



**O MÉTODO SORM DG E SUAS APLICAÇÕES NA ANÁLISE DE
CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA**
**THE SORM DG METHOD AND ITS APPLICATIONS IN THE STRUCTURAL
RELIABILITY ANALYSIS OF ENGINEERING PROBLEMS**

Emmanoel Guasti Ferreira (1); Marcílio Sousa da Rocha Freitas (2); José Antônio da Rocha Pinto (3); Geraldo Rossoni Sisquini (4)

(1) Dr. Prof., Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto - MG, Brasil.

(3) MSc. Prof., Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

(4) Dr. Prof., Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil.

Email para Correspondência: egfl@bol.com.br; (P) Apresentador

Resumo. O método semianalítico SORM DG (Second Order Reliability Method by Differential Geometry) realiza a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem utilizando as curvaturas principais da superfície de estado limite (SEL). Foram analisados dois exemplos de SEL, cujos resultados fornecidos via geometria diferencial para as curvaturas principais, no ponto de projeto (V^*), foram exatos. Além disso, os resultados obtidos para o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha do método semianalítico FORM (First Order Reliability Method) foram otimizados pelo método semianalítico SORM DG, em relação aos resultados fornecidos pela literatura, via Simulação Monte Carlo Simples e o Método de Integração Numérica. Esses resultados foram comparados, também, em termos de acurácia e eficiência com os fornecidos pelo método semianalítico SORM (Second Order Reliability Method) convencional, sendo que o método semianalítico SORM DG apresentou resultados acurados em termos de análise de confiabilidade, além de ser mais eficiente que o método semianalítico SORM convencional, sem prejuízo de acurácia.

Palavras chaves: FORM; SORM; SORM DG; Curvaturas principais; Geometria diferencial.

Abstract: The second Order Reliability Method by Differential Geometry (SORM DG) performs second-order structural reliability analysis using the principal curves of the boundary surface. Two examples of SEL were analyzed, the results provided by differential geometry for the main curvatures, at the design point (V^*), were accurate. In addition, the results obtained for the reliability index and the probability of failure of the First Order Reliability Method (SEM) were optimized by the SORM DG semi-analytical method, in relation to the results provided by the literature, via Simple Monte Carlo Simulation and Method of Numerical Integration. These results were also compared in terms of accuracy and efficiency with those provided by the conventional Second Order Reliability Method (SORM), and the semianalytical SORM DG method presented accurate results in terms of reliability analysis, in addition to being more efficient than the conventional SORM semianalytical method, without prejudice to accuracy.

Keywords: FORM; SORM; SORM DG; Main curvatures; Differential geometry.



1. INTRODUÇÃO

Muitas das variáveis envolvidas nos projetos de engenharia são aleatórias, ou seja, os seus parâmetros possuem incertezas. A presença dessas incertezas é, geralmente, tratada com o uso do fator global de segurança, segundo a abordagem tradicional do método das tensões admissíveis. Esse fator de segurança é selecionado com base na experiência passada ou em regras gerais práticas e não reflete as incertezas dos parâmetros subjacentes individuais nem a sua estrutura de correlação. Essas limitações podem ser superadas através de projetos baseados em confiabilidade, nos quais a segurança de uma estrutura é descrita por um índice de confiabilidade ao invés do fator de segurança. O índice de confiabilidade é capaz de explicar as incertezas e as correlações paramétricas e fornece um caminho para estimar a probabilidade de falha da estrutura e dos seus componentes.

Devido à sua maior simplicidade e eficiência, o FORM, que realiza uma aproximação linear, através de um hiperplano, à superfície de estado limite (SEL), tem sido amplamente usado em análises de confiabilidade. Entretanto, a linearização inerente ao FORM introduz erros em muitos casos e por isso o SORM tem sido empregado como alternativa (Zeng et al., 2016).

As aplicações do SORM, em problemas de engenharia, por Cho (2009), Lu et al. (2011 e 2012), Chan e Low (2012) e Zeng. et al. (2014, 2015, 2016 e 2017), nos últimos anos, sugerem um interesse relevante pelo SORM e, portanto, há muito espaço para novas pesquisas nessa área, sendo o principal desafio calcular as curvaturas principais da SEL, que envolve muita complexidade matemática e esforço computacional.

O SORM DG, que visa melhorar os resultados do FORM de maneira mais eficiente que o SORM convencional, sem prejuízo na acurácia dos resultados, pode ser considerado, então, como uma contribuição de utilidade para a engenharia. Para que o SORM DG realize a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem é necessário que o FORM forneça as coordenadas do ponto de máxima densidade local de probabilidade (ponto de projeto) e que as curvaturas principais da SEL sejam calculadas nesse ponto, através de geometria diferencial. Devido a isso, está desenvolvido neste artigo um procedimento analítico de cálculo dessas curvaturas no espaço multidimensional (espaço R^{n+1}), onde n é o número de variáveis aleatórias da função da SEL (função de falha) envolvidas na análise.

Para muitos problemas de engenharia a função da SEL é trabalhosa para ser avaliada e as derivadas analíticas não existem (Du, 2005). Nesse caso, levando em conta essa característica dos problemas de engenharia, as derivadas são calculadas pelo método das diferenças finitas. Devido a este fato, neste artigo, todas as derivadas parciais necessárias para solução das avaliações das probabilidades de falha de primeira e segunda ordem foram calculadas, via software MATLAB (Lee, 2018), pelo método das diferenças finitas.

Basicamente os diversos métodos existentes para avaliação da probabilidade de falha podem ser divididos em quatro categorias:

- a) Métodos de Integração Numérica;
- b) Simulação Monte Carlo (SMC) ou Método Monte Carlo e suas variações;



- c) Métodos semianalíticos FORM, SORM convencional e, no caso em tela, o SORM DG;
 d) Métodos Híbridos.

Serão apresentados, via software MATLAB (Lee, 2018), somente os cálculos do SORM DG e do FORM, que realiza a análise de confiabilidade estrutural de primeira ordem, tendo em vista que fornece ao SORM DG as coordenadas do ponto de projeto (V^*). Já os resultados do SORM convencional foram fornecidos pela literatura, bem como os da Simulação Monte Carlo Simples (SMCS) e do Método de Integração Numérica (MIN), que são utilizados apenas como referência.

2. REVISÃO DO FORM E DO SORM CONVENCIONAL

Nesta Seção, além da revisão do FORM e do SORM convencional, são comentados os métodos tradicionais usados para calcular as soluções do FORM e da matriz Hessiana. A análise de confiabilidade do SORM convencional, baseada nesses métodos, também é discutida, além de sua eficiência. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências Madsen et al. (2006), Ditlevsen e Madsen (2007), Melchers e Beck (2018).

2.1 Análise de confiabilidade estrutural de primeira ordem

No FORM a probabilidade de falha de primeira ordem é obtida através de transformações das variáveis aleatórias originais (U) do espaço U (espaço original), da função da SEL $G(U)=0$, em variáveis aleatórias reduzidas (ou normais padrão) estatisticamente independentes V do espaço V (espaço normal padrão, espaço reduzido ou espaço das variáveis reduzidas), cuja função da SEL ($g(V)=0$) é aproximada por um hiperplano e o índice de confiabilidade (β) é interpretado como a distância mínima em relação à origem para a referida superfície no espaço normal padrão e o mais provável ponto de falha (ponto de maior densidade local de probabilidade), denominado ponto de projeto (V^*), é procurado usando métodos matemáticos de programação.

A probabilidade de falha fornecida pelo FORM, utilizando as propriedades da distribuição normal multidimensional padrão, é dada por (Madsen et al., 2006):

$$P_f = \int_F f_u(U) du = \int_F f_v(V) dv = \Phi(-\beta) \quad (1)$$

onde, F indica o domínio de falha, $f_u(U)$ é a função densidades de probabilidades conjunta de U , $f_v(V)$ é a função densidades de probabilidades conjunta de V e Φ é a distribuição cumulativa normal padrão de probabilidades.

De acordo com Madsen et al. (2006), o índice de confiabilidade se relaciona ao ponto de projeto através das Equações 2 e 3:

$$\beta = \|V^*\| \quad (2)$$

$$\alpha^* = \frac{\nabla g(V^*)}{\|\nabla g(V^*)\|} = -\frac{V^*}{\beta} \quad (3)$$

onde, α^* é o vetor normal unitário à SEL no ponto V^* e $\|\nabla g(V^*)\|$ é a norma do gradiente da SEL no espaço reduzido (espaço V), no referido ponto, como ilustrado na Figura 1:

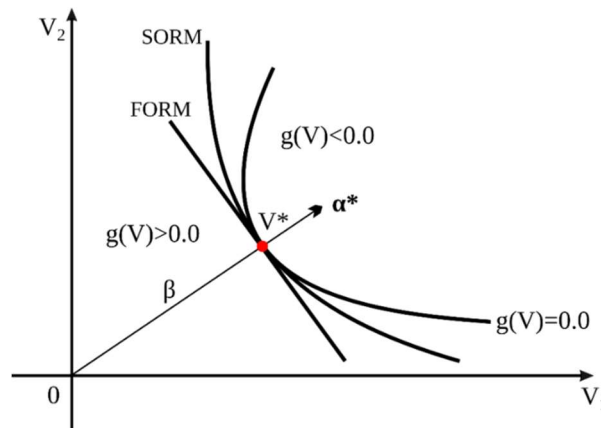


Figura 1. Aproximação de $g(V)=0$ realizada via FORM e SORM no espaço bidimensional
Fonte: Adaptado de Sagrilo (1994).

2.2 Análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem via SORM convencional

Com a finalidade de melhorar a aproximação, ilustrada na Figura 1, da probabilidade de falha calculada pelo FORM, o SORM convencional foi estabelecido e avalia a probabilidade de falha de segunda ordem usando as coordenadas (calculadas pelo FORM) do ponto de projeto (V^*) aproximando um hiperparabolóide à SEL no ponto V^* . Além disso, necessita, também, do cálculo da matriz Hessiana no ponto V^* , realizando em seguida rotação de suas coordenadas, a fim de que sejam obtidas as curvaturas principais do hiperparabolóide aproximado à SEL nesse ponto, considerando-as como se fossem iguais às curvaturas principais da SEL no referido ponto.

A fim de resolver a Equação 1, foi usado nos exemplos apresentados o FORM com o algoritmo HL–RF (FORM HL–RF), tendo em vista que de acordo com Sagrilo (1994) é o método de primeira ordem mais frequentemente utilizado.

Para medir a eficiência computacional, segundo Zeng et al. (2016), usa-se o número de avaliações da função da SEL (NAF), necessárias em cada análise, porque o esforço computacional exigido por outras partes do algoritmo é muitas vezes insignificante, quando comparado com o NAF , principalmente quando métodos numéricos trabalhosos (como diferenças finitas) estão envolvidos. Assim, o NAF pode ser usado como indicador geral de eficiência computacional em problemas reais da área de engenharia, ou seja, maior NAF indica menor eficiência e vice e versa.

No caso do FORM (HL–RF), quando as coordenadas do gradiente da função $G(U)=0$ forem calculadas pelo método das diferenças finitas, serão necessárias $n+1$ avaliações da função $G(U)=0$ para cada iteração (i) no algoritmo (HL–RF) de busca do ponto de projeto



no espaço original (\mathbf{U}^*), ou seja, o número de avaliações da função da SEL para o FORM (HL–RF) é:

$$NAF_{\text{FORM}} = i(n+1) \quad (4)$$

2.3 Cálculo da matriz Hessiana

Antes de calcular a probabilidade de falha de segunda ordem, as variáveis \mathbf{V} do espaço V devem ser transformadas, por meio de rotação, para o espaço normal padrão \mathbf{Y} usando uma transformação ortogonal

$$\mathbf{Y} = \mathbf{R} \mathbf{V} \quad (5)$$

onde, \mathbf{R} é uma matriz de rotação ortogonal, com dimensão $n \times n$, cuja última coluna contém as coordenadas do vetor normal unitário (\mathbf{a}^*) à SEL, e pode ser obtida através de um processo de ortogonalização, como por exemplo, o de Gram-Schmidt. Depois de girar as coordenadas da matriz Hessiana (\mathbf{H}) é obtida a matriz \mathbf{H}_R , cujos termos são definidos como:

$$\mathbf{H}_{Rij} = \frac{(\mathbf{RHR}^T)_{ij}}{\|\nabla g(\mathbf{V}^*)\|}, i, j = 1, \dots, n-1 \quad (6)$$

onde \mathbf{R}^T é a transposta de \mathbf{R} e $\|\nabla g(\mathbf{V}^*)\|$ é a norma do gradiente da SEL no ponto de projeto (avaliado na última iteração do algoritmo HL–RF). Os autovalores da matriz \mathbf{H}_R são as curvaturas principais k_j ($j=1, 2, \dots, n-1$) da SEL.

2.4 Eficiência do SORM convencional

Na prática, no que tange aos problemas de engenharia, quando as soluções analíticas para as derivadas parciais não estão disponíveis, a matriz Hessiana pode ser calculada por diferenças finitas. Portanto, o número de análises extras da função da SEL para o cálculo de todas as derivadas de segunda ordem via diferenças finitas é $n(n+1)$. Porém, como a matriz Hessiana é simétrica o número de avaliações da função da SEL para o SORM convencional é:

$$NAF_{\text{SORM}} = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (7)$$

Isso poderá aumentar significativamente o consumo computacional, particularmente quando a função da SEL possuir um grande número de variáveis aleatórias e for morosa



para ser avaliada, quando forem usados métodos trabalhosos, como o método das diferenças finitas.

2.5 Estimativa da probabilidade de falha de segunda ordem

De posse das coordenadas de V^* , bem como dos valores de k_j , a estimativa da probabilidade de falha de segunda ordem do SORM convencional pode ser obtida de acordo com Madsen et al. (2006) por

$$Pf_2 = \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta k_j)^{-1/2} \quad (8)$$

onde Pf_2 é a probabilidade de falha de segunda ordem, $\Phi(-\beta)$ é a probabilidade de falha de primeira ordem (Pf), β é o índice de confiabilidade de primeira ordem fornecido pelo FORM, k_j são as curvaturas principais da superfície de estado limite no ponto de projeto (V^*), n é o número de variáveis aleatórias envolvidas na análise e Φ , a função cumulativa de probabilidades para a distribuição normal padronizada.

O índice de confiabilidade de segunda ordem ou índice de confiabilidade equivalente é calculado por:

$$\beta^{EQ} = -\Phi^{-1}(Pf_2). \quad (9)$$

3. SUPERFÍCIES EM R^3

Para que o SORM DG efetue a análise de confiabilidade de segunda ordem através da equação de Breitung (Equação 8) é necessário que sejam determinadas as curvaturas principais (k_j) da SEL. A seguir está explicado para uma melhor compreensão, como as curvaturas principais num ponto p de uma superfície em R^3 são calculadas através de geometria diferencial e na Seção 4 é realizada a generalização desse procedimento de cálculo, via geometria diferencial, para as curvaturas principais num ponto p qualquer de uma superfície em R^{n+1} (hipersuperfície).

3.1 Parametrização de uma superfície regular em R^3

O gráfico de uma equação da forma $F(x, y, z)=0$, onde F é uma função diferenciável e suas derivadas parciais não se anulam, simultaneamente, em nenhum ponto p , tal que $F(p)=0$, é um exemplo de uma superfície regular em R^3 . Verifica-se que o gráfico de uma função diferenciável $f: R^2 \rightarrow R$ é também um exemplo de superfície regular.

De maneira mais geral, um subconjunto S de R^3 é denominado superfície regular se, para cada ponto $p \in S$, existir uma vizinhança aberta $V \subset R^3$ de p , um aberto $U \subset R^2$ e uma bijeção $\varphi: U \rightarrow V \cap S$, sendo φ da forma $\varphi(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$, com as propriedades descritas a seguir (Rodrigues, 2001):

- φ é de classe C^∞ , ou seja, φ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens no ponto p ;
- φ é um homeomorfismo (ou seja, sua inversa é contínua); e

c) para qualquer ponto $q \in U$ a matriz Jacobiana de φ tem posto dois. A referida matriz ter posto dois, significa que a imagem da transformação linear obtida pela mesma tem dimensão dois, ou ainda, eliminando-se uma linha, convenientemente escolhida, a matriz 2×2 resultante tem determinante diferente de zero. A matriz Jacobiana, no caso, tem dimensões 3×2 , sendo dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Nessas condições, diz-se que φ é uma parametrização para S . Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável, se e somente se existir um campo diferenciável $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S , segundo Carmo (2006).

3.2 Curvaturas de uma superfície em \mathbb{R}^3

Sendo S uma superfície orientável, a aplicação de Gauss é o campo de vetores normais $N: S \rightarrow S^2$, onde $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a esfera de raio 1 e centro na origem. N é uma aplicação diferenciável e sua derivada $-DN_p: T_p S \rightarrow T_p S$ é um endomorfismo (ou seja uma transformação linear $T: U \rightarrow V$, sendo $U=V$), onde $T_p S$ é o espaço (plano) tangente à superfície S no ponto $p = \varphi(u, v)$. Da definição de derivada (regra da cadeia), destacada por Araújo (1998), tem-se:

$$N_u = -DN_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \quad (11)$$

$$N_v = -DN_{\varphi(u,v)}(\varphi_v). \quad (12)$$

Os vetores N e φ_u são ortogonais. O mesmo vale para N e φ_v . Derivando os produtos escalares $\langle \varphi_u, N \rangle = 0$ e $\langle \varphi_v, N \rangle = 0$, conclui-se que $-DN_p$ é uma aplicação linear auto adjunta de $T_p S$ em $T_p S$. Ainda, de acordo com Araújo (1998), os autovalores $k_1(p) \geq k_2(p)$ do operador linear $(-DN_p)$, são chamados de curvaturas principais de S no ponto p ; e, se $k_1(p) \geq k_2(p)$, chamam-se de direções principais as direções ortogonais definidas em $T_p S$ pelos autovalores $k_1(p)$ e $k_2(p)$.

Segundo Gray (2006), o determinante K de $-DN_p$ é chamado de curvatura Gaussiana de S em p , podendo ser obtida pelo produto das curvaturas principais

$$K = k_1(p) \cdot k_2(p). \quad (13)$$

Esse procedimento é válido também para o caso de uma hipersuperfície, onde $K = k_1(p) \cdot k_2(p) \dots k_n(p)$ passa a ser denominada de curvatura de Gauss-Kronecker, segundo Carmo (2011).

3.3 Curvatura normal

Seja $\alpha: (a, b) \rightarrow S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A curvatura normal de α em $\alpha(s)$ é a componente de $\alpha''(s)$ segundo a normal a S nesse ponto e é



dada por $k_n(\alpha, s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{N} \circ \alpha(s) \rangle$ (produto escalar entre $\alpha''(s)$ e \mathbf{N} , com \mathbf{N} aplicado no ponto $\alpha(s)$). Se a curva não estiver parametrizada pelo comprimento de arco, a fórmula da curvatura normal passa, de acordo com Rodrigues (2001), a ser:

$$k_n(\alpha, t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \langle \alpha''(t), \mathbf{N} \circ \alpha(t) \rangle \quad (15)$$

De acordo com Rodrigues (2001), o valor máximo e o valor mínimo das curvaturas normais das seções normais em p são as curvaturas principais da superfície no ponto p .

4. SUPERFÍCIES EM \mathbb{R}^{n+1}

A maioria da literatura sobre geometria diferencial apresenta os coeficientes da 1ª e 2ª forma fundamental para simplificar o cálculo das curvaturas em uma superfície em \mathbb{R}^3 e também para obter outras informações, como por exemplo, a área de uma superfície. Neste artigo, como o interesse recai sobre a generalização da ideia de superfície (hipersuperfície), tal simplificação pelo uso desses coeficientes não foi possível, tendo em vista a complexidade das operações matemáticas envolvidas no cálculo das curvaturas quando $n > 2$ (lembrando, por exemplo, que no espaço \mathbb{R}^{n+1} quando $n=2$ obtém-se o espaço \mathbb{R}^3), por isso na Subseção 3.2 optou-se em utilizar o operador linear $-\text{DN}_p$ (poderia ter sido feita, também, a opção pelo operador linear DN_p , porém essa questão está esclarecida na Subseção 5.1).

Para facilitar o cálculo do vetor (campo) normal à superfície, esta foi descrita como o gráfico de uma função diferenciável $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

4.1 Parametrização da superfície $g(\mathbf{V})=0$

Uma parametrização para a superfície nessa vizinhança pode ser dada por:

$$\varphi_{(p)}(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n) = [V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n, f(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)] \quad (16)$$

A função $f(\mathbf{V})$, com $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n) \in \mathbb{R}^n$, é obtida explicitando quaisquer das variáveis \mathbf{V} da função $g(\mathbf{V})=0$, onde $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Considerando, por exemplo, a explicitação da última variável de $g(\mathbf{V})=0$ tem-se $V_{n+1} = f(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)$.

4.2 Obtenção dos vetores tangentes à superfície $g(\mathbf{V})=0$

Os vetores tangentes, que correspondem às derivadas parciais da Equação 16, são calculados no ponto p de acordo com

$$\varphi_{V_1}(p) = (1, 0, \dots, 0, f_{V_1}(p)) = \left(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f(p)}{\partial V_1}\right) \quad (17)$$

$$\varphi_{V_i}(p) = (0, \dots, 1, \dots, 0, f_{V_i}(p)) = \left(0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial f(p)}{\partial V_i}\right); 1 < i < n \quad (18)$$



$$\boldsymbol{\varphi}_{V_n}(p) = (0, 0, \dots, 0, 1, f_{V_n}(p)) = \left(0, 0, \dots, 1, \frac{\partial f(p)}{\partial V_n}\right) \quad (19)$$

4.3 Obtenção do vetor normal à superfície $g(V)=0$ e de suas derivadas parciais

O vetor normal no ponto p é calculado fazendo uma extensão na equação apresentada em Carmo (2006) para esse vetor, isto é

$$\mathbf{N}(p) = \frac{(-f_{V_1}(p), -f_{V_2}(p), \dots, -f_{V_n}(p), 1)}{\sqrt{(f_{V_1}(p))^2 + (f_{V_2}(p))^2 + \dots + (f_{V_n}(p))^2 + 1}} \quad (20)$$

Já as derivadas parciais do vetor normal são obtidas por

$$\mathbf{N}_{V_j}(p) = \frac{\partial \mathbf{N}(p)}{\partial V_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

4.4 Obtenção das curvaturas principais da superfície $g(V)=0$

Efetuada o cálculo do vetor normal e de suas derivadas parciais \mathbf{N}_{V_j} , basta escrevê-las como uma combinação linear dos vetores, $\boldsymbol{\varphi}_{V_1}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{V_n}$, do plano tangente, obtendo a matriz (\mathbf{M}) do operador linear $-\mathbf{DN}_p$, cujos autovalores são as curvaturas principais. Fazendo uma extensão na equação apresentada por Araújo (1998) para o referido operador linear, tem-se:

$$(-\mathbf{DN}_p)(\boldsymbol{\varphi}_{V_j}) = -\mathbf{N}_{V_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

logo:

$$\begin{aligned} -\mathbf{N}_{V_1} &= (-N_{1,1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{V_1} + \dots + (-N_{1,n}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{V_n} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (23)$$

$$-\mathbf{N}_{V_n} = (-N_{n,1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{V_1} + \dots + (-N_{n,n}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{V_n}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -N_{1,1} & \cdot & \cdot & -N_{1,n} \\ -N_{2,1} & -N_{2,2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -N_{n,1} & -N_{n,2} & \cdot & -N_{n,n} \end{bmatrix} \quad (24)$$

5. SORM DG

O SORM DG foi proposto como uma alternativa para realizar a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem por ser mais eficiente que o SORM convencional, sem prejuízo da acurácia, como está demonstrado na Subseção 5.3. Na

Subseção 5.1 são feitas considerações sobre a orientação do vetor normal \mathbf{N} e na Subseção 5.2 está estabelecido o algoritmo para a aplicação desse método.

5.1 Orientação do vetor normal à superfície $g(\mathbf{V})=0$

O vetor normal \mathbf{N}^* calculado através da Equação 20, no ponto $p=\mathbf{V}^*$, pelo procedimento matemático supramencionado e que fornece as curvaturas principais da superfície ao SORM DG, deve ter a mesma orientação do vetor $\boldsymbol{\alpha}^*$, uma vez que, também, é o vetor normal à SEL no ponto de projeto (\mathbf{V}^*). Como os métodos de cálculo são distintos é necessário fazer essa verificação, quanto à orientação, para uma correta utilização da equação de Breitung (Equação 8), através do produto interno entre os referidos vetores. Evidentemente, se o produto interno for positivo eles possuirão a mesma orientação e os sinais das curvaturas principais calculadas, via geometria diferencial, deverão ser mantidos (o operador linear $-\text{DN}_p$ deve ser mantido), caso contrário esses sinais deverão ser trocados (o operador linear $-\text{DN}_p$ deve ser substituído pelo operador linear DN_p).

5.2 Algoritmo para aplicação do SORM DG

- a) Fornecer, via FORM (ou outro método de análise de confiabilidade de primeira ordem), as coordenadas do ponto de projeto (\mathbf{V}^*);
- b) Generalizar o processo da seguinte maneira: i) Caso o vetor \mathbf{U} esteja representando variáveis aleatórias Gaussianas, que estejam correlacionadas, deve ser realizada a transformação ortogonal (vide Apêndice B, Seções B.3 e B.4 de Melchers e Beck, 2018) desse vetor, sendo obtido o vetor \mathbf{V} , cujas variáveis serão normais padrão e estatisticamente independentes; ii) Se o vetor \mathbf{U} estiver representando variáveis aleatórias não Gaussianas independentes, transformar essas variáveis usando as distribuições normais equivalentes (vide Ditlevsen, 1981); iii) Se o vetor \mathbf{U} estiver representando variáveis aleatórias não Gaussianas, que estejam correlacionadas, antes de realizar as transformações supramencionadas, (i) e (ii), deve ser realizada a transformação de Nataf (vide Kiureghian e Liu, 1986);
- c) Obter a função $f(\mathbf{V})$, com $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n) \in \mathbb{R}^n$, explicitando quaisquer das variáveis do vetor \mathbf{V} da função $g(\mathbf{V})=0$, onde $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Considerando, por exemplo, a explicitação da última variável de $g(\mathbf{V})=0$ tem-se $V_{n+1} = f(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)$;
- d) Gerar, na vizinhança de $p=\mathbf{V}^*$, a partir da função $V_{n+1} = f(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)$, a parametrização de acordo com a Equação 16;
- e) Calcular as derivadas parciais da parametrização a fim de obter os vetores tangentes à superfície, no ponto $p = \mathbf{V}^*$, utilizando as Equações 17, 18 e 19;
- f) Obter o vetor normal à superfície (\mathbf{N}^*), no ponto $p = \mathbf{V}^*$, de acordo com a Equação 20;
- g) Calcular as derivadas parciais do vetor normal à superfície, no ponto $p = \mathbf{V}^*$, através da Equação 21;
- h) Obter, através da Equação 24, os autovalores da matriz (\mathbf{M}) do operador linear, tendo em vista que eles são as curvaturas principais da superfície $g(\mathbf{V})=0$ no ponto $p = \mathbf{V}^*$;



- i) Realizar o produto interno entre \mathbf{N}^* e $\boldsymbol{\alpha}^*$, para garantir que a orientação de \mathbf{N}^* seja a mesma de $\boldsymbol{\alpha}^*$, a fim de que as curvaturas principais da superfície, calculadas no item anterior, sejam aplicadas com a orientação correta nas Equação 8;
- j) Efetuar a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem através da Equação 8.

5.3 Eficiência do SORM DG

Analisando o algoritmo apresentado na Subseção 5.2, verifica-se que para o item “e” é necessária a obtenção das derivadas parciais de primeira ordem de $f(\mathbf{V})$, já para o item “g” faz-se necessário o cálculo das derivadas parciais de segunda ordem de $f(\mathbf{V})$, ou seja, a matriz Hessiana (\mathbf{H}) precisa ser calculada. Como os valores das derivadas parciais de primeira ordem de $f(\mathbf{V})$ foram programados para serem obtidos simultaneamente com os valores calculados dos termos da matriz Hessiana, tem-se que

$$NFA_{SORM\ DG} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (25)$$

porque, conforme mencionado no item “c” da Subseção 5.2, a função $f(\mathbf{V})$ é obtida explicitando uma das variáveis \mathbf{V} da função $g(\mathbf{V})=0$, possuindo assim uma variável a menos que a função $g(\mathbf{V})=0$. Portanto, substituindo $n-1$ no lugar de n na Equação 7 obtém-se a Equação 25.

6. RESULTADO

O exemplo apresentado foi calculado no ambiente MATLAB (Lee, 2018) e todas as derivadas foram obtidas pelo método das diferenças finitas.

Exemplo

Este exemplo foi analisado por Wu e Wirsching (1987) e utilizado na análise de fadiga de componentes em alta temperatura e baixo número de ciclos de carregamento. A função da SEL é expressa por:

$$G(\mathbf{U}) = U_1 - 10^4 \left[\frac{U_2}{U_3 (U_4 U_6)^{-1,71}} + \frac{1 - U_2}{U_5 (U_4 U_6)^{-1,188}} \right] \quad (26)$$

$$\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6). \quad (27)$$

As características (distribuições de probabilidades e momentos) das variáveis aleatórias (mutuamente independentes), bem como as coordenadas do ponto de projeto e do vetor normal, fornecidas pelo FORM, são mostradas na Tabela 1 e os resultados calculados para as curvaturas principais e para a análise de confiabilidade são apresentados nas Tabelas 2 e 3, respectivamente.

Transformação de variáveis para o espaço reduzido:

- Para as variáveis com distribuição Lognormal $U_i \sim LN(\mu_i, \sigma_i)$, mostradas na Tabela 1:

$$T: \Phi(V_i) = Fu_i(U_i) \Rightarrow V_i = \Phi^{-1}[Fu_i(U_i)] = \Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{\ln(U_i) - \lambda_i}{\xi_i}\right)\right] \Rightarrow V_i = \frac{\ln(U_i) - \lambda_i}{\xi_i}$$

então

$$U_i = e^{(\xi_i V_i + \lambda_i)} \quad (28)$$

$$\xi_i = \sqrt{\ln \left[1 + \frac{(\sigma_i)^2}{(\mu_i)^2} \right]} \quad (29)$$

$$\lambda_i = \ln(\mu_i) - 0.5(\xi_i)^2 \quad (30)$$

- Para a variável com distribuição Normal $U_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$, apresentada na Tabela 1:

$$T: \Phi(V_i) = F_{U_i}(U_i) \Rightarrow V_i = \Phi^{-1}[F_{U_i}(U_i)] = \Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{U_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)\right] \Rightarrow V_i = \frac{U_i - \mu_i}{\sigma_i} \Rightarrow$$

$$U_i = \sigma_i V_i + \mu_i \quad (31)$$

- Para a variável com distribuição Gumbel $U_i \sim G(\mu_i, \sigma_i)$, ilustrada na Tabela 4:

Através do princípio da aproximação da extremidade normal (Ditlevsen, 1981), $G(\mu_i, \sigma_i) \sim N(\mu_{U_i}^N, \sigma_{U_i}^N)$, onde $\mu_{U_i}^N$ e $\sigma_{U_i}^N$ representam, respectivamente, a média e o desvio padrão da distribuição normal equivalente para a variável U_i , sendo calculados como

$$\sigma_{U_i}^N = \frac{\varphi\{\Phi^{-1}(F_{U_i}(U_i^*))\}}{f_{U_i}(U_i^*)} \quad (32)$$

$$\mu_{U_i}^N = U_i^* - \sigma_{U_i}^N \Phi^{-1}(F_{U_i}(U_i^*)) \quad (33)$$

onde $F_{U_i}(\cdot)$ e $f_{U_i}(\cdot)$ são as funções cumulativa e de densidade de probabilidades originais da variável U_i ; $\Phi(\cdot)$ e $\varphi(\cdot)$ correspondem às funções cumulativa e de densidade de probabilidades da distribuição normal padrão.

Através das Equações 32 e 33 os valores de $\sigma_{U_6}^N = 1.0353$ e $\mu_{U_6}^N = 4.6999$ são obtidos, logo:

$$U_6 = \sigma_{U_6}^N V_6 + \mu_{U_6}^N = 1.0353 V_6 + 4.6999 \quad (34)$$

Substituindo os valores obtidos nas Equações 28, 31 e 34 na Equação 26:

$$g(\mathbf{V}) = e^{(\xi_1 V_1 + \mu_1)} - 10^4 \left[\frac{\sigma_2 V_2 + \mu_2}{e^{(\xi_3 V_3 + \mu_3)} (e^{(\xi_4 V_4 + \mu_4)} (1.0353 V_6 + 4.6999))^{-1.71}} + \frac{1 - (\sigma_2 V_2 + \mu_2)}{e^{(\xi_5 V_5 + \mu_5)} (e^{(\xi_4 V_4 + \mu_4)} (1.0353 V_6 + 4.6999))^{-1.188}} \right] \quad (35)$$

Portanto, optando pela explicitação da primeira variável (V_1) na Equação 42, tem-se:

$$f(\mathbf{V}) = \frac{\ln \left[10^4 \left(\frac{\sigma_2 V_2 + \mu_2}{e^{(\xi_3 V_3 + \mu_3)} (e^{(\xi_4 V_4 + \mu_4)} (1.0353 V_6 + 4.6999))^{-1.71}} + \frac{1 - (\sigma_2 V_2 + \mu_2)}{e^{(\xi_5 V_5 + \mu_5)} (e^{(\xi_4 V_4 + \mu_4)} (1.0353 V_6 + 4.6999))^{-1.188}} \right) \right] - \mu_1}{\xi_1}$$

Tabela 1. Características das variáveis aleatórias, coordenadas do ponto de projeto e do vetor normal – Exemplo.

Variável**	Distribuição	μ_i	σ_i	U^*_i	V^*_i	α^*_i
U_1	Lognormal	1.0440	0.31320	0.6892	-1.2680	0.5315
U_2	Normal	0.7000	0.07000	0.6545	-0.6504	0.2726
U_3	Lognormal	0.2390	0.09560	0.1992	-0.2796	0.1172
U_4	Lognormal	1.0110	0.15165	1.1302	0.8219	-0.3445
U_5	Lognormal	1.8020	0.72080	0.9815	-1.3844	0.5802
U_6	Gumbel	0.0005	0.00008	0.0006	0.9957	-0.4173

Nota: μ_i = média; σ_i = desvio padrão; U^*_i = coordenadas do ponto de projeto no espaço original (U^*); V^*_i = coordenadas do ponto de projeto no espaço reduzido (V^*); α^*_i = coordenadas do vetor normal unitário no ponto V^* ; **as unidades das variáveis não foram mencionadas pela referência Wu e Wirsching (1987); $i=1, \dots, n$.

Tabela 2. Curvaturas principais (k_j) – Exemplo.

DG
-0.1319
-0.0613
0.0712
0.0514
0.0000

Nota: Método de cálculo – Geometria diferencial.

Tabela 3. Resultados calculados na análise de confiabilidade via software MATLAB – Exemplo.

	FORM HL– RF Tolerância = 10^{-4}	SORM Breitung DG	SORM Breitung Convencional	**Simulação Monte Carlo Simples (SMCS)
i	5	-	-	-
β	2.386	-	-	-
P_f	8.52×10^{-3}	-	-	-
P_{f_2}	-	9.72×10^{-3}	$*9.70 \times 10^{-3}$	10.20×10^{-3}
β^{EQ}	-	2.337	*2.338	2.320
NAF	35	$35^\Delta + 15^\blacktriangle = 50$	$35^\Delta + 21^\blacktriangle = 56$	2×10^5

Nota: i = número de iterações; β = índice de confiabilidade de primeira ordem; P_f = probabilidade de falha de primeira ordem; P_{f_2} = probabilidade de falha de segunda ordem; β^{EQ} = índice de confiabilidade equivalente; NAF = número de avaliações da função da SEL; valores fornecidos por *Sagrilo (1994) e **Wu and Wirsching (1987); $^\Delta NAF$ requerido para o FORM; $^\blacktriangle NAF$ requerido para calcular a matriz Hessiana.

Conforme mostrado na Tabela 3, o SORM DG otimizou o resultado da probabilidade de falha calculado pelo FORM em relação ao resultado fornecido pela SMCS, sem prejuízo de acurácia quando comparado com o SORM convencional, demonstrando que



as curvaturas principais (vide Tabela 2) calculadas pelo procedimento via geometria diferencial contribuíram para esse fim. Além disso, o SORM DG foi mais eficiente do que SORM convencional, pois apresentou um NAF menor, como indicado na Tabela 6.

7. CONCLUSÕES

Os exemplos de engenharia apresentados neste artigo, cujas funções da SEL não são lineares, foram analisados para mostrar que o SORM DG realiza a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem otimizando com relevância os resultados calculados pelo FORM e com maior eficiência que o SORM convencional, sem prejuízo da acurácia, demonstrando a contribuição do procedimento analítico via geometria diferencial, para o cálculo das curvaturas principais num ponto p (no caso em tela $p=V^*$) de uma hipersuperfície.

O FORM é o mais eficiente, porém limitado em termos de acurácia. A SMC e o MIN são os mais acurados, mas pecam pela falta de eficiência, por isso sempre que for viável utilizar o FORM/SORM, haverá aumento de eficiência em relação à SMC e ao MIN. Nesse sentido o FORM/SORM DG, contribuem para aumentar ainda mais a eficiência em relação à SMC e ao MIN. Para superfícies de estado limite, que possuam funções não lineares e com muitas variáveis aleatórias (situação muito frequente nos problemas reais de engenharia) envolvidas na análise, o consumo computacional costuma ser relevante, por isso a busca pela eficiência na análise de confiabilidade estrutural é bastante requisitada.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), à FAPEMIG e ao CNPq pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Araújo PV. Geometria diferencial. Rio de Janeiro: IMPA, 1998. (Coleção Matemática Universitária).
- Carmo MP. Geometria diferencial de curvas e superfícies. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Textos Universitários).
- Carmo MP, Flaherty F. Riemannian geometry. Boston: Birkhauser, 2011.
- Chan CL, Low BK. Practical second-order reliability analysis applied to foundation engineering. Int J Numer Anal Meth Geomech 2012;36 (11):1387–409.
- Cho SE. Probabilistic stability analyses of slopes using the ANN-based response surface. Comput Geotech 2009;36(5):787–97.
- Ditlevsen O. Principle of normal tail approximation. Journal of Engineering Mechanics (ASME), v.107, n. EM6, p. 11911208, 1981.



Ditlevsen O, Madsen HO. Structural Reliability Methods: Coastal, Maritime and Structural Engineering Department of Mechanical Engineering Technical University of Denmark, 2007.

Du, X. Probabilistic engineering design. Rolla: University of Missouri, 2005.

Gray A. Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematic. Boca Raton: CRC Press, 2006.

Lee HH. Programming and engineering computing with MATLAB 2018, ed. SDC Publications, USA, 2018.

Kiureghian AD; Liu PL. Structural reliability under incomplete probability information. Journal of Engineering Mechanics (ASCE), v. 112, n. 1, 1986.

Lü Q, Low BK. Probabilistic analysis of underground rock excavations using response surface method and SORM. Comput Geotech 2011;38(8):1008–21.

Lü Q, Sun H-Y, Low BK. Reliability analysis of ground–support interaction in circular tunnels using the response surface method. Int J Rock Mech Min 2011;48(8):1329–43.

Lü Q, Chan CL, Low BK. Probabilistic evaluation of ground-support interaction for deep rock excavation using artificial neural network and uniform design. Tunn Undergr Sp Tech 2012;32:1–18.

Madsen HO, Krenk, S, Lind, NC. Methods of structural safety. New Jersey: Prentice Hall, Englewoods Cliffs, 2006.

Melchers RE, Beck AT. Structural reliability: analysis and prediction. New York: Jon Willey & Sons, 2018.

Rodrigues PR. Introdução às curvas e superfícies. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense, 2001.

Sagrilo, LVS. Análise de confiabilidade estrutural utilizando os métodos analíticos FORM e SORM. Tese de doutorado. Programa de engenharia civil, COPPE/UFRJ, 1994.

Wu, YT; Wirsching, PH. New algorithm for structural for reliability estimation. Journal of Engineering Mechanics (ASME), v.117, n. 9, p. 1319-1339, 1987.

Zeng P, Jimenez R. An approximation to the reliability of series geotechnical systems using a linearization approach. Comput Geotech 2014;62:304–9.

Zeng P, Jimenez R, Jurado-Piña R. System reliability analysis of layered soil slopes using fully specified slip surfaces and genetic algorithms. Eng Geol 2015;193(2):106–17.

Zeng P, Jimenez R, Li T. An efficient quasi-Newton approximation- based SORM to estimate the reliability of geotechnical problems. Comput Geotech 2016; 76:33–42

Zeng P, Li T, Jimenez R, Feng X, Chen Y Extension of quasi-Newton approximation- based SORM for series system reliability analysis of geotechnical problems. Engineering with Computers 2017; 34:215–224.

Zhao Y, Ono T. A general procedure for first/second-order reliability method (FORM/SORM), Structural Safety, Amsterdam, v. 21, p.95-112, 1999.