagens lineares.

Observa-se, também, que os esforços não lineares, em ambos os pórticos X e Y, apresentam uma diferença menor que 10% dos esforços lineares, em ambos os exemplos, o que justificaria considerar tais estruturas de nós rígidos. Por outro lado, verifica-se que existem acréscimos nos deslocamentos e esforços ao se considerar a teoria de flexão de Timoshenko, o que comprovaria o porquê de muitos programas comerciais já utilizarem a teoria.

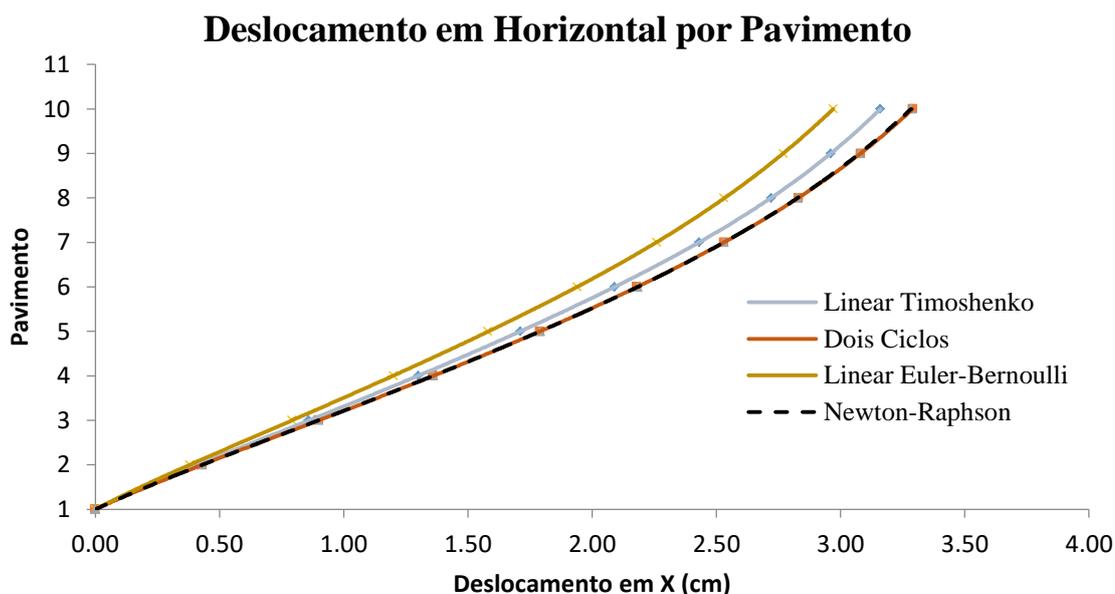


Figura 5. Deslocamento horizontal do pórtico Y.

Por fim, ressalta-se que a análise não linear utilizando o método dos Dois Ciclos Iterativos considerando a deformação por cisalhamento apresentou resultados satisfatórios.



## 5 CONCLUSÃO

Conforme os resultados apresentados, evidencia-se que as aplicações numéricas mostraram a influência existente ao se considerar a teoria de flexão de Timoshenko na análise de edifícios de concreto armado.

Além disso, os resultados também evidenciam a proximidade entre o método dos Dois Ciclos Iterativos e o método de Newton-Raphson, com a abordagem da teoria de flexão de Timoshenko, para os níveis de carga de serviços aplicados. Essa conclusão é de grande valia, visto que a análise não linear completa muitas vezes é complexa e demanda alto esforço computacional.

Assim, ao se constatar que o método dos Dois Ciclos Iterativos descreve bem estruturas com reduzida não linearidade, inclusive para análises com a abordagem da teoria de flexão de Timoshenko, permite-se que estudantes e engenheiros elaborem com facilidade seus próprios programas computacionais que realizem a análise de estruturas de concreto armado, e que contemplem a deformação por cisalhamento. Assim, contribui-se para um entendimento inicial de uma análise não linear e se fornece uma solução de baixa demanda computacional para tal.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela FAPERJ.

## REFERÊNCIAS

- ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. 2014. NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento. Rio de Janeiro – RJ, ABNT.
- Araújo, J. M. 2009. Projeto Estrutural de Edifícios de Concreto Armado. Rio Grande – RS, Editora Dunas, 2 ed.
- Austrell, P. E., Dahlblom, O., Lindemann, J., Olsson, A., Olsson, K., Persson, K., Petersson, H., Ristinmaa, M., Sandberg, G., Wernberg, P. 2004. CALFEM - Computer Aided Learning of the Finite Element Method. *Division of Structural Mechanics at Lund University – Sweden*.
- Burgos, R. B., Martha, L. F. C. R. 2013. Exact Shape Functions and Tangent Stiffness Matrix for the Buckling of Beam-Columns Considering Shear Deformation. *XXXIV Iberian Latin American Congress On Computational Methods In Engineering (CILAMCE 2013)*.



- Chen, W. F., Lui, E.M., 1991. Stability Design of Steel Frames. *CRC Press*.
- Junges, E., Rovere, H. L., Loriggio, D. D. 2012. Análise de Segunda Ordem Global de Estruturas de Concreto Armado Utilizando Programas Computacionais de Dimensionamento. *54º Congresso Brasileiro do Concreto (CBC2012)*.
- Martha, L. F. C. R., Burgos, R. B. 2015. Possíveis Inconsistências na Consideração da Distorção por Cisalhamento numa Viga Submetida a Carregamento Axial. *57º Congresso Brasileiro do Concreto (CBC2015)*.
- McGuire, W., Gallagher, R.H., Ziemian, R.D., 2000. Matrix Structural Analysis. *John Wiley & Sons*.
- Moncayo, Z., Junior, Winston. 2011. Análise de Segunda Ordem Global em Edifícios com Estrutura de Concreto Armado. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Carlos.
- Reddy, J. N., Wang, C. M., Lee, K. H., 1997. Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. *International Journal of Solids and Structures*, v. 34, n. 26, p. 3373-3384.
- Silva, J. L., Lemes, I. J. M., Silveira, R. A. M., Silva A. R. D. 2016. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. *XXXVII Iberian Latin American Congress On Computational Methods In Engineering (CILAMCE 2016)*.
- Silva, M. F. D. S., Menezes, I. F. M., Martha, L. F. 2016. Um método simplificado para análise não-linear geométrica no Ftool. *XXXVII Iberian Latin American Congress On Computational Methods In Engineering (CILAMCE 2016)*.
- Silva, R. M. 1996. Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado: Modelagem Numérica e Avaliação dos Métodos Aproximados. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo - SP.
- Ziemian, R., McGuire, W. 2008. MASTAN2, educational analysis software for the 21st century. *6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures*.