Título: A relevância dos modelos não paramétricos para mensuração do Expected Shortfall

Autor: Marcelo Fukui

Co-autor: Leonardo Fernando Cruz Basso

Abstract

The risk management has become increasingly important within the financial scenario. Given their importance, it is necessary to measure these risks and the financial market uses two risk measures: Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES). They can be adopted by parametric, semi-parametric and non-parametric methods, each method with its advantages. The main objective of this article is to show that estimation using non-parametric methods, despite being more costly, captures points that exceed the ES for countries with high volatility in the financial assets prices, as is it happens in Brazil. The data was extracted from the Banco Central do Brasil website, where the foreign exchange for the parities between the US Dollar and the Brazilian Real, between the US Dollar and the Euro, between the US Dollar and the Japanese Yen and between the US Dollar and the Chinese Yuan were collected. The selected time period from which the data were collected to calculate the indicators begins on January 3 of 2000 and ends on August 5 of 2021. The analyzes carried out to evaluate these indicators cover the time period starting on 05 August 2021 and ends on December 1, 2023. The software used to calculate the indicators were Microsoft Excel and Stata.

Resumo

A gestão de riscos tem se tornado cada vez mais importante dentro do cenário financeiro. Dada a sua importância, é necessário mensurar esses riscos e o mercado financeiro utiliza dois mensuradores de risco: Value at Risk (VaR) e o Expected Shortfall (ES). Eles podem ser adotados pelos métodos paramétricos, semi paramétricos e não paramétricos, cada um com as suas vantagens. O objetivo deste artigo é mostrar que a estimação por métodos não paramétricos, apesar de mais custosa, capta pontos que ultrapassam o ES para países com alta volatilidade de preços de ativos financeiros, como é o caso do Brasil. Os dados foram extraídos do site do Banco Central do Brasil, onde foram coletadas as cotações das paridades entre o Dólar americano e Real Brasileiro, entre o Dólar americano e o Euro, entre o Dólar americano e o Iene Japonês e entre o Dólar americano e o Iuan Chinês. O período selecionado de onde os dados foram coletados para o cálculo dos indicadores inicia-se em 03 de janeiro de 2000 e encerra-se em 05 de agosto de 2021. As análises feitas para a avaliação destes indicadores compreendem o período que se inicia em 05 de agosto de 2021 e encerra-se em 01 de dezembro de 2023. Os softwares utilizados para cálculos dos indicadores foram o Microsoft Excel e Stata.

1. - Introdução

Instituições financeiras utilizam o *Value at Risk* (VaR) como um importante indicador de risco financeiro que informa, dado o nível de confiança e o intervalo de tempo, o pior resultado previsto de determinada carteira. Mas, junto com esse indicador, o VaR implica em algumas questões conceituais. Este indicador de pior perda possível só é válido dentro do intervalo de confiança onde a análise foi delimitada. Caso este intervalo de confiança fosse extrapolado, o VaR não consegue determinar a previsão da pior perda possível na carteira. E, por fim, o VaR, para ser coerente, deve ser subaditivo (YAMAI e YOSHIBA, 2004).

De acordo com Boudt, Peterson e Carl (2008), quando o retorno de uma carteira é assimétrico, o VaR pode não ser mais aceitável como uma medida de risco porque a carteira falha ao ser subaditiva. O risco da carteira como um todo pode ser maior do que os riscos do das posições somadas apesar dos efeitos de diversificação da carteira, no caso do VaR. Apesar disso, por conta do VaR não ser uma função convexa que exerça peso na carteira, a otimização da carteira de VaR médio é mais difícil de se programar. O ES, ao contrário, é uma medida de risco coerente e é uma função convexa que exerce peso na carteira. Ele também é de implementação ampla nas carteiras de retornos anormais.

O VaR e o ES são úteis na definição de referências para os requisitos de capital do comitê de Basiléia, na quantificação e regulação do risco assumido pelos participantes de mercado, assim como na alocação de capital disponível em procedimentos de gestão de riscos. O principal uso destes indicadores é garantir que o risco pelas instituições financeiras permaneça dentro dos seus parâmetros de apetite ao risco. Essa avaliação deve acontecer em tempo hábil para que a ação corretiva necessária seja tomada, caso seja necessário (SCAILLET, 2004).

As instituições financeiras calculam o risco potencial futuro, que é muito importante atualmente. Além de seguir as normatizações da Supervisão Bancária do Comitê de Basiléia, o gerenciamento de riscos auxilia na melhor alocação de capital. Na prática, o ES fornece uma medida de risco mais razoável no contexto de magnitude de risco, que também é maior do que o valor fornecido pelo VaR. Essas medidas são utilizadas por instituições financeiras para determinar o mínimo de capital exigido para suportar qualquer evento catastrófico de mercado. Isso pode ser útil para planejar e implementar políticas de gerenciamento de riscos apropriadas contra eventos incertos (KUMAR e MAHESWARAN, 2016).

Fermanian e Scaillet (2004), ao afirmar que o gerenciamento de riscos avalia os impactos marginais das posições das medidas de risco e de capital regulatório, citam Kurth e Tasche (2003), Martin et al (2001) e Matin e Wilde (2002) para justificar que, conhecer a sensibilidade auxilia na otimização do tempo computacional gasto para processar grandes carteiras, a medida que elas precisam reprocessar as medidas de risco toda vez que a composição da carteira é ligeiramente modificada. E, além disso, a gestão de riscos possibilita decompor o risco da carteira global, componente por componente, e identificar as maiores contribuições de risco.

Hipótese de pesquisa

A hipótese de nossa pesquisa pode ser expressa na frase:

O modelo não paramétrico traz resultados mais precisos para o cálculo do ES do que os modelos paramétricos e não paramétricos.

Os testes vão ser feitos para as cotações de cambio entre Real brasileiro e Dólar americano, Dólar americano e Euro, Dólar americano e Iene japonês e Dólar americano e Yuan Chinês. Essas cotações foram escolhidas a fim de poder comparar a volatilidade do câmbio de um país emergente (Brasil) contra o dólar americano e da volatilidade do câmbio de países com maior representatividade no cenário internacional (Europa, Japão e China) contra o dólar americano. O período estipulado para o cálculo dos indicadores se inicia em 03 de janeiro de 2000 e vai até 05 de agosto de 2021. E para analisar a efetividade dos indicadores, foram coletados os dados compreendidos entre 05 de agosto de 2021 a 01 de dezembro de 2023.

De acordo com Yamai e Yoshiba (2004), o ES traz vantagens e desvantagens. Quando a distribuição está em uma cauda gorda, os estimadores de erro do ES são muito maiores do que o VaR, ou seja, ele é muito mais custoso do que o VaR. Mas, por outro lado, o ES trabalha muito bem como complemento do VaR a fim de gerenciamento de riscos.

2. - Regulação Financeira

A medida de risco, por si só, não considera a distribuição na qual essa medida de risco é formada ou o seu nível de confiança. Portanto, faz com que a medida de risco capture parcialmente a exposição ao risco e perca parte do risco que a instituição está sujeita. No caso da crise do *subprime*, o risco sistêmico colocou em risco a economia como um todo (GUEGAN e HASSANI, 2017). A crise do *subprime* foi um grande alerta às instituições financeiras e aos governos sobre a necessidade de regulações financeiras mais rígidas. O sistema bancário brasileiro segue regras bem definidas pelo Banco Central do Brasil que, após a crise de 2008, foram estudadas pelo governo americano a fim de garantir maior solidez ao sistema bancário americano, dadas as especificidades de cada país. Além das características das economias e sistemas bancários que cada país tem, existe o Comitê de Basiléia

A regulação financeira se foca em garantir a segurança individual das instituições financeiras com o objetivo declarado de proteger os titulares contra as responsabilidades da instituição. Um regulamento com esse foco é conhecido como regulação microprudencial e, com a crise do *subprime*, em 2008, a regulamentação passou a incluir também os objetivos macroprudenciais. A regulação macroprudencial visa garantir a estabilidade do sistema financeiro como um todo. Mas, embora os reguladores tenham uma grande variedade de instrumentos que os ajudam a cumprir os seus objetivos, estabelecer requisitos de capital continua sendo um dos pilares centrais da prudência na regulamentação. Para se adequar a esses requisitos, dois testes de adequação de capital são utilizados pelos reguladores financeiros: o *Value at Risk* (VaR) e o *Expected Shortfall* (ES). No setor bancário, até a crise do *subprime*, desencadeada em 2007, o VaR era o principal indicador para regular a adequação de capital das instituições financeiras. Após essa crise, surge a necessidade do terceiro acordo de Basiléia que, entre outras medidas, estipula o ES para avaliação do risco de mercado (KOCH-MEDINA e MUNARI, 2015).

De acordo com Guegan e Hassani (2017), é obrigatório que cada departamento da instituição financeira avalie o risco associado às diferentes atividades da instituição. E, para cada fator de risco X, podem ser definidas uma série de informações que correspondem a vários valores de X coletados em períodos anteriores. Portanto, uma série de informações $I = (X_{1,} X_2, X_3, \dots X_n)$ é obtida para o fator de risco X. Esses valores representam os resultados da evolução passada do fator de risco e são, *a priori*, desconhecidos. Devido a essa incerteza o fator de risco X é uma variável aleatórias e, a cada valor X_i, i = 1, ...n uma probabilidade pode ser associada. A função matemática que descreve os valores possíveis de uma variável aleatória e suas probabilidades associadas é conhecida como uma distribuição de probabilidade. Nesse contexto, o fator de risco X é uma variável aleatória que é entendida como uma função definida em um espaço amostral, cujas saídas são valores numéricos: os valores de X pertencem a R, e a distribuição de probabilidade F é contínua, tomando qualquer valor numérico em um intervalo ou conjuntos de intervalos, por meio de uma densidade de probabilidade da função F. Assim que se conhece a função de distribuição F contínua e estritamente monotônica, pode-se considerar a função distributiva cumulativa (c.d.f.) F_x: R -> [0, 1] da variável aleatória X. A função de quantil Q retorna um valor limite x abaixo do qual é tirado aleatoriamente do c.d.f fornecido e cairia p por cento do tempo. Em termos da função de distribuição F_x, a função de quantil Q retorna o valor x de modo que:

$$F_x(x) := \Pr(X \leq x) = p \tag{01}$$

e

$$Q(p) = \inf \{x \in R : p \leq F(x)\}, \tag{02}$$

para uma probabilidade $0 \leq p \leq 1$.

O VaR e o ES são mensurações de riscos utilizadas pelos reguladores para avaliar a necessidade de capital mínima para se assegurar contra um grande prejuízo. Do ponto de vista econômico, esses requisitos de capital impactam o risco ponderado dos ativos. Ou seja, os ativos das instituições ou exposições de ativos ou passivos que não aparecem em balanço, são ponderados de acordo com o risco. Este risco ponderado é utilizado na ponderação de capital que representam as exposições de capital das instituições financeiras. Essas relações são rastreadas pelos reguladores para garantir que as instituições financeiras consigam absorver grande parte das perdas foram evoluindo conforme os regulamentos das reuniões de Basiléia foram acontecendo. O descumprimento dessas normas em termos dos índices de adequação de capital exigiria que as instituições financeiras levantassem capital a um custo alto a ponto de impedir de criar formas de gerar novos canais de receita ou novos negócios, desta forma, elevar a sua lucratividade (GUEGAN e HASSANI, 2017).

Puccetti e Rüschendorf (2014) afirmam que as instituições financeiras devem reservar um montante de capital regulatório a fim de definir a sua exposição ao risco anual. No caso do risco operacional, o risco de capital costuma ser calculado como *Value at Risk* (VaR) com elevado nível de confiança para uma variável aleatória L de perda agregada, tal como:

$$L = \sum_{i=1}^{d} L_i, \tag{03}$$

onde L_1, L_2, ..., L_d correspondem às variáveis aleatórias de perda para diferentes linhas de negócio e/ou tipos de risco sobre determinado período. O VaR de perdas agregadas L, calculado em um nível de probabilidade $\alpha \in (0,1)$, é o α-quantil da distribuição:

$$VaR_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) \geq \alpha\}, \tag{04}$$

onde $F_L(x) = P(L \leq x)$ é a função de distribuição de L. Valores típicos na prática de risco operacional dentro da Basiléia II são $\alpha = 0{,}99$; $\alpha = 0{,}995$; $\alpha = 0{,}999$ e T = 1 ano.

O ES possui funcionalidades que podem não surpreender de uma perspectiva matemáticas, mas elas levam a anomalias surpreendentes quando interpretadas por uma perspectiva financeira, que busca atender os objetivos tanto microprudenciais como macroprudenciais. A forma como o ES trata os valores de cauda explica essas anomalias. As médias são indicadores fracos para este fim. Essas anomalias não diminuem a importância do ES como medida de risco, mas fornecem argumentos contra o seu uso indiscriminado (KOCH-MEDINA e MUNARI, 2015).

Apesar do VaR ter se tornado a medida de risco mais popular, foram identificadas deficiências. O VaR não é uma medida de riscos coerente (ele falha no critério de subaditividade) e é incapaz de capturar o impacto de eventos que ultrapassam o seu parâmetro de confiança. A crise do *subprime* trouxe a questão da aplicabilidade do VaR como parâmetro de risco métrico e o Comitê de Basiléia coloca o ES como a alternativa natural para quantificar esse risco (PUCETTI e RÜSHENDORF, 2014).

3. - *Value at Risk* e *Expected Shortfall*

O VaR se tornou a medida de risco padrão adotada pelas instituições financeiras para definir a exposição ao risco de mercado de uma posição financeira (CONSIGLI, 2002). O VaR define a perda máxima, dado certo nível de confiança e certo intervalo de tempo, de uma carteira escolhida.

Para o cálculo do VaR existem três abordagens: a não paramétrica, a semi paramétrica e a paramétrica. Qualquer abordagem destas pode ser validada pelo número de exceções na comparação com os erros do VaR estimado, o que pode ser relatado como a projeção da probabilidade de cauda (KUMAR e MAHESWARAN, 2016).

Seja *Y* representante de uma posição financeira expressa como uma variável aleatória de um número real. Assim, Chen (2018) fala que o VaR descreve o limite superior do intervalo de perdas [-∞, z_α], que ocorre de forma variável dentro de $f_{(x)}$, a probabilidade da função de probabilidade os retornos de *Y*, no limite de α ϵ (0,1) (apud Danielsson e Zingrand, 2006, p. 2702):

$$A = \int_{-\infty}^{z_\alpha} f_Y(x)dx \qquad (05)$$

Isso quer dizer que o VaR, matematicamente, ao nível de confiança 100(1 – α)% é definido como o percentil superior de 100α da distribuição de perdas. Se X é a variável aleatória que trata da perda na carteira, pode-se definir o VaR, ao nível e confiança de 100(1 – α)% como:

$$VaR\alpha(X) = \sup\{x \mid P[X \geq x] > \alpha\}, \qquad (06)$$

onde sup{x| A} é o limite superior de x dado evento A, e onde sup{x| P[X ≥ x] > α} indica o percentil superior 100α de distribuição de perda. Esta definição serve tanto para as distribuições de perda contínua e a discreta (YAMAI e YOSHIBA, 2004).

Tanto VaR como ES são medidas de riscos lei-invariantes, desde que ambas as medidas de risco dependam unicamente de distribuições de perdas. Medidas de lei-invariantes são de interesse especial em regulações financeiras porque os seus valores só dependem da distribuição de perdas e a estimação não precisa de informações adicionais além dos cenários de estresse (CHEN, 2018).

Artzener *et al.*(1999) são citados por Yamai e Yoshiba (2004) ao propôr o *Expcted Shortfall* como alternativa para suavizar os problemas gerados pelo VaR. Conhecido também como VaR Condicional, o ES é a expectativa condicional de perda que ultrapassa os limites do VaR. O ES é dado por:

$$ES\alpha(X) = E[X \mid X \geq VaR\alpha(X)] \qquad (07)$$

O ES indica a perda média quando ela excede os limites do VaR. Em outras palavras, Mehlitz e Auer (2020) afirmam que o VaR considera apenas a probabilidade, mas não o impacto das grandes perdas. Além disso, Artzener *et al* (1999) e Basak e Shapiro (2001) também são citados por Mehlitz e Auer (2020) ao afirmar que o VaR não leva em conta a questão de diversificação de riscos da carteira porque não cumpre importantes propriedades de subatividade e convexidade, respctivamente. Já o ES não sofre dessas deficiências pelo fato de o ES fornecer o valor médio das perdas que excedem os parâmetros definidos pelo VaR. Dessa forma, os reguladores do Comitê de Basiléia III sugerem a troca do VaR pelo ES no cálculo dos requerimentos de capital dos bancos. Além disso, Hmantzis *et al* (2006), Reboredo (2013), Yao *et al* (2013), Paraschiv *et al* (2015), Digiannakis e Potamia (2017) e Stavroyiannis (2018) são citados por Mehlitz e Auer (2020) ao afirmar que o uso do ES na construção e avaliação do estoque, títulos, *commodities*, moedas e até mesmo *bitcoins* estão se tornando cada vez mais populares.

Segundo Boudt, Peterson e Carl (2008), em relação à questão da estimativa do VaR e ES da carteira, as equações de VaR e ES são definidas em função das distribuições dos retornos das carteiras e essas funções de distribuição são desconhecidas para séries de tempo real. Muitas vezes o VaR e o ES são calculados pressupondo a normalidade. Os estimadores calculados, o VaR gaussiano e o ES gaussiano, não respeitam o fato de que os retornos de vários ativos não seguem uma distribuição normal. Os métodos que levam em conta a não normalidade de distribuição de retornos reais produzirão estimações de riscos relativos a quedas mais certeiros do que os riscos fornecidos pelo VaR gaussiano e o ES gaussiano.

As metodologias, que levam em conta a não normalidade de um retorno de distribuição, mais populares para estimar as funções de distribuição como distribuições normais mais os termos de correções que consideram a assimetria e o excesso de curtose observado nos dados são as expansões de Cornish-Fisher e de Edgeworth. Como resultante dessas metodologias temos o VaR modificado e o ES modificado. O VaR modificado é um dos estimadores mais populares para avaliar o risco de fundos de *hedge* e outros ativos com distribuições não-normais e que têm sido amplamente usados como critérios de seleção de carteiras. O ES modificado foi obtido baseado nas expansões de densidade e funções quantis de Cornish-Fisher e de Edgeworth e estima, de maneira mais assertiva, o risco e queda, mesmo na presença de retornos não-normais (BOUDT, PETERSON e CARL, 2008).

Kumar e Maheswarn (2016) falam que a volatilidade é o ingrediente principal para processar e projetar o VaR e ES. Dessa forma, projeções de volatilidade precisas são cruciais para gerar projeções de VaR e ES mais precisos. A estimação e projeção do VaR e ES se focam na volatilidade dos modelos de estruturas de heteroscedasticidade condicional autorregressiva generalizada (GARCH, em inglês), com especificações de termos de erro extraídos de várias distribuições. A popularidade dos modelos de volatilidade GARCH permite a captura de vários fatos estilizados, tais como a volatilidade de grupos, caudas gordas e volatilidade de reversão média.

Segundo Yamai e Yoshiba (2002), o VaR e o ES têm risco de cauda quando o VaR ou o ES falham em mostrar os resultados das escolhas relativas de carteiras baseadas na subestimação do risco de cauda e as suas propriedades de caudas gordas e mesmo os seus potenciais de grandes prejuízos.

Os gerentes de risco têm uma grande variedade de opções entre os métodos de estimação do ES e, em geral, utilizam duas abordagens: regressões ou simulações. As regressões trazem a dificuldade de ter os resultados vinculados às características do conjunto de dados empíricos analisados. Fora isso, procedimentos de estimação de ES mais sofisticados são limitados a classes específicas de estimadores. Já as configurações de simulações são mais flexíveis porque eles permitem a distribuição de várias configurações para ver qual estimador se comporta melhor, ou mesmo, qual é o melhor comparativamente, dado determinado cenário (MEHLITZ e AUER, 2020).

3.1 - O risco de cauda de VaR e ES em distribuições normais

Em casos de distribuições normais de ganhos e perdas, o VaR e o ES fornecem informações bem parecidas. O VaR falha quando ele apresenta risco de cauda e, desta forma, ele não consegue resumir o risco relativo das carteiras devido à subestimação do risco de carteiras com propriedades de caudas gordas, ou seja, alta probabilidade de grandes perdas. O risco de caudas gordas do VaR existe pela sua análise, que limita-se a excluir dos seus parâmetros a área de cobertura que excede os valores do VaR. Isso pode levar a procurar ativos com alto potencial de perdas grandes e riscos menores que ativos com potencial menor de perdas grandes (YAMAI e YOSHIBA, 2004).

Quando a distribuição de perdas é normal, o ES é calculado da seguinte forma:

$$ES_{\alpha}\,(\mathrm{X}) = \mathrm{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{X} \geq VAR_{\alpha}(\mathrm{X})] = \frac{1}{\alpha\sigma_X\sqrt{2\pi}}\int_{VaR_{\alpha}(X)}^{\infty} t\ .\ e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2 X}}\mathrm{d}t = \frac{e^{\frac{-q_{\alpha}^2}{2}}}{\alpha\sqrt{2\pi}}\,\sigma_X \qquad (08)$$

onde q_{α} é superior ao percentil 100α de distribuição normal padrão (YAMAI e YOSHIBA, 2004).

Yamai e Yoshiba (2004) ainda mostram que o VaR e o ES não têm risco de cauda quando a distribuição de ganhos e perdas é normal. A não normalidade da distribuição dos ganhos e perdas é causada pela ausência de linearidade da posição da carteira ou nos preços dos ativos. Para exemplificar, ao se adotar, nesta equação, ES com 99% de nível de confiança, é o mesmo que se multiplicar o desvio padrão por 2,67, que é o mesmo nível com VaR a 99,6% de nível de confiança.

O VaR e o ES são, muitas vezes, calculados sobre o pressuposto de normalidade e, na prática, é um fato estilizado que o retorno de muitos ativos financeiros não siga uma distribuição normal. Os métodos que levam em consideração a não normalidade da distribuição de retorno produzem, em casos de distribuições não normais, estimativas de risco de desvantagem mais precisas do que os VaR e ES gaussianos (BOUDT, PETERSON e CARL, 2008).

Estimar o índice de cauda é um dos primeiros objetivos na Teoria de Valor Extremo. Para distribuições com caudas pesadas, o estimador de Hill é a forma mais comum de estimar este parâmetro (NÉMETH e ZEMPLÉNI, 2020).

Tendo como base os argumentos teóricos ou dados prévios, acredita-se ou, pelo menos, desafia-se a hipótese, que a distribuição G tem uma forma funcional conhecida. Ou seja, G(y) = w(y, θ), para y suficientemente grande, onde θ é o vetor de parâmetros. Podemos dizer que um número D é conhecido, de tal forma que, para y ≥ D, essa forma funcional é válida. Logo, D não precisa ser o menor valor para que essa afirmação seja verdadeira, portanto, podem ser escolhidas situações relativamente conservadoras. Quando o G como um todo é desconhecido, os métodos paramétricos ordinários não estão disponíveis e, possivelmente, eles sejam plausíveis intuitivamente para servirem de base para θ, em valores cujas estatísticas excedem D, desde que ele se localize na região onde se acredite que tenha o formato da distribuição G. Portanto, os valores cujas estatísticas devem ser consideradas em um evento condicional ou dados para a proposta de inferência em θ.

3.2- Estimação Não-Paramétrica do ES

Chen (2008) supõe que, seja $\{X_t\}_{t=1}^{n}$ os valores de mercado de um ativo ou carteira de ativos durante *n* períodos de tempo e que seja Y_t = - log(X_{it}| X_{it-1}) o retorno do log negativo sobre o período *t*. Então suponha que $\{Y_t\}_{t=1}^{n}$ seja um processo estacionário com uma função F de distribuição estacionária. Dado um valor positivo p próximo a zero, o VaR com um nível de confiança γ é:

$$\nu_p = \inf\{u : \mathrm{F}\ (u) \geq \gamma\} \tag{09}$$

onde o γ é a posição crescente do quantil de distribuição de perdas F. O VaR especifica um nível de perdas excessivas, tal que a probabilidade de uma perda maior do que ν_p seja menor do que *p*. Uma grande lacuna do VaR, somada ao fato de não ser uma medida de risco coerente, é que o VaR não fornece informações sobre a extensão de perdas excessivas e nem de especificar um nível que defina as perdas excessivas. Por outro lado, o ES é uma medida de risco que não é só coerente, mas também informativa em relação às perdas maiores do que ν_p.

Mehlitz e Auer (2020) tratam de algumas notações e definições formais de ES. Seja (X_t) uma série de tempo de retornos negativos dos ativos em que se assume uma sequência de variáveis independentes de maneira independente e idêntica. Para cada nível de confiança γ, o VaR_γ é definido então como o quantil 1-p da função de distribuição cumulativa de (X_t). Com a função de densidade probabilística de perdas, o ES é dado por:

$$\mathrm{ES}_{1-p} = \frac{1}{1-\gamma}\int_{VaR_\gamma}^{\infty} xf\ (x)\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\gamma}\int_{\gamma}^{\infty} VaR_v \mathrm{d}v \tag{10}$$

Chen (2008) ainda afirma que o ES associado com um nível de confiança γ, que pode ser considerado como μ_p, é a expectativa condicional de perda se a perda é maior do que ν_p, e então encontra-se:

$$\mu_p = \mathrm{E}(Y_t |\ Y_t > \nu_p) \tag{11}$$

A estimação do ES pode ser feita, ainda nas palavras de Chen (2008), assumindo uma distribuição de perda paramétrica, que é o método mais comum utilizado nos trabalhos sobre o tema. Mas o método não paramétrico traz a vantagem de ser um modelo livre, logo é um modelo robusto, que evita o enviesamento causado pela distribuição incorreta da perda esperada. O gerenciamento de riscos se foca nas características de distribuição de perdas concentradas na cauda, o que torna complicado adequar o modelo a um modelo paramétrico. E ainda deve-se notar que, normalmente, os dados são esparsos na cauda. A abordagem não paramétrica também tem a característica de cobrir uma grande quantidade de dados, o que torna favorável a sua utilização para fins de perdas financeiras.

Artzener *et al*. (1999) é citado por Scaillet (2004) ao tratar da preferência do uso do ES frente ao VaR na mensuração de risco por conta das suas propriedades superiores. O ES, também chamado de Cauda do VaR, é subaditivo para distribuições de risco contínuas, ao contrário o VaR. Esta propriedade de subaditividade é parte necessária para ser considerada uma medida de risco coerente. Dessa forma, consegue-se expressar a ideia de que o risco total de uma carteira não pode ser maior do que a soma dos riscos individuais. E, ao contrário do ES, que informa o tamanho da perda quando ela excede o limite determinado no VaR, o VaR não indica nada sobre a perda potencial quando esse limite é extrapolado.

A estimação do ES pode ser obtida ao se assumir uma distribuição de perdas paramétrica. Frey e McNeil (2002) são citados por Chen (2008) ao tratarem sobre um modelo binomial para estimar o ES e o VaR para uma carteira grande e balanceada. E, no que se refere a alocação de carteiras, Scaillet (2004) fala de um estimador kernel não paramétrico para análise de sensibilidade.

3.3 - Exemplo de Risco de Cauda

Embrehts, Klüppelberg e Mikosch (1997) supõem uma carteira de investimentos com determinado número de ativos, cujos quais têm seus respectivos valores em seus respectivos períodos. Como todo ativo tem uma distribuição de lucros e prejuízos, eles podem ser representados por uma distribuição de probabilidades que mostra as mudanças de valores. Pelas estimativas das covariâncias das carteiras, o gerente de carteiras estima a carteira geral de distribuição de lucros e prejuízos. Gerentes e reguladores calculam o *Value at Risk* (VaR) e, após estimar o VaR, é importante estimar a probabilidade do valor atingido ultrapassar os limites definidos pelo ele.

Yamai e Yoshiba (2002d) dizem que o VaR tem risco de cauda quando o VaR falha ao indicar a melhor escolha entre as carteiras, o que pode resultar na escolha que subestima o risco de carteiras com propriedades de caudas gordas e um alto potencial para perdas grandes. O risco de cauda do VaR surge na medida que ele mede a distribuição de ganhos e perdas e desrespeita qualquer prejuízo que desrespeita o limite imposto pelo VaR. Uma carteira A de 10 milhões com VaR de 99 por cento de nível de confiança, ao ser comparada com uma carteira B, com o mesmo nível de confiança de VaR, mas de 15 milhões, pode levar à conclusão de que a carteira B é mais arriscada do que a carteira A. No entanto, o investidor pode não saber o quanto ele pode perder ao atingir um ponto fora do nível de confiança. Quando a perda máxima da carteira A for maior do que a perda máxima da carteira B, a carteira A deve ser considerada mais arriscada do que a carteira B no pior dos cenários.

Em relação ao risco de cauda do ES, assim como o risco de cauda do VaR, Yamai e Yoshiba (2002d) afirmam que o ES tem risco de cauda quando o ES falha ao indicar a melhor escolha entre as carteiras, o que pode resultar na escolha que subestima o risco de carteiras com propriedades de caudas gordas e um alto potencial para perdas grandes. Supondo que a carteira A nunca atinge um ponto de prejuízo de 50 por cento de seu valor e o prejuízo da carteira B pode atingir 75 por cento do seu valor, conclui-se que a carteira B é mais arriscada do que a carteira A em relação aos prejuízos extremos.

3.4 - Sensibilidade do Expected Shortfall

3.4.1 - Definição do Expected Shortfall

Scaillet (2004) considera um processo estritamente estacionário $\{Y_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ considerando os valores em $\mathbb{R}^n$ e assumir que os dados consistem na realização de $\{Y_t;\ t = 1, ..., T\}$. O vetor $Y_t = (Y_{1,t}, \dots, Y_{n,t})$ corresponde a *n* riscos sobre um dado período no tempo. Os dados podem corresponder a valores simulados desenhados de um modelo paramétrico (VARMA, GARCH multivariado, ou processos de difusão), possivelmente dentro de outro conjunto de dados. As simulações são necessárias quando a estrutura de ativos financeiros é muito complexa, tais como para alguns derivativos. Assim, ao controlar o tamanho da amostra T, pode-se aumentá-la a fim de obter estimativas satisfatórias.

O ES associado à carteira com alocação a é definida por

$$m(a, p) = E[\ -a'Y > VaR\ (a, p), \qquad (12)$$

onde VaR(a, p) está implicitamente definido por

$$P[-\ a'Y > VaR(a, p)] = p \qquad (13)$$

De acordo com Puccetti e Rüschendorf (2014), ao contrário do VaR, o ES contabiliza o risco de cauda de maneira mais abrangente, considerando o tamanho da probabilidade de perdas acima do limite definido pelo VaR. O ES também é uma medida mais pessimista, na medida que

$ES_{\alpha}(L) \geq VaR_{\alpha}$(L), para todo ϵ (0, 1). (14)

Ainda sob as palavras de Puccetti e Rüschendorf (2014), tanto o cálculo de VaR_{α}(L), como o de ES_{α} necessitam do conhecimento da função de distribuição em conjunto de risco e carteira (L_1, ..., L_d). Dessa forma, geralmente é necessário uma série de dados d-variáveis para as perdas passadas, o que pode ser difícil de conseguir. Normalmente, somente as funções de distribuição marginal dos tipos F_i de L_i põem ser estimadas de forma estatística. Portanto, é normal solicitar uma estimativa conservadora de VaR_{α}(L) e ES_{α}(L) quando as distribuições marginais dos riscos uni variados L_i são fornecidos, mas sem conhecer nenhuma informação de dependência sobre o conjunto de risco da carteira (L_1, ..., L_d). Para um α ϵ (0, 1), e uma série de distribuições marginais F_1, ..., F_d, é definido o pior VaR e o pior ES pra agregar a posição L como

$\overline{VaR}_{\alpha}$(L) = sup {$VaR_{\alpha}(L_1$ + ... + $L_d)$; $L_i \sim F_i$, 1 ≤ i ≤ d}, (15)

$\overline{ES}_{\alpha}$(L) = sup {$ES_{\alpha}(L_1$ + ... + $L_d)$; $L_i \sim F_i$, 1 ≤ i ≤ d}. (16)

$\overline{VaR}_{\alpha}$(L) e $\overline{ES}_{\alpha}$(L) representam as maiores estimativas de VaR_{α}(L) e ES_{α}(L), respectivamente, quando as distribuições das variáveis aleatórias L_1, ..., L_d são conhecidas.

3.4.2 - Sensibilidade do Expected Shortfall

A proposição a seguir, que caracteriza a sensibilidade do ES em relação às alterações locais na estrutura da carteira, é o derivado de primeira ordem $m^{(1)}$(*a,p*) = ∂*m*(*a,p*)/ ∂*a*´ do ES em relação à alocação da carteira (SCAILLET, 2004).

3.4.3 – Proposição

O derivado de primeira ordem do ES em relação à alocação de carteira é $m^{(1)}$(*a,p*) = *E*[- *Y* | - *a*´*Y* > VaR (*a,p*)] (17)

O ES e seu derivado de primeira ordem são relacionados linearmente através de *m*(*a,p*) = $a´m^{(1)}(a, p)$. Isso é devido à homogeneidade de grau um do ES. A quantidade $a_i \partial m(a, p)/\partial a_i$ é chamada de ES incremental do ativo *i* por analogia com a terminologia existente do VaR. Na verdade, o VaR também divide a propriedade da homogeneidade. ES incrementais e VaR incrementais podem ser utilizadas para ordenar posições de ativos em relação a sua contribuição para o risco total da carteira mensurado pelo ES e pelo VaR (SCAILLET, 2004).

4. - Hedge Estático e derivativos multivariados

Em um hedge estático, se a chamada for redundante, existe uma carteira de ativos negociados que possuem correlações negativas sem a necessidade de rebalancear esta correlação continuamente. Quando se fala de derivativos, pode-se tratar da paridade *put-call*, que é um exemplo muito simples quando se aplica essa equação para hedgear com uma call (ou put) uma carteira com put (ou call). Esta aproximação funciona nos casos de uma árvore binomial, mas a cobertura estática não tem custo extra, fora o custo com a compra inicial (PELLIZZARI, 2005).

É possível alterar o VaR a um nível arbitrário através da negociação de derivativos do ativo em questão. Dado o nível desejado do VaR, é possível, por exemplo, vender uma *put* com o preço de exercício logo abaixo do VaR do quantil inferior da distribuição de lucros e prejuízos e, comprar uma *put* com um preço de exercício logo acima do VaR desejado. Essa estratégia aumenta o risco de uma grande perda. Ou seja, nessa situação, o risco de cauda do VaR pode ser significante ao operar derivativos. Mas o VaR falha ao considerar os prejuízos que ultrapassam os seus limites. (YAMAI e YOSHIBA, 2002).

Desta forma, Ben Ameur *et al.* (2001) é citado por Pellizari (2005) ao tratar de *hedge* parcial, que protege uma parte do ativo. Quando o montante necessário para um *hedge* perfeito não está disponível, os agentes podem montar um *hedge* que proteja parte do valor total o ativo. Caso a estratégia de *hedge* falhe em proteger os ativos, o agente pode tomar alguma ação para solucionar as falhas. Uma opção de compra europeia, por exemplo, só protegerá o ativo se o preço de exercício não estiver abaixo do preço de *strike* da opção. Esta forma é a de menor custo, apesar de menos segura, de proteger-se contra os riscos. Assim, Follmer e Leukert (2000) são citados por Pellizari (2005) para mostrar como otimizar um *hedge*, minimizando uma série de solicitações sob uma restrição orçamentária, a ponderação do ES por uma função de perda que depende do risco tomado pelo agente.

4.1 - Exemplificando a estratégia de Hedge

Para exemplificar a estratégia de *hedge*, Pellizzari (2005) supôs uma cesta com duas ações log-normais de risco, cuja dinâmica é descrita por

$$\mathrm{D}S_i = rS_i\,\mathrm{d}t + \sigma S_i \mathrm{d}Z_i, \qquad i = 1, 2, \qquad (18)$$

onde r, σ_1, σ_2 são constantes e Z_1 e Z_2 são movimentos brownianos padrão. Destacam-se os valores de ativos no tempo t por S_{1t}, S_{2t} para $0 \le t \le T$. O resultado da expiração é

$$f(S_{1T}, S_{2T}) = \max(S_{1T} + S_{2T} - k, 0) \qquad (19)$$

Com os preços iniciais $S_{10} = S_{20} = 100$; volatilidades $\sigma_1 = 0{,}3$ e $\sigma_2 = 0{,}2$; correlações entre os retornos como $p = 0{,}5$, vencimento $T = 1$ ano, preço de exercício $k = 190$ e taxa livre de risco $r = 0{,}1$.

Ao aplicar uma simulação de Monte Carlo utilizando 100 repetições chega-se ao preço $C_{MC} = 3{,}89$ com um desvio padrão de $\sigma_{MC} = 3{,}26$.

Dessa forma, Pellizzari (2005), para diminuir o tamanho do desvio padrão, utilizou outro método mais refinado para melhorar o preço de Monte Carlo médio $C_{MMC} = 33{,}34$ com desvio padrão de $\sigma_{MMC} = 0{,}40$ para 100 simulações. Desta forma, o desvio padrão foi reduzido para 88%. O método também mostra que uma carteira de opções de compra pode ser usada para hedgear os resultados de uma cesta de opções. Considerando $t = 0$ em uma posição comprada, com 0,96 opções de compra do primeiro ativo e 1,01 opções de compra do segundo ativo, sendo, respectivamente, 94,88 e 89,71 os preços de exercício. A fim de obter esta carteira, em $t = 0$, devem ser tomados 5,59 adicionais para serem pagos com juros no seu vencimento. Esta carteira fornece um resultado que, numa soma entre seus ativos, pode ser utilizado para se proteger dos resultados aleatórios da cesta de opções. De fato, a diferença em conjunto entre os resultados da cesta de opções e o valor da carteira de *hedge* é a média nula com o desvio padrão $\exp(rT)\sigma_{MMC}\sqrt{100} = 4{,}4$. O desvio padrão do resultado das opções é por volta de 36 e, por isso, usando a carteira de *hedge* mencionada anteriormente, o risco foi reduzido para um fator de cerca de 8.

Uma vez que se estabelece uma opção de compra, se assegura o preço. A partir dessa possibilidade, obtêm-se duas possibilidades: não obter proteção nenhuma ou então o *delta-hedging*, que trata-se de uma estratégia para hedgear parcialmente ou totalmente a operação. Por um lado, pode-se aceitar o fato de ter que suportar um risco grande, com uma média de pagamento final nulo, com um desvio padrão de 36, conforme demonstrado anteriormente. A outra possibilidade, o *delta-hedging*, é impreciso e caro, considerando uma situação real. Ainda existe uma terceira possibilidade, baseada na própria carteira já descrita, que protege parcialmente os resultados da opção, com um risco de 4,4, conforme demonstrado na tabela a seguir (PELLIZZARI, 2005).

Tabela 1 - Performance de hedge através de diferentes métodos

Método	*Hedge*	Risco (σ)	Redução do Risco (%)	Custo	Proteção da Carteira
MC	Nenhum	36	0	Nenhum	Nenhum
Estático	Parcial	4,4	88	Baixo	Estático, 2 opções de compra
Dinâmico	Total	0	100	Alto	Dinâmico, base em delta

O ES é obtido pela média da ordenação dos erros ao atingirem o valor de vencimento, dado o intervalo de confiança. Os intervalos de confiança adotados pelo mercado variam entre 95% e 99%. Utilizando esses parâmetros, considera-se uma carteira de opções europeias para dois ativos de risco, S_1 e S_2, que resulta em $\max(S_{1T} + S_{2T} - k, 0)$ e seleciona os parâmetros da estratégia de *hedge* descrita anteriormente. Pellizzari (2005) simulou 1000 estratégias com os ativos com rebalanceamentos aproximados das carteiras de *hedge* baseados em delta. Como não existe fórmula para calcular os deltas de uma carteira de opções, elas são mais bem calculadas por simulações de Monte Carlo. Os parâmetros do *hedge* estático são calculados tabela 2 abaixo:

Tabela 2 - Parâmetros de uma carteira de hedge estático (desvios padrão demonstrados entre parênteses)

	Quantidade	Valor
Opção de Compra em S_1	1,00	98,06

	(0,010)	(0,38)
Opção de Compra em S_2	1,01	89,17
	(0,006)	(0,36)
Caixa	-3,87	
	(0,27)	

Na tabela 2 verifica-se que a carteira ótima do *hedge* estático é composta por uma opção de compra em S_1 com um valor de 98,06, e 1,01 opções de compra em S_2, com valor de 89,17. Ambas as opções têm vencimento em um ano e tomam 3,87 em t = 0. Pellizzari (2005) cita Avellaneda et al ao afirmar que a constante b_0 que foi utilizada na regressão para calcular os pesos, já descontados no tempo t = 0. Então percebe-se que este montante é uma pequena fração de cerca de 10% do preço, que gira em torno de 33,34. Também se nota que as gregas da carteira de opções, Δ_1 ~ 0,8 e Δ_2 ~ 0,77, mostram que o empréstimo necessário para iniciar uma estratégia de *hedge* dinâmico é enorme, comparando um valor acima de 120 contra os 3,27 anteriores. Isso é comum em todos os deltas baseados em *hedges*, quase independente dos perfis de resultados e do número de recursos de riscos. Deve-se tomar um montante considerável ou usar outro recurso de caixa no início do *hedge* dinâmico. O fato prático mais interessante do *hedge* estático pode estar nessa pequena exigência de empréstimo.

Yamai e Yoshiba (2002) falam que o VaR pode ser reduzido a um nível arbitrário pela compra e venda de derivativos do ativo em questão. Supondo que o nível de VaR desejado seja o VaR_D, o estabelecimento desta arbitrariedade está em montar uma opção de venda com um preço de exercício logo abaixo do VaR_0, que é o quantil inferior da distribuição de lucros e prejuízos, e comprar uma opção de venda com um preço de exercício logo acima de VaR_D. Esta estratégia de negociação mostra que é possível manipular o VaR comprando e vendendo opções dos ativos. Mas como resultado desta manipulação, o potencial de grandes perdas se eleva.

5. - Estimadores comparativos

5.1 - Método Normal

McNeil *et al.* (2005) são citados por Mehlitz e Auer (2020) para justificar que uma das técnicas mais simples de estimar o ES é assumir que as perdas são normalmente distribuídas com média μ e desvio padrão σ:

$$ES_{1-p}^{ND} = \mu + \frac{\sigma}{1-\gamma} \emptyset\, [\Phi^{-1}\gamma], \tag{20}$$

onde Ø é a normal padrão da função de densidade de probabilidade e Φ^{-1} é a inversa padrão da Função Distributiva Cumulativa normal. Portanto, para obter uma estimativa empírica deve-se estimar μ e σ através da sua amostra de contrapartes e inserir os valores da estimação na equação 20.

5.2 - Método Pico sobre a Limiar

Como o ES se foca em perdas extremas, a Teoria do Valor Extremo é uma ferramenta interessante para a derivação de novos estimadores de ES. McNeil (1999) diz que o modelo de classe do Pico sobre a Limiar (*Peaks-Over-Thershold*, POT) podem ser modelos semi-paramétricos, que foram baseados no estimador de Hill e os modelos paramétricos baseados na distribuição generalizada de Pareto, *Generalized Pareto Distribution* ou GPD.

O método de Pico sobre a Limiar serve como base para o teorema de Balkema e De Haan (1974) e Pickands (1975). Este teorema relata que, para quase toda forma de distribuição de perda, a distribuição dos excessos, $Y_t = X_t - u$, sobre um grande parâmetro u é bem aproximada utilizando a GPD. Este resultado é importante, pois permite modelar a cauda da distribuição de perda sem ter que especificar a forma de distribuição de perda (MEHLITZ e AUER, 2020):

$$G(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}} & \text{se } \varepsilon \neq 0 \\ 1 - e^{\frac{-y}{\sigma}} & \text{se } \varepsilon = 0 \end{cases} \tag{21}$$

onde ξ e $\sigma > 0$ são parâmetros de forma e escala, respectivamente, conforme McNeil (1997) afirma ao ser citado por Mehlitz e Auer (2020). O suporte desta função é $y \geq 0$ quando $\xi \geq 0$ e $0 \leq y \leq -\frac{\sigma}{\xi}$ quando $\xi < 0$.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - q\left(1 + \frac{\xi(x-u)}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\xi}} & \text{se } \xi \neq 0 \\ 1 - qe^{\frac{x-u}{\sigma}} & \text{se } \xi = 0, \end{cases} \tag{22}$$

onde $q > 1 - y$ é a porcentagem de perdas X_t que excede u. Consequentemente, o VaR pode ser obtido invertendo a equação (22):

$$VaR_{1-p}^{POT} = \begin{cases} u + \frac{\sigma}{\xi}\left[\left(\frac{1-\gamma}{q}\right)^{\frac{-1}{\xi}} - 1\right] & \text{se } \xi \neq 0 \\ u - \sigma\ln\left(\frac{1-\gamma}{q}\right) & \text{se } \xi = 0 \end{cases} \tag{23}$$

McNeil e Frey (2000) são citados por Mehlitz e Auer (2020) ao calcular o ES utilizando o VaR_{1-p}^{POT} calculado na equação 23:

$$ES_{\gamma}^{POT} = \frac{VaR_{\gamma}^{POT} - \xi u + \sigma}{1 - \xi} \quad \text{para } \xi < 1 \tag{24}$$

5.3 - Estimadores não paramétricos

5.3.1 - Métodos históricos e modificações

Estimadores históricos não precisam seguir distribuições teóricas para dados empíricos e determinada amostra de dados representa as propriedades da sequência subjacente (X_t). (MEHLITZ e AUER, 2020).

Pritsker (2006) é citado por Mehlitz e Auer (2020) ao afirmar que o VaR_γ^H é utilizado para calcular o clássico estimador do ES histórico como:

$$ES_\gamma^H = \quad (X_t|X_t \geq VaR_\gamma^H) = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t \, I(X_t \geq VaR_\gamma^H)}{\sum_{t=1}^{n} I(X_t \geq VaR_\gamma^H)}, \tag{25}$$

onde $VaR_\gamma^H = X_{(\lceil n\gamma \rceil)}$ e $I(.)$ é a função do indicador matemático que mostra 1 se seu argumento for verdadeiro e 0, caso seja falso. Dessa forma $X_{(i)}$ mostra que o i-nésimo menor valor de (X_t), e $\lceil . \rceil$ é a função de teto, que é o argumento até o próximo inteiro. Como o nγ é próximo, mesmo se o nγ for apenas um pequeno número decimal, a aproximação pode introduzir um erro não-insignificante comparado ao arredondamento para baixo. Por conta disso, algumas modificações à equação 25 foram propostas. Considerando nγ como natural, essas variantes reduzem o método histórico clássico e Peracchi e Tanase (2008) são citados por Mehlitz e Auer (2020) ao propor a primeira modificação:

$$ES_{(1-p)}^{H1} = ES_\gamma^H + \left(1 - \frac{\lfloor n(1-\gamma) \rfloor}{n(1-\gamma)}\right) X_{(\lfloor n\gamma \rfloor)}, \tag{26}$$

onde um termo de correção é somado ao clássico estimador histórico e a função piso $\lfloor . \rfloor$ arredonda o valor para baixo se não for um número inteiro. A correção se foca na perda $X_{(\lfloor n\gamma \rfloor)}$ que, se ordenar (X_t) em ordem crescente, se encontraria o ponto anterior ao VaR_γ^H. Portanto, ele pode ser interpretado como o VaR que seria usado se o risco for subestimado. $X_{(\lfloor n\gamma \rfloor)}$ é ponderado pelo fator $(1 - \frac{(\lfloor n\gamma \rfloor)}{(n\gamma)})$.

Nadarajah *et al.* (2014) são citados por Mehlitz e Auer (2020) ao afirmar uma segunda modificação:

$$ES_\gamma^{H2} = \gamma \, ES_\gamma^H + (1 - \gamma \quad (X_t|X_t \geq X_{(\lfloor n\gamma \rfloor)}) \tag{27}$$

A ideia é usar a soma da ponderação do ES_{γ}^{H} e do ES, cujos resultados sobre os riscos foram subestimados. As ponderações feitas são γ e 1 - γ, respectivamente.

Por fim, Inui e Kijima (2005) são citados por Mehlitz e Auer (2020) ao usar como ponderação γ e 1 – γ na equação (10), eles são substituídos por 1 – (⌈nγ⌉ - nγ), que é a casa decimal de nγ, e ⌈nγ⌉ - nγ, respectivamente. Dessa forma:

$$ES_{\gamma}^{H3} = (1 - \lceil n\gamma \rceil + n\gamma)\, ES_{\gamma}^{H} + (\lceil n\gamma \rceil - n\gamma) \quad (X_t | X_t \geq X_{\lceil n(1-p) \rceil}), \qquad (28)$$

onde o ES estimado ganha mais peso, o que corresponde a um VaR menor, se (n - *p*) tiver uma pequena casa decimal.

Como já discutido, os estimadores históricos tratam das maiores perdas e, portanto, são sensíveis a *outliers*. Mehlitz e Auer (2020) citam Jadhav *et al.* (2009) ao eliminar dados *outliers* especificando uma constante $a \in [0, 0{,}1]$, selecionado pelo usuário para expressar o risco de ter *outliers* pela seguinte função:

$$k(t) = (n + 1)\left(1 - \gamma - \frac{t\,(1-\gamma)}{\lfloor n(1-\gamma) \rfloor + 1}\right) \text{ para } t \in \qquad (29)$$

Assim, o estimador alternativo é gerado da seguinte forma:

$$ES_{\gamma}^{J1} = \frac{1}{\lfloor n(1-\gamma)^{1+a} \rfloor + 2} \sum_{t=0}^{\lfloor n(1-\gamma)^{1+a} \rfloor + 1} X_{n - \lfloor k(t) \rfloor} \qquad (30)$$

Se *a* é pequeno o bastante, ES_{γ}^{J1} pode reduzir o estimado histórico clássico. Caso contrário, *k* exclui as maiores perdas na estimação do ES. Outra versão do estimador é :

$$ES_{\gamma}^{J2} = \frac{1}{\lfloor n(1-\gamma)^{1+a} \rfloor + 2} \left(1 - w(t)\right) X_{(n-\lfloor k(t) \rfloor)}\ w(t)\ X_{(n-1-\lfloor k(t) \rfloor)} \tag{31}$$

Considera-se a soma ponderada do ES_{γ}^{J1} e um ES menor o que o resultado da média dos menores valores de (X_t).

5.4 – Estimações Combinadas

Segundo Timmermman (2006) e Weron (2014), citados por Mehlitz e Auer (2020), os estudos em vários campos mostraram que a combinação de modelos de previsão diferentes produz resultados mais precisos do que análises individuais. Eles também se apoiam em Genre *et al.* (2013) e Claeskens *et al.* (2016) ao afirmar que quando as combinações são formadas pela média das ponderações, pesos iguais são superiores aos pesos ótimos estimados, baseados em critérios específicos, mas que são potencialmente errados.

Baseado nestes resultados, utiliza-se esta série de ES para calcular um novo. Ou seja, calcula-se uma média simples utilizando como base estes estimadores previamente calculados:

$$ES_{\gamma}^{MV} = \frac{ES_{\gamma}^{ND} + ES_{\gamma}^{POT} + ES_{\gamma}^{H} + ES_{\gamma}^{H1} + ES_{\gamma}^{H2} + ES_{\gamma}^{H3} + ES_{\gamma}^{L1} + ES_{\gamma}^{J2}}{8} \tag{32}$$

6. – Base de dados

- Os dados foram extraídos do site Banco Central do Brasil. Foram coletadas as paridades de câmbio entre o Dólar americano e Real Brasileiro, entre o Dólar americano e o Euro, entre o Dólar americano e o Iene Japonês e entre o Dólar americano e o Iuan Chinês. Os softwares utilizados para cálculos dos indicadores foi o Microsoft Excel e Stata.

7. Procedimentos metodológicos

Procuramos replicar nesta pesquisa, na medida do possível, os procedimentos metodológicos do artigo de Yamai e Yoshiba, Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective (2004), já que, após análise bibliométrica feita em O Expected Shortfall e a Gestão de Riscos: análise bibliométrica e revisão sistemática da literatura ((FUKUI e BASSO, 2022) , este artigo é o mais citado entre os trabalhos do tema. Ele compara o VaR e o ES baseado em outros 4 trabalhos prévios dos mesmos autores:

1. On the validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall (2002a)

2. Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition and Optimization (2002b)

3. Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value at Risk (2): Expected Utility Maximization and Tail Risk (2002c)

4. Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk (3): Their Validity Under Market Stress (2002d)

Para as análises empíricas, o artigo de Mehlitz (2020) foi utilizado como modelo para o cálculo dos indicadores.

Podemos disponiblizar as planilhas de cálculo, caso necessário.

8. Análise dos resultados

<u>Tabela 3 – Resultado dos cálculos dos indicadores analisados na análise empírica</u>

ES	USD BRL	EUR USD	USD JPY	USD CNY
ES ND	0.217419	0.036566	0.042638	0.035828812
ES POT	0.032071	0.033479	0.032064	0.033172918
ES H	0.023933	0.029688	0.034916	0.028786623
ES H1	0.024584	0.030568	0.035729	0.02965257
ES H2	0.023746	0.029569	0.034431	0.02868951
ES H3	0.025144	0.030256	0.034916	0.028786623
ES J1	0.032563	0.033315	0.039182	0.032303541
ES J2	0.030265	0.030963	0.036416	0.030023291
ES_{γ}^{MV}	0.051216	0.031800	0.036287	0.030905

Para os cálculos efetuados na análise empírica foram utilizados os câmbios entre os pares de moedas USD X BRL, EUR X USD, USD X JPY e USD X CNY no período compreendido entre 03 de janeiro de 2000 a 05 de agosto de 2021. Para analisar a efetividade dos indicadores, foram analisados os dados compreendidos entre 05 de agosto de 2021 a 01 de dezembro de 2023.

Com esses dados em mãos foi possível, utilizando os valores da Tabela 3, identificar dentro destes históricos a quantidade de vezes em que a variação do câmbio ultrapassou os limites estabelecidos pelo Expected Shortfall.

Tabela 4 – Volume de vezes em que o câmbio ultrapassou os limites do ES

ES	USD BRL	EUR USD	USD JPY	USD CNY
ES ND	0	0	0	0
ES POT	1	0	0	0
ES H	11	0	0	0
ES H1	8	0	0	0
ES H2	11	0	0	0
ES H3	6	0	0	0
ES J1	1	0	0	0
ES J2	2	0	0	0
ES_{γ}^{MV}	1	0	0	0

A tabela 4 mostra, a partir dos indicadores de ES calculados, quantas vezes a variação diária do câmbio ultrapassou os limites impostos do ES. Por esta Tabela 4, pode-se notar que os limites foram desrespeitados apenas na paridade USD-BRL, sendo que os maiores volumes deste evento ocorreram pelo Expected Shortfall Não Paramétrico, ou seja, nos ES baseados nos estimadores de Hill – ES H e ES H2, com 11 violações cada; ES H1, com 8 violações e ES H3, com 6 violações.

Esses pontos críticos ocorridos apenas na paridade USD BRL mostram que a volatilidade cambial tende a ser maior em países de economias em desenvolvimento. Além disso, nota-se que os estimadores históricos tendem a ser mais sensíveis a volatilidade do câmbio do que os estimadores paramétricos ou semiparamétricos.

9. - Conclusões

Ao comparar o VaR com o ES, com foco no risco de cauda ou onde o problema está quando o VaR ignora as perdas dado o nível do VaR. Esses fatos podem causar sérios problemas no mundo real. O ES consegue proteger os investidores contra este tipo de problema, desde que esse método considere as perdas que ultrapassem os limites do VaR. Por outro lado, o ES traz desvantagens, tais como a distribuição em caudas gordas, que traz estimadores de erros muito maiores no ES do que no VaR. Para reduzir este erro de estimação, é necessário aumentar o tamanho da amostra de simulação. Portanto, o ES é mais custoso quando ele precisa que o risco de cauda não interfira numa distribuição de cauda gorda. Tendo o ES como mensurador de riscos, é possível montar estratégias de hedge a fim de evitar surpresas desagradáveis ou mesmo minimizar esses resultados negativos. Por fim, a análise empírica mostra que as economias de países emergentes tendem a ter um câmbio mais volátil e, portanto, mais sensíveis a atingir o ES durante o tempo. Estes eventos mostram que os ES calculados por metodologias não paramétricas são mais sensíveis a serem atingidos do que por metodologias semi-paramétricas e paramétricas. Essas conclusões foram sumarizadas nos itens abaixo:

1-- O ES acontece em crises econômicas de grande impacto, quando a volatilidade dos ativos tende a extrapolar os limites impostos pelo VaR;

2- Por conta deste efeito de desrespeitar os limites do VaR, o ES se encontra nas caudas da distribuição e, portanto, apresenta grande volatilidade, o que torna mais difícil identificar algum tipo de comportamento;

3- Apesar da baixa frequência, o ES pode sofrer hedge para evitar ou amenizar grandes prejuízos;

4- Pelas próprias características do ES, as metodologias não paramétricas tendem a ser preferíveis ás paramétricas, dada a sua baixa frequência e alta volatilidade.

Referências

BOUDT, K.; PETERSON, B. G.; CARL, P. Hedge fund portfolio selection with modified expected shortfall. **Munich Personal RePEc Archive**, 13 Fevereiro 2008. DOI: 10.2495/CF080101.

CHEN, J. M. On exactitude in financial regulation: Value-at-risk expected shortfall and expectiles. **Risks**, East Lansing, 1 Junho 2018. 1-28, https://doi.org/10.3390/risks6020061.

CHEN, S. X. Nonparametric estimation of expected shortfall. **Journal of Financial Econometrics**, Ames, 28 Novembro 2008. 87-107, https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbm019.

CONSIGLI, G. Tail estimation and mean - VaR portfolio selection in markets subject to financial instability. **Journal of Banking and Finance**, Rome, Novembre 2002. 1355 - 1382, DOI:10.1016/S0378-4266(02)00267-4.

EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C.; MIKOSCH, T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. **Springer - Verlag**, 9 Dezembro 1997. 281-370 DOI 10.1007/978-3-642-33483-2 7.

FERMANIAN, J.-D.; SCAILLET, O. Sensitivity analysis of VaR and Expected Shortfall for portfolios under netting agreements. **Journal of Banking & Finance**, Paris, 29 Setembro 2004. 927-959, https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2004.08.007.

FUKUI, M.; BASSO, L. O Expected Shortfall e a Gestão de Riscos: análise bibliométrica e revisão sistemática da literatura. **The International Society for the Advancement of Financial Economics First Conference**, São Paulo, 06 Dezembro 2022.

GUEGAN, D.; HASSANI, B. K. More accurate measurement for enhanced controls: VaR vs ES? **Journal of International Financial Markets, Institutions & Money**, Paris, 15 Julho 2017. 152-165, http://dx.doi.org/10.1016/j.intfin.2017.06.002.

KOCH-MEDINA, P.; MUNARI, C. Unexpected shortfalls of Expected Shortfall: Extreme default profiles and regulatory arbitrage. **Journal of Banking & Finance**, Zurique, 7 Novembro 2015. 141-151, http://dx.doi.org/10.1016/j.jbankfin.2015.11.006.

KUMAR, D.; MAHESWARAN, S. Value-at-risk and expected shortfall using the unbiased extreme value volatility estimator. **Studies in Economics and Finance**, 23 Maio 2016. 506-526, https://doi.org/10.1108/SEF-03-2016-0061.

MCNEIL, A. J. Extreme Value Theory for Risk Managers. **Departement Mathematik ETH Zentrum**, Zirique, 17 Maio 1999. 1-22.

MEHLITZ, J. S.; AUER, B. R. A Monte Carlo evaluation of non-parametric estimators of expected shortfall. **The Journal of Risk Finance**, Cottbus, 8 Junho 2020. 355-397, https://doi.org/10.1108/JRF-07-2019-0122.

NÉMETH, L.; ZEMPLÉNI, A. Regression Estimator for the Tail Index. **Journal of Statistical Theory and Practice**, Budapeste, 34 Junho 2020. 1-23.

PELLIZZARI, P. STATIC HEDGING OF MULTIVARIATE DERIVATIVES BY SIMULATION. **EUROPEAN J.OF OPERATIONAL RESEARCH**, 16 Outubro 2005. 507-519.

PUCETTI, G.; RÜSHENDORF, L. Asymptotic equivalence of conservative VaR- and ES-based capital charges. **Journal of Risk**, Florence, Fevereiro 2014. 01-12, http://dx.doi.org/10.21314/JOR.2014.291.

SCAILLET, O. Nonparametric estimation and sensitivity analysis of expected shortfall. **Mathematical Finance**, Janeiro 2004. 115-129, 10.1111/j.0960-1627.2004.00184.x.

YAMAI, Y.; YOSHIBA, T. Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value at Risk: Their Validity under Market Stress. **MONETARY AND ECONOMIC STUDIES**, Tóquio, Outubro 2002. 181-238, https://doi.org/10.1016/S0378-4266(01)00242-4.

YAMAI, Y.; YOSHIBA, T. On the validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall. **Monetary and Economic Studies**, Tóquio, Janeiro 2002a. 57-86.

YAMAI, Y.; YOSHIBA, T. Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition and Optimization. **Monetary and Economic Studies, 20**, Tóquio, Janeiro 2002b. 97 - 122.

YAMAI, Y.; YOSHIBA, T. Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value at Risk (2): Expected Utility Maximization and Tail Risk. **Monetary and Economic Studies**, Tóquio, v. 20, n. N 2, p. 95 - 115, Abril 2002c.

YAMAI, Y.; YOSHIBA, T. Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk (3): Their Validity Under Market Stress. **Journal of Banking & Finance**, Tóquio, v. 20, n. 3, p. 87 - 122, Outubro 2002d.

YAMAI, Y.; YOSHIBA, T. Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective. **Journal of Banking & Finance**, Tokyo, 25 Setembro 2004. 997-1015, https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2004.08.010.