

## UTILIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE DESCONTINUIDADE NO CÁLCULO DE ESFORÇOS SOLICITANTES E DESLOCAMENTOS EM VIGAS ISOSTÁTICAS

Edson Tejerina Calderón<sup>1</sup> (PQ)\*, edson.calderon@ueg.br

1 Universidade Estadual de Goiás. Câmpus Central – Sede: Anápolis-SET

Resumo: O traçado dos diagramas dos esforços solicitantes (força cortante e momento fletor) de uma viga com várias cargas atuando sobre ela, requer que mesma seja dividida em vários trechos ou regiões, para obter-se as expressões analíticas dos esforços solicitantes em cada um desses trechos, devido à existência de descontinuidades provocadas pelas cargas, o que torna seu cálculo consideravelmente trabalhoso. Para determinar as equações da força e da declividade pelo método de Integração Direta, o cálculo se torna ainda mais trabalhoso devido a que para cada trecho da viga são obtidas duas constantes de integração, decorrentes da aplicação do método, e a determinação dessas constantes requer um número igual de equações que deverão expressar a continuidade das flechas e declividades, bem como as condições de contorno dos vínculos da viga. O presente trabalho propõe uma alternativa para minimizar esse tipo de problemas utilizando-se operadores matemáticos, conhecidos como funções de descontinuidade, os quais permitem escrever as equações dos esforços solicitantes de uma viga com vários carregamentos, utilizando-se uma única expressão que poderá ser aplicada a todos os trechos da viga, e no caso dos deslocamentos, dispensa a aplicação das condições de igualdade em pontos comuns a dois trechos consecutivos, sendo apenas suficiente a aplicação das condições de contorno dos vínculos da viga, simplificando enormemente o seu cálculo e tornando-se bastante apropriada para sua implementação por meio de programação computacional. Para provar a eficiência da utilização de funções de descontinuidade, são realizados exemplos para comparar os resultados com os obtidos por métodos tradicionais.

Palavras-chave: Método de Clebsch. Funções de Macaulay.

### Introdução

No traçado dos diagramas dos esforços solicitantes de uma viga (força cortante e momento fletor) são utilizadas expressões algébricas provenientes do seu carregamento, as quais podem ser utilizadas também para outros cálculos como a energia de deformação e a linha elástica da mesma. Quando se trata de uma carga distribuída contínua ao longo de toda a viga (figura 1, a), as expressões analíticas dos esforços solicitantes são facilmente determinadas devido à inexistência de descontinuidade no carregamento. Entretanto, se várias outras cargas atuam sobre a viga (figura 2), esta fica dividida em vários trechos ou regiões, sendo necessário então, obter as expressões analíticas dos esforços solicitantes para cada um desses trechos da viga, devido à existência de descontinuidades no carregamento, o que torna seu cálculo consideravelmente trabalhoso.

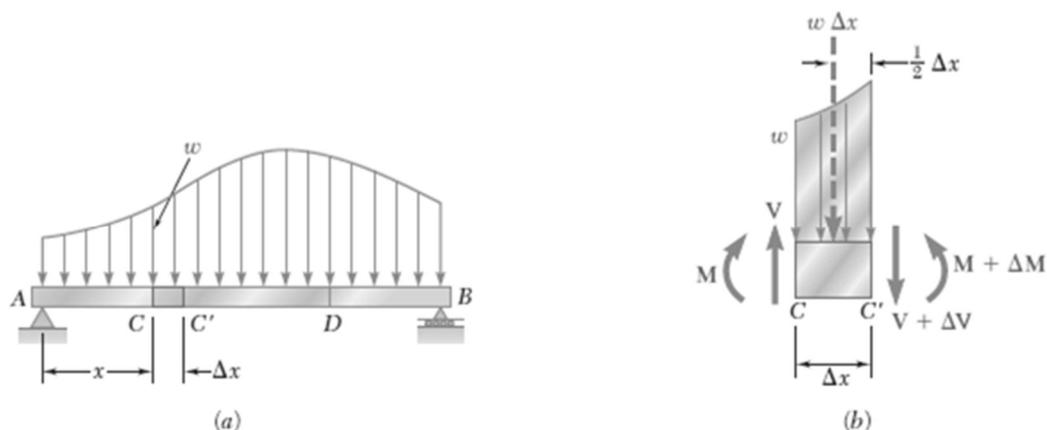


Figura 1- a) Viga com carga distribuída  $w(x)$  contínua  
b) Elemento diferencial da viga

Considerando-se em equilíbrio o elemento diferencial  $\Delta x$  da viga (Figura 1, b), o qual está submetido a uma carga distribuída contínua  $w(x)$ , podem ser obtidas as relações diferenciais que existem entre a carga  $w(x)$ , a força cortante  $V(x)$  e o momento fletor  $M(x)$ , que são:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -w(x) \quad (1)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad (2)$$

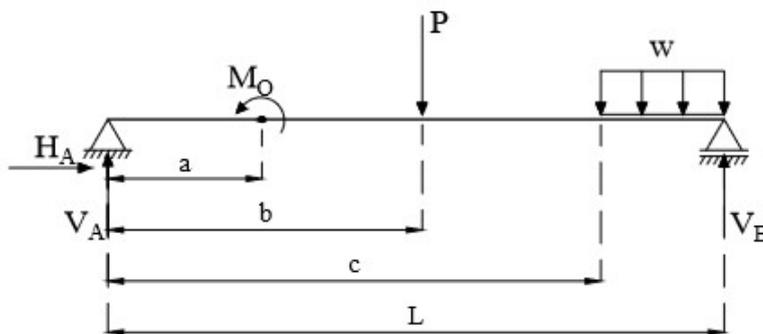


Figura 2- Viga com vários carregamentos

Considerando-se agora uma viga, com vários tipos de cargas que dividem a mesma em quatro trechos ou regiões distintas (Figura 2), nas quais as equações da força cortante e do momento fletor têm, respectivamente, as seguintes expressões:

$$Q(x) = V_A \quad \text{para } 0 < x \leq a \quad (3)$$

$$M(x) = V_A x \quad \text{para } 0 \leq x < a \quad (4)$$

$$Q(x) = V_A \quad \text{para } a \leq x < b \quad (5)$$

$$M(x) = V_A x - M_0 \quad \text{para } a < x \leq b \quad (6)$$

$$Q(x) = V_A - P \quad \text{para } b < x \leq c \quad (7)$$

$$M(x) = V_A x - M_0 - Px \quad \text{para } b \leq x \leq c \quad (8)$$

$$Q(x) = V_A - P - w(x - c) \quad \text{para } c \leq x < L \quad (9)$$

$$M(x) = V_A x - M_0 - Px - \frac{w}{2}(x - c)^2 \quad \text{para } c \leq x \leq L \quad (10)$$

Com as expressões (3), (5), (7) e (9) e as expressões (4), (6), (8) e (10) podem ser traçados de forma exata, os diagramas da força cortante e momento fletor, respectivamente. Pode-se perceber que, para um número maior de cargas, o traçado dos diagramas dos esforços solicitantes irá se tornar cada vez mais trabalhoso.

Na determinação das flechas e declividades ao longo de uma viga, utilizando o método de Integração Direta, o cálculo se torna ainda mais trabalhoso e demorado quando a viga está dividida em vários trechos, pois a equação da linha elástica é representada por uma equação diferencial de segunda ordem (Craig, 2003):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (11)$$

Sendo: E o módulo de elasticidade longitudinal e I o momento de inércia da área da seção transversal.

Integrando-se a equação (11), tem-se:

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M(x) dx + C_1 \quad (12)$$

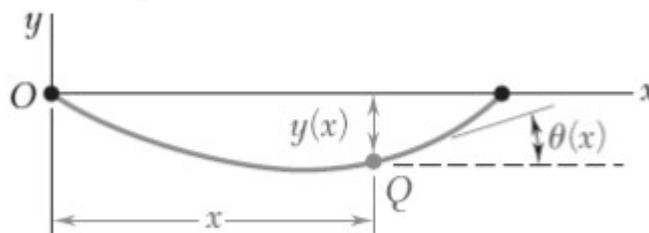


Figura 3 – Flecha  $y(x)$  e declividade  $\theta(x)$  em um ponto  $Q(x,y)$

Sendo que  $\theta(x)$  (Figura 3), é o ângulo que a tangente à curva elástica no ponto  $Q(x,y)$  forma com a horizontal, ou seja:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta(x) \cong \theta(x) \quad (13)$$

Desta forma, a equação (12) fica:

$$EI\theta(x) = \int M(x)dx + C_1 \quad (14)$$

Integrando-se mais uma vez a equação (11), tem-se:

$$EIy(x) = \int [\int M(x)dx + C_1] dx + C_2 \quad (15)$$

Desta forma, as equações (14) e (15) permitem calcular os deslocamentos (declividades e flechas, respectivamente) em qualquer ponto de uma viga.

Pode-se verificar que para cada trecho da viga são obtidas duas constantes de integração, decorrentes da aplicação do método. A determinação dessas constantes requer um número igual de equações que deverão expressar a continuidade das flechas e declividades, bem como as condições de contorno dos vínculos da viga.

A solução para problemas desse tipo pode ser minimizada utilizando-se operadores matemáticos conhecidos como funções de descontinuidade, os quais permitem escrever os esforços solicitantes de uma viga com vários carregamentos, utilizando-se uma única expressão que poderá ser aplicada a todos os trechos ao longo da viga.

### Material e Métodos

O presente trabalho propõe uma alternativa com a qual podem-se expressar as equações dos esforços solicitantes atuantes em cada trecho, por uma única expressão, utilizando-se operadores matemáticos, conhecidos como funções de descontinuidade ou funções singulares, as quais podem ser utilizadas também na

determinação de flechas e declividades ao longo de uma viga, simplificando enormemente o seu cálculo.

As funções de descontinuidade, originalmente foram introduzidas e desenvolvidas pelo matemático alemão A. Clebsch (1833-1872) (Riley et ali., 2003) e tem relação com a função de passo unitário usada pelo físico britânico O. Heaviside (1850-1925) (POPOV,1978), quem estendeu os métodos de cálculo operacional para analisar a resposta momentânea de circuitos elétricos. Todavia, é dado o crédito ao matemático e engenheiro inglês W. H. Macaulay (1853-1936) (Beer et ali., 2006) pela introdução das funções singulares aos problemas de vigas, utilizando os colchetes  $\langle \rangle$ , geralmente chamados de colchetes de Macaulay.

Neste trabalho, as funções de descontinuidade ou funções singulares são utilizadas para determinar as equações dos esforços solicitantes, representados por uma única equação, que poderá ser aplicada a todos os trechos ao longo da viga, para o traçado dos seus respectivos diagramas. Por consequência, no traçado dos diagramas dos deslocamentos (flechas e declividades), fica eliminada a necessidade da aplicação das condições de igualdade em pontos comuns a dois trechos consecutivos, sendo apenas suficiente a aplicação das condições de contorno dos vínculos da viga.

Para um número inteiro  $n$  (positivo ou negativo) (Ribbeler,2010), uma função singular de  $x$  é definida como:

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ (x - a)^n & \text{para } x \geq a \end{cases} \quad (16)$$

Para  $n=0$ , tem-se:

$$\langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ 1 & \text{para } x \geq a \end{cases} \quad (17)$$

Os gráficos das funções singulares correspondentes, respectivamente, para  $n=0$ ,  $n=1$  e  $n=2$ , são representados na figura 4.

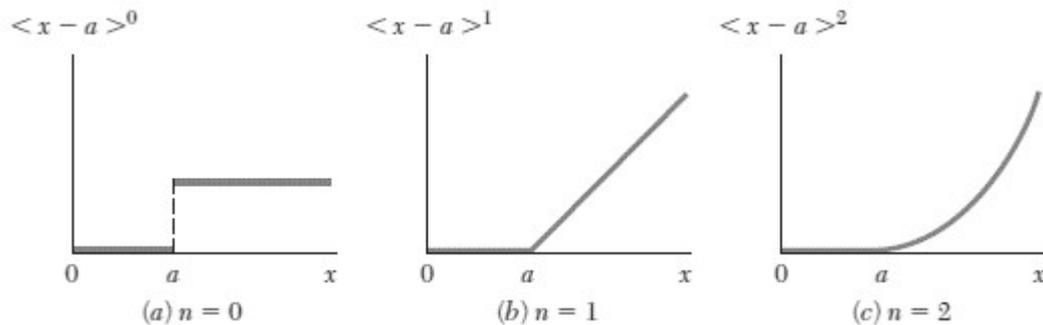


Figura 4 – Gráficos de funções singulares

Destas definições de funções singulares, pode-se concluir que:

$$\int \langle x-a \rangle^n dx = \frac{\langle x-a \rangle^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para } n \geq 0 \quad (18)$$

$$\frac{d}{dx} \langle x-a \rangle^n = n \langle x-a \rangle^{n-1} \quad \text{para } n \geq 1 \quad (19)$$

Nas Figuras 5, 6, 7 e 8, são apresentadas, o carregamento e os diagramas da Força Cortante e o Momento Fletor, para carga momento, carga concentrada, carga uniformemente distribuída e carga linearmente distribuída, com suas respectivas expressões matemáticas utilizando-se as funções de descontinuidade.

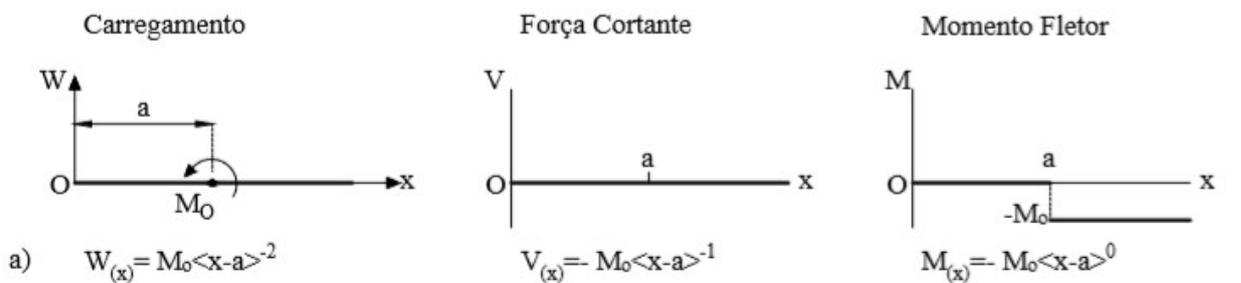


Figura 5 – Carga momento  $M_0$

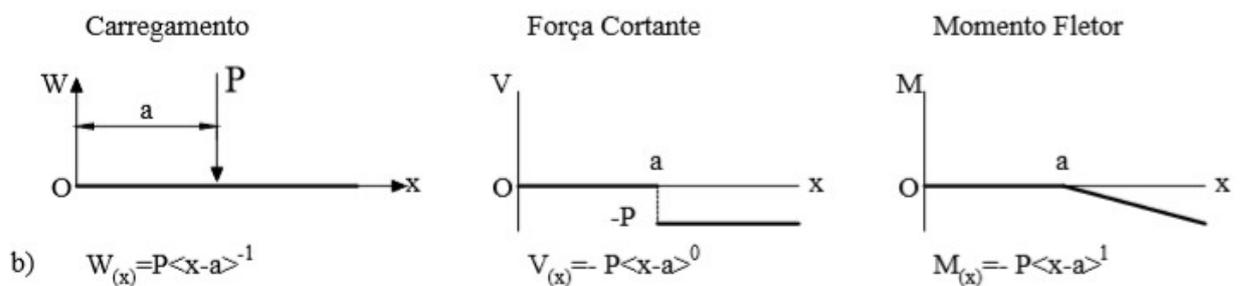


Figura 6 – Carga concentrada P

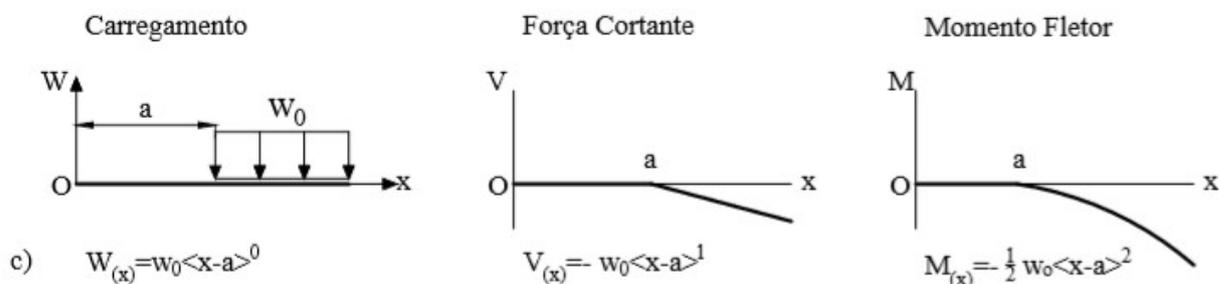


Figura 7 – Carga uniformemente distribuída  $w_0$

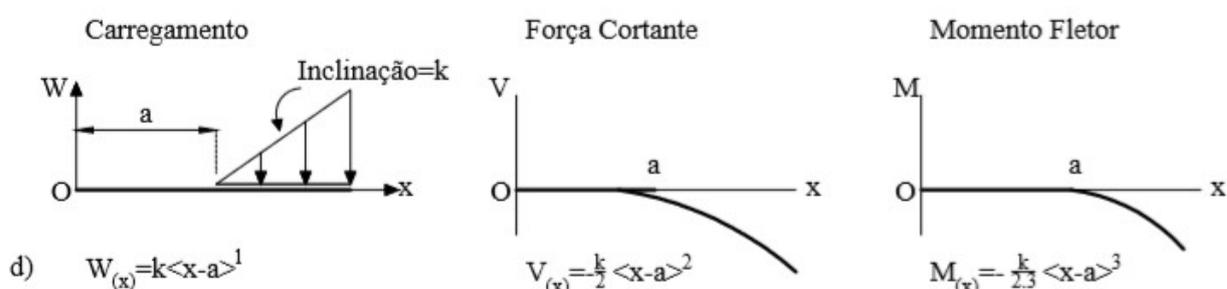


Figura 8 – Carga linearmente distribuída com inclinação  $k$

## Resultados e Discussão

Para provar a eficiência da utilização de funções de descontinuidade, a seguir são apresentados exemplos para comparar os resultados com os obtidos por métodos tradicionais.

**Exemplo 1:** Determinar as equações dos esforços solicitantes da viga da figura 2, utilizando-se as funções de descontinuidade.

Assim, as quatro equações (3, 5, 7 e 9) escritas anteriormente para a força cortante, podem ser representadas por uma única equação da seguinte forma:

$$Q(x) = V_A \langle x-0 \rangle^0 - M_0 \langle x-a \rangle^{-1} - P \langle x-b \rangle^0 - w(x-c) \quad (20)$$

No caso do momento fletor, representada pelas equações 4, 6, 8 e 10, fica:

$$M(x) = V_A \langle x-0 \rangle^1 - M_0 \langle x-a \rangle^0 - P \langle x-b \rangle^1 - \frac{w}{2} (x-c)^2 \quad (21)$$

**Exemplo 2:** Determinar as equações dos esforços solicitantes da viga da figura 9, da forma tradicional e utilizando-se as funções de descontinuidade.

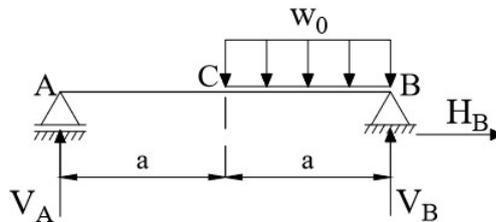


Figura 9 – Viga com carga uniformemente distribuída  $w_0$

A viga está composta por dois trechos, AC e CB. Aplicando-se as equações de equilíbrio, obtêm-se a reação de apoio  $V_A$ :

$$\sum M_B = 0 \rightarrow w_0 a \left(\frac{a}{2}\right) - V_A (2a) = 0 \rightarrow V_A = \frac{1}{4} w_0 a \quad (22)$$

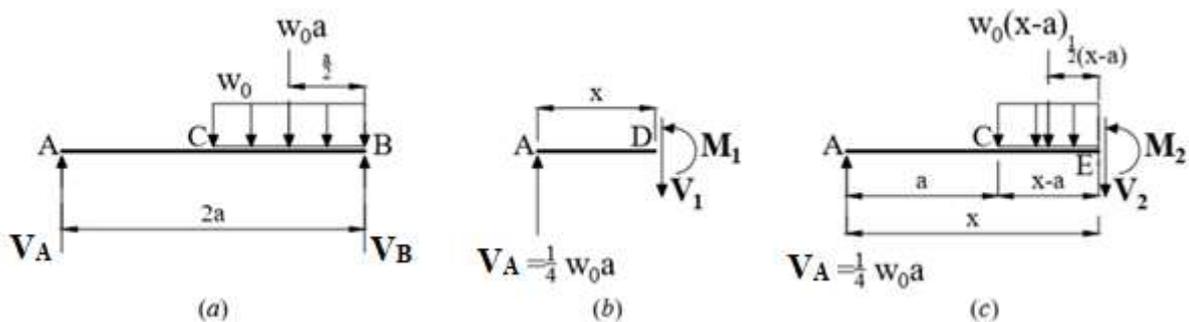


Figura 10 – Carga uniformemente distribuída  $w_0$

Para o trecho AC (Figura 10.b), obtêm-se a partir do equilíbrio, as equações da força cortante e o momento fletor, respectivamente:

$$V_1(x) = \frac{1}{4} w_0 a \quad M_1(x) = \frac{1}{4} w_0 a x \quad (23)$$

Da mesma forma, para o trecho CB (Figura 10.c), tem-se a partir do equilíbrio:

$$V_2(x) = \frac{1}{4} w_0 a - w_0(x - a) \quad M_2(x) = \frac{1}{4} w_0 a x - \frac{1}{2} w_0(x - a)^2 \quad (24)$$

Utilizando as funções de descontinuidade, a carga fica representada por:

$$w(x) = -V_A \langle x - 0 \rangle^{-1} + w_0 \langle x - a \rangle^0 - V_B \langle x - 2a \rangle^{-1} \quad (25)$$

A força cortante e o momento fletor podem ser obtidos pela integração da carga utilizando-se as equações 1 e 2, respectivamente, isto é:

$$V(x) = -\int_0^x w(x)dx = V_A \langle x - 0 \rangle^0 - w_0 \langle x - a \rangle^1 + V_B \langle x - 2a \rangle^0 + C_1 \quad (26)$$

$$M(x) = \int_0^x V(x)dx = V_A \langle x - 0 \rangle^1 - \frac{w_0}{2} \langle x - a \rangle^2 + V_B \langle x - 2a \rangle^1 + C_1 x + C_2 \quad (27)$$

Para  $V(0^-)=0$  e  $M(0)=0$ , obtêm-se,  $C_1=0$  e  $C_2=0$ , e para  $V(2a^+)=0$  e  $M(2a)=0$ , obtêm-se  $V_A = \frac{1}{4} w_0 a$  e  $V_B = \frac{3}{4} w_0 a$ , logo de forma simplificada fica:

$$V(x) = \frac{1}{4} w_0 a \langle x - 0 \rangle^0 - w_0 \langle x - a \rangle^1 \quad (28)$$

$$M(x) = \frac{1}{4} w_0 a \langle x - 0 \rangle^1 - \frac{w_0}{2} \langle x - a \rangle^2 \quad (29)$$

**Exemplo 3:** Determinar as equações dos esforços solicitantes da viga da figura 11, utilizando-se as funções de descontinuidade.

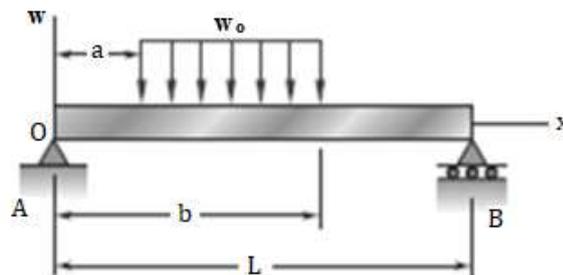


Figura 11 – Carga uniformemente distribuída  $w_0$

Neste caso, quando a carga distribuída atua apenas parcialmente na viga, pode-se recorrer ao artifício apresentado na figura 12.

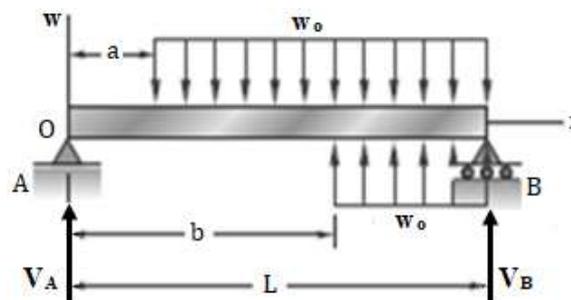


Figura 12 – Carga uniformemente distribuída  $w_0$

Desta forma, a equação da carga é dada por:

$$w(x) = -V_A \langle x - 0 \rangle^{-1} + w_0 \langle x - a \rangle^0 - w_0 \langle x - b \rangle^0 \quad (30)$$

A força cortante e o momento fletor, podem ser obtidos aplicando-se as equações 1 e 2 respectivamente:

$$V(x) = V_A \langle x - 0 \rangle^0 - w_0 \langle x - a \rangle^1 + w_0 \langle x - b \rangle^1 \quad (31)$$

$$M(x) = V_A \langle x - 0 \rangle^1 - \frac{1}{2} w_0 \langle x - a \rangle^2 + \frac{1}{2} w_0 \langle x - b \rangle^2 \quad (32)$$

### Considerações Finais

Pode-se observar que, uma vez conhecidos os mecanismos que envolvem as funções de singularidade, a determinação das equações e conseqüentemente o traçado dos diagramas dos esforços solicitantes tornam-se bastante simples. Determinando-se equação do momento fletor com a metodologia apresentada, os diagramas das flechas e declividades ao longo de uma viga podem ser traçados aplicando-se as equações 14 e 15. Pode-se observar também que, a utilização das funções de descontinuidade no traçado de diagramas dos esforços solicitantes e dos deslocamentos de uma viga, é bastante apropriada para sua implementação por meio de programação computacional.

### Agradecimentos

Meus agradecimentos ao curso de Engenharia Civil e à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade Estadual de Goiás, pelo apoio.

### Referências

BEER, F.P., JOHNSTON JR., E. R. e DEWOLF, J. T. **Resistência dos materiais**. São Paulo. McGraw-Hill, 2006.

CRAING JR, R. R. **Mecânica dos materiais**. Rio de Janeiro. LTC, 2003.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. São Paulo. Pearson Prentice Hall, 2010.

POPOV, E. P. **Introdução à mecânica dos sólidos**. São Paulo. Edgard Blücher Ltda, 1978.

RILEY, W. F.; STURGES, L. D. e MORRIS, D. H. **Mecânica dos materiais**. Rio de Janeiro. LTC, 2003.