



MODELAGEM NUMÉRICA E CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DE ELASTÔMEROS SUBMETIDOS A ESFORÇOS UNIAXIAIS

Numerical modeling and experimental characterization of elastomers submitted to uniaxial efforts

João Paulo Alves de Paula (1); Debora Francisco Lalo (2); Marcelo Greco (3)

(1) Estudante de Engenharia Mecânica, Centro Universitario FEI, São Bernardo do Campo - SP, Brasil.

(2) MSc. Prof^o., Centro Universitario FEI, São Bernardo do Campo - SP, Brasil.

(2) Estudante de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.

(3) Dr. Prof., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil

Email para Correspondência: joaop_alvesdepaula@hotmail.com; (P) Apresentador

Resumo: Os elastômeros são, atualmente, muito utilizados em diversos setores industriais devido a sua elevada capacidade de deformação e amortecimento, alta flexibilidade e resiliência, além de uma ótima recuperação elástica. Suas relações constitutivas são altamente não-lineares e caracterizadas por funções de energia de deformação que devem ser definidas através de dados de ensaios experimentais, sendo estes modelos tratados como hiperelásticos. Na literatura são encontrados diversos modelos constitutivos desenvolvidos de forma a tentar aproximar ao máximo possível as curvas experimentais de tensão-deformação dos elastômeros, quando submetidos a diferentes tipos de esforços mecânicos. Assim, com o intuito de entender e caracterizar a atuação de uma determinada borracha natural vulcanizada com dureza de aproximadamente 50 shore, o presente trabalho busca submeter um conjunto de corpos de prova ao modo uniaxial de deformação e caracterizá-lo para este modo através dos principais modelos constitutivos encontrados na literatura e disponíveis em softwares comerciais de simulação através do Método dos Elementos Finitos (MEF). Os principais modelos testados foram: Neo-Hooke, Mooney-Rivlin, Ogden, Yeoh, Polinomial e Arruda-Boyce. Para isso, os ensaios uniaxiais foram realizados para a extração das curvas de tensão-deformação do elastômero segundo a norma ASTM D412, e o ajuste de curvas para a definição das constantes dos modelos constitutivos analisados foi feito através do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). A implementação do modelo numérico desenvolvido foi realizada através do software de simulação computacional Abaqus[®]. A partir dos resultados obtidos foi possível comparar o comportamento de tensão-deformação para cada modelo constitutivo analisado e sua validação foi realizada através dos ensaios experimentais realizados, onde se atingiram níveis de deformação na ordem de 500%.

Palavras chaves: elastômeros; leis constitutivas; hiperelasticidade; método dos elementos finitos.



Abstract: Elastomers are currently widely used in many industrial sectors due to their high deformation and damping capacity, high flexibility and resilience, in addition to an excellent elastic recovery. Their constitutive relations are highly non-linear and characterized by strain energy functions that must be defined by experimental data, where these models are treated as hyperelastic. In the literature several constitutive models can be found and developed in order to try to approximate as much as possible the experimental stress-strain curves of the rubber-like materials when submitted to different types of mechanical loads. Thus, in order to understand and characterize the performance of a particular vulcanized natural rubber with a hardness of approximately 50 shore, the present work seeks to submit a set of samples to the uniaxial deformation mode and characterize it for this mode through the main constitutive models found in the literature and available in the commercial simulation softwares through the Finite Element Method (FEM). The main tested models were: Neo-Hooke, Mooney-Rivlin, Ogden, Yeoh, Polynomial and Arruda-Boyce. For this purpose, the uniaxial tests were performed in order to obtain the rubber stress-strain curves according to ASTM D412, and the curves adjustment for the constants definition of the constitutive models analyzed was done through the Least Squares Method (LSM). The implementation of the numerical model was developed through the Abaqus[®] computer simulation software. From the obtained results it was possible to compare the behavior of the stress-strain curves for each constitutive model analyzed and its validation was carried out through the obtained experimental data, where deformation levels of 500% were reached.

Keywords: *elastomers; constitutive laws; hiperelasticity; finite element method.*



1 INTRODUÇÃO

Os elastômeros são muito utilizados na atualidade em diversos setores industriais, devido a sua elevada capacidade de deformação com baixas deformações permanentes ou fraturas, alta elasticidade e resiliência, baixo desperdício de matéria-prima em sua produção, além de uma ótima recuperação elástica. Devido a sua grande importância, torna-se imprescindível compreender o comportamento destes materiais, possibilitando a predição do seu comportamento mecânico e um maior controle de qualidade do material.

Devido à grande inconstância de resultados obtidos através de diferentes estados de deformação e a grande sensibilidade da borracha aos parâmetros de ensaio e ao ambiente em que está submetida, vários modelos constitutivos hiperelásticos foram desenvolvidos para tentar caracterizar o comportamento dos elastômeros, quando submetidos a diferentes tipos de esforços mecânicos, baseados em sua deformação (ALI, 2010).

Em 1940, Mooney propôs um modelo com dependência linear do primeiro e segundo invariante de deformação, formulado a partir da concepção polinomial. O modelo Neo-Hookeano, desenvolvido por Treloar (1943), é dependente apenas do primeiro invariante de deformação, consistindo em uma parcela do modelo de Mooney (1940). Rivlin e Saunders (1951), propuseram um novo modelo, a partir das expressões de energia de deformação já desenvolvidas, baseado nos invariantes I_1 e I_2 , conhecido como Mooney-Rivlin, sendo este, um dos modelos hiperelásticos clássicos e mais conhecidos devido à sua simplicidade.

Um modelo fenomenológico onde o funcional energia de deformação é baseado diretamente nos alongamentos principais (λ) foi proposto por Ogden (1972). Este, foi conhecido como um dos modelos de maior potencial na caracterização de materiais hiperelásticos, porém deve-se ter cautela quando os dados de ensaio são limitados.

Yeoh (1990) propôs um modelo de forma polinomial correspondente a uma forma truncada do modelo de Mooney-Rivlin, que posteriormente foi modificado através da adição de um termo exponencial, de modo a aumentar a precisão dos ajustes para pequenas deformações.

Em 1993, um modelo micromecânico com potências de alta ordem de I_1 foi proposto por Arruda e Boyce. Este modelo, muito conhecido como *eight chain model*, apresenta boas predições para pequenos alongamentos de materiais submetidos a tração biaxial.

Existe uma série de outros modelos constitutivos que foram desenvolvidos ao longo dos anos buscando uma correlação da característica não-linear da curva de tensão-deformação dos elastômeros, já que a análise do comportamento para estes materiais é extremamente complexa. Desta forma, o entendimento das relações constitutivas hiperelásticas são essenciais para a simulação da solução de problemas reais de engenharia envolvendo componentes elastoméricos.

2 TEORIA DA HIPERELASTICIDADE

Segundo a teoria da mecânica dos meios contínuos o movimento de um corpo é descrito por $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$, onde \mathbf{x} e \mathbf{X} são os vetores de posição do corpo em relação as configurações de referência. O vetor de deslocamento infinitesimal na configuração de inicial é identificado como $d\mathbf{X}$. Após sofrer deformação, origina-se o vetor $d\mathbf{x}$ para a configuração deformada (MALVERN, 1969). A relação entre estes vetores infinitesimais pode vir diretamente da regra da derivação de cadeia conforme a Eq. (1):

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_i} dX_i \quad (1)$$

A partir desta concepção, o tensor gradiente de deformação é representado pela Eq. (2):

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2)$$

onde, λ_i ($i= 1, 2, 3$) são os autovalores dos tensores elásticos e representam as deformações principais. Dessa forma, através da teoria de decomposição polar obtém-se o tensor de deformação de Cauchy-Green, onde os seus invariantes são representados pela Eq. (3):

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2; \quad I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (3)$$

Portanto, a função energia de um material incompressível, isotrópico e elástico pode ser derivada como uma função de I_1, I_2 e I_3 , ou até mesmo em termos das deformações principais λ_1, λ_2 e λ_3 (OGDEN, 1984; VALANIS e LANDEL, 1967). Se a energia é uma função simétrica em relação as deformações principais, ela pode ser escrita como:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = W(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2) \quad (4)$$

Os materiais conhecidos como hiperelásticos, elastômeros, são descritos através do funcional de energia densidade de deformação (W), que define a energia elástica armazenada no material por unidade de volume não deformado (relacionado a configuração de referência), que é função da deformação que o corpo sofre (ALI, 2010). W pode ser representada como uma função polinomial dos invariantes de deformação como $W = f(I_1, I_2, I_3)$. Para materiais incompressíveis o tensor de Cauchy pode ser descrito como na Equação (5) em função dos alongamentos principais:

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p; \text{ sendo } i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

onde p é um escalar indeterminado resultante da restrição de incompressibilidade.

Os modelos constitutivos hiperelásticos encontrados na literatura podem ser divididos em modelos fenomenológicos e modelos micromecânicos. Os modelos

fenomenológicos baseiam-se no comportamento que o material apresenta durante os ensaios experimentais, dessa forma, as variáveis apresentadas em cada modelo são ponderadas de acordo com a sua importância para a caracterização do processo de deformação do material. Os modelos micromecânicos baseiam-se nas informações químicas do material, como tipo de ligações químicas, comprimentos de cadeias e variáveis termodinâmicas (MARCKMANN; VERRON, 2006).

A maioria dos modelos para elastômeros adotam a hipótese da incompressibilidade ou quase incompressibilidade do material, diretamente relacionada ao módulo de compressibilidade (K) (ALI, 2010). A função potencial energia de deformação pode ser dividida em duas partes, como representado na Eq. (6), sendo a primeira função dos invariantes I_1 e I_2 e as deformações (parcela desviatória), e a segunda, função do invariante I_3 e o módulo K (parcela hidrostática).

$$W = f(I_1, I_2) + g(K, I_3, \dots) \quad (6)$$

2.1 Modelos Constitutivos Hiperelásticos

Existem diversos modelos constitutivos com soluções desenvolvidas para materiais hiperelásticos, porém neste estudo serão abordados os modelos mais usuais e que se pode encontrar facilmente em softwares comerciais para simulações numéricas computacionais.

2.1.1 Polinomial

O modelo polinomial é fenomenológico, baseado no 1º e 2º invariantes de deformação. Sua energia densidade de deformação é representada pela Eq. (7):

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j + \sum_{K=1}^N \frac{1}{D_K}(J - 1)^{2K} \quad (7)$$

C_{ij} e D_K são constantes do material, em que o primeiro descreve o comportamento cisalhante do material e o segundo é a constante de compressibilidade. N é o número de termos para a função energia de deformação e J é a relação entre os volumes da configuração inicial e deformada (ALI, 2010).

A Equação (8) representa a relação entre tensão e deformação para o modo de deformação uniaxial, através do ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo polinomial (SIMULIA, 2016).

$$T = 2(1 - \lambda^{-3}) \left(\lambda \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right); \text{ sendo } \bar{I}_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} \text{ e } \bar{I}_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda \quad (8)$$

2.1.2 Mooney-Rivlin

A Equação (9) equivale ao modelo de Mooney-Rivlin (polinomial com $N=1$) e apresenta 2 termos:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{1}{D}(J - 1)^2 \quad (9)$$

Os modelos constitutivos hiperelásticos mais utilizados são o de Mooney-Rivlin e de Ogden. Suas principais desvantagens são o fato de serem necessários os dados experimentais para a caracterização do material e o fato de não serem parâmetros baseados em características físicas. Consequentemente os ajustes de curva do modelo se tornam mais difíceis com o aumento de variáveis (BOL; REESE, 2003).

A Equação (10) representa a função de ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo de Mooney-Rivlin de 2 termos.

$$T = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \quad (10)$$

2.1.3 Neo-Hookeano

O modelo Neo-Hookeano é um caso particular do modelo de Rivlin de dois termos, em que $C_{01} = 0$ e $C_{10} = \mu/2$, onde μ é o módulo de cisalhamento conforme a Eq. (11).

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{D}(J - 1)^2 \quad (11)$$

Este modelo hiperelástico para elastômeros é o mais simples já desenvolvido para casos em que os dados experimentais do material são insuficientes (ALI, 2010).

A Equação (12) representa a função de ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo Neo-Hookeano.

$$T = \mu \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (12)$$

2.1.4 Ogden

Ogden propõe a energia de deformação baseada nas deformações principais ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) para materiais incompressíveis, assumindo que $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ (CHANG *et al.*, 1991). O potencial de energia de deformação é relacionado de acordo com a Eq. (13):

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{K=1}^N \frac{1}{D_K} (J - 1)^{2K} \quad (13)$$

onde, as constantes μ_i e α_i representam o comportamento cisalhante.

A Equação (14) representa a função de ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo de Ogden de 2 termos.

$$T = 2 \left(\mu_1 \left(\lambda^{\alpha_1 - 1} - \lambda^{-\frac{\alpha_1}{2} - 1} \right) + \mu_2 \left(\lambda^{\alpha_2 - 1} - \lambda^{-\frac{\alpha_2}{2} - 1} \right) \right) \quad (14)$$

2.1.5 Yeoh

O modelo de Yeoh (1990) apresenta bom desempenho para borrachas naturais, pois usualmente é aplicado para uma gama mais ampla de deformações e também é capaz de prever o comportamento tensão-deformação para diferentes modos de deformação a partir de dados obtidos de um modo de deformação mais simples, como o modo uniaxial de deformação (GHOSH *et al.*, 2003). O emprego mais comum do modelo é a sua versão de três termos (N=3) conforme a Eq. (15).

$$W = \sum_{i=1}^N C_{i0} (I_1 - 3)^i + \sum_{K=1}^N \frac{1}{D_K} (J - 1)^{2K} \quad (15)$$

A Equação (16) representa a função de ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo de Yeoh de 2 termos.

$$T = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) (C_{10} + 2C_{20} (I_1 - 3)) \quad (16)$$

2.1.6 Arruda-Boyce

O modelo de Arruda e Boyce, micromecânico, é baseado em uma explicação de uma rede de cadeias moleculares e é um caso particular de Yeoh com cinco termos (N=5) e constantes pré-determinadas. A Eq. (17) apresenta a energia de deformação para este modelo constitutivo:

$$W = \mu \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{\lambda_L^{2i-2}} (I_1^i - 3^i) + \frac{1}{D} \left[\frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right] \quad (17)$$

Neste caso, λ_L é um dado estatístico oriundo da análise micromecânica e representa o máximo alongamento que uma molécula permite. As constantes C_i são derivadas da expansão de séries de uma função de Langevin inversa para o modelo de Arruda Boyce:

$$C_1 = \frac{1}{2}; C_2 = \frac{1}{20}; C_3 = \frac{11}{1050}; C_4 = \frac{19}{7050}; C_5 = \frac{519}{673750} \quad (18)$$

A Equação (19) representa a função de ajuste para o modelo de Arruda-Boyce.

$$T = 2\mu \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{I_1}{\lambda_L^2} + \frac{11}{350} \frac{I_1^2}{\lambda_L^4} + \frac{38}{3525} \frac{I_1^3}{\lambda_L^6} + \frac{519}{134750} \frac{I_1^4}{\lambda_L^8} \right) \quad (19)$$

2.2 Erro

Uma forma de verificar a qualidade dos ajustes de curva é calcular o erro relativo das tensões entre as soluções teóricas e experimentais (SIMULIA, 2016). Este erro é definido pela Eq. (20) para cada par de tensão-deformação (n) que constitui o ensaio:

$$ERRO = \sum_{i=1}^n (1 - T_i^{th}/T_i^{test})^2 \quad (20)$$

onde, T_i^{test} corresponde ao valor de tensão obtido pelos testes experimentais e T_i^{th} corresponde a tensão teórica obtida pelo ajuste de curva.

3 METODOLOGIA

3.1 Ensaios Mecânicos

A borracha natural que foi utilizada como objeto de estudo possui em sua composição 20% de negro de fumo e 3% de plastificante, com uma dureza de aproximadamente de 50 *shore*. Os corpos de prova foram fornecidos pela empresa Vibtech®. Os testes foram realizados sob temperatura controlada de 23°C.

Ensaios uniaxiais (tração) são muito utilizados em elastômeros, pois são relativamente simples quando comparado aos outros testes realizados para outros modos de deformação. Em muitos casos, são interessantes para uma caracterização experimental prévia do comportamento do material, gerando respostas razoáveis quanto ao ajuste das curvas propostas pelos modelos constitutivos em relação às curvas obtidas experimentalmente. Desta forma este trabalho terá como foco principal a análise do comportamento da borracha natural submetida a esforços na direção axial, segundo as especificações da norma ASTM D412 (1969) cujas dimensões do corpo de prova estão representadas na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**

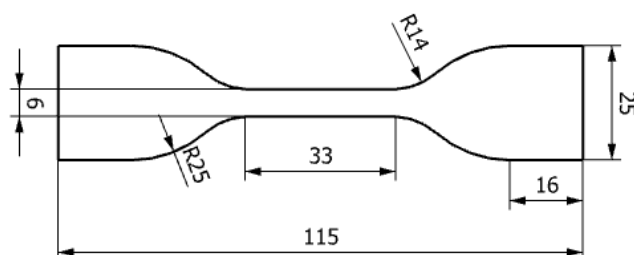


Figura 1. Dimensões do corpo de prova segundo a norma ASTM D412

Fonte: (Autor, 2018)

O equipamento utilizado para a realização dos ensaios é um sistema eletromecânico de bancada com coluna dupla (Instron 5567). Os métodos de ensaios mecânicos são programáveis através do software Bluehill (versão 2.35). O sistema de deslocamento do equipamento é por fusos e sua estrutura possibilita a utilização de diferentes tipos de extensômetros. A Figura 2 representa o modelo do equipamento utilizado em laboratório.

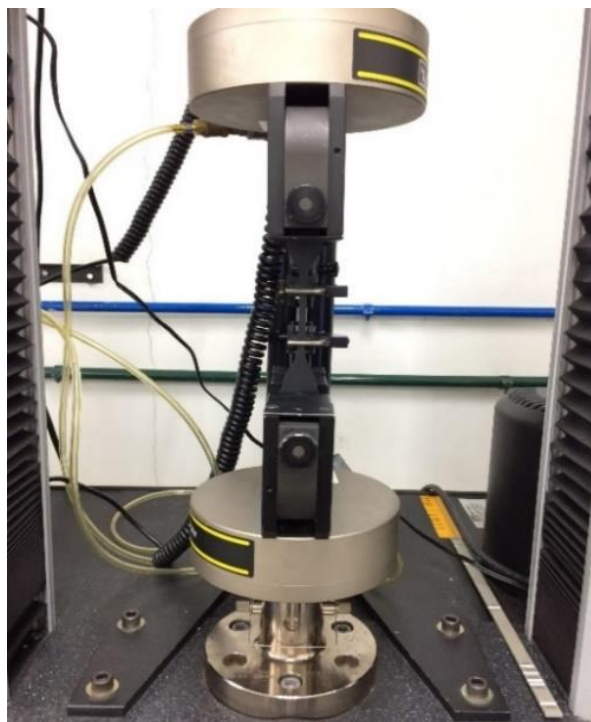


Figura 2. Corpo de prova fixo no equipamento Instron

Fonte: (Autor, 2018)

Três ensaios de tração foram realizados em corpos de prova do mesmo lote de forma a se obter a curva tensão-deformação média entre os ensaios.

3.2 Simulação Computacional

Através do software Abaqus®, especializado em *Computer-Aided Engineering* (CAE), a curva média obtida pelos ensaios uniaxiais foi utilizada para se fazer o ajuste das curvas para os modelos constitutivos hiperelásticos, de forma a se obter as constantes constitutivas para cada modelo.

Um modelo 3D do corpo de prova foi criado para a simulação via MEF segundo a norma ASTM D412 e, para isso, foi definida uma malha para o modelo com elementos hexaédricos de 8 nós, formulação híbrida e pressão constante (C3H8H), seguindo as condições de contorno conforme apresentado na Figura 3:

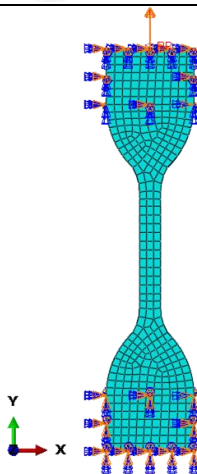


Figura 3. Modelagem gerada para o corpo de prova através do software Abaqus®

Fonte: (Autor, 2018)

Dessa forma foi obtida a curva tensão-deformação para cada modelo constitutivo para o corpo de prova que foi submetido ao carregamento uniaxial.

4 RESULTADOS

Foi levantada uma curva média obtida de acordo com ensaios de tração em 3 corpos de prova distintos de mesmo lote, mesma densidade e propriedades mecânicas, conforme está representado no gráfico da Figura 4, para níveis de deformação de até 600%:

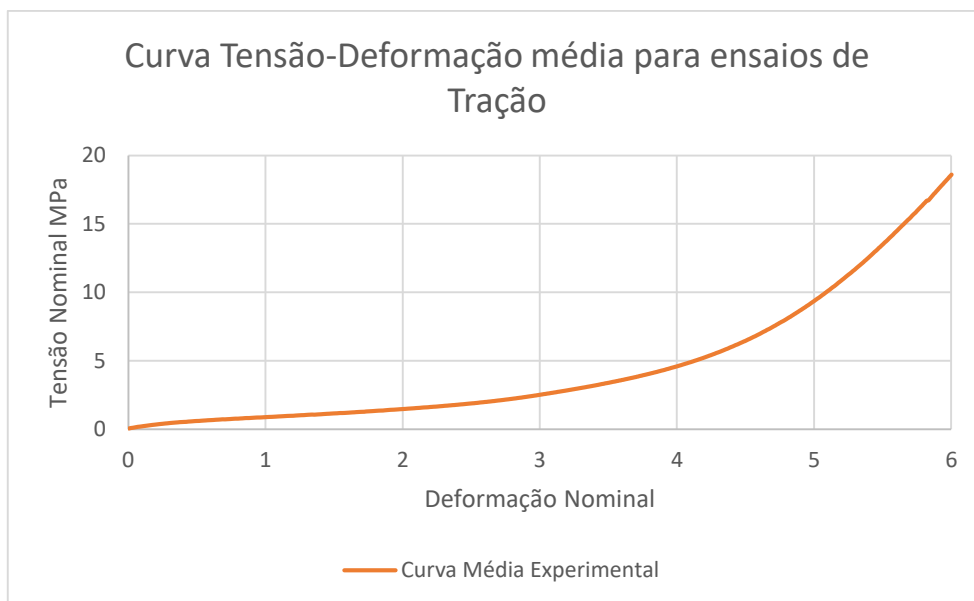


Figura 4. Gráfico resultante da curva média dos ensaios de tração

Fonte: (Autor, 2018)

A partir da curva média obtida através dos ensaios uniaxiais, foram geradas as curvas de ajuste através do software Abaqus®, para os modelos clássicos abordados na teoria, em relação a curva experimental, conforme está representado na Figura 5. Através do método dos mínimos quadrados, o software faz uma aproximação de curvas para cada modelo em relação a curva experimental. Desta forma são definidas as constantes constitutivas para o material ensaiado.

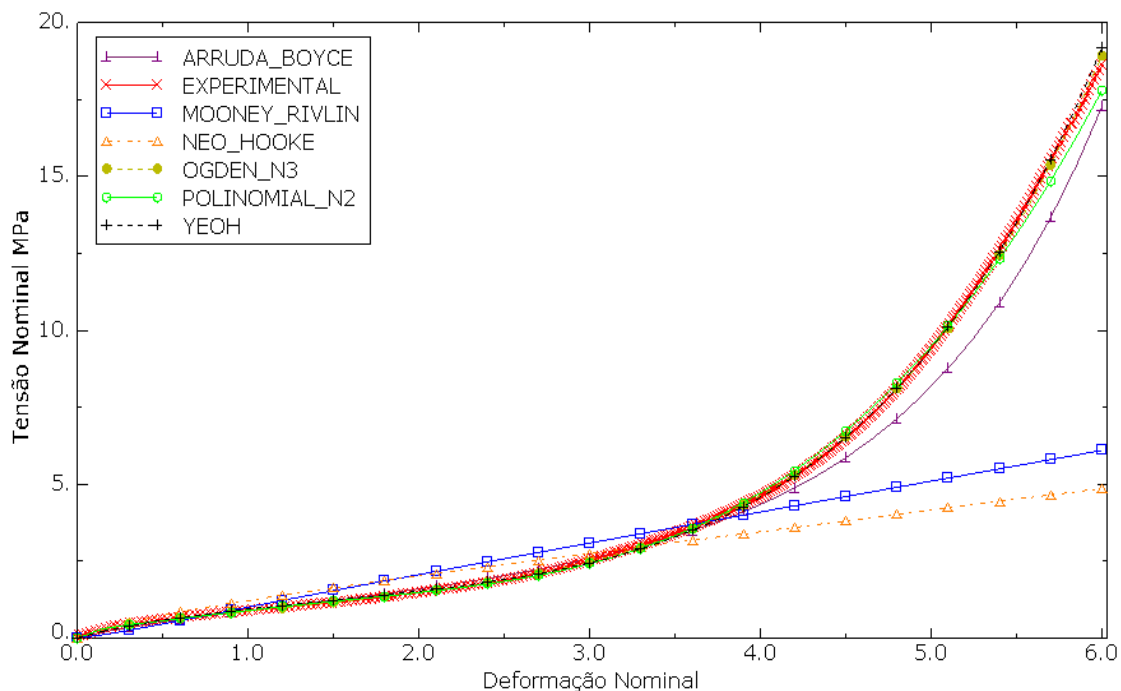


Figura 5. Ajuste de curvas para cada modelo constitutivo em relação a curva média experimental

Fonte: (Autor, 2018)

Caracterizado o material pelo ajuste de curvas obtido pelo MMQ, é possível correlacionar a resposta do modelo implementado pelo MEF com os dados obtidos experimentalmente. Neste caso, o ensaio de tração realizado é simulado computacionalmente onde a distribuição das tensões através da malha do modelo do corpo de prova é representada pela Figura 6. Essa representação corresponde aos modelos constitutivos, cuja curva tensão-deformação mais se aproximaram da curva média obtida experimentalmente.

Para validação da resposta obtida para o comportamento do modelo simulado extrai-se os valores médios das tensões principais nos elementos contidos na região de máxima concentração.

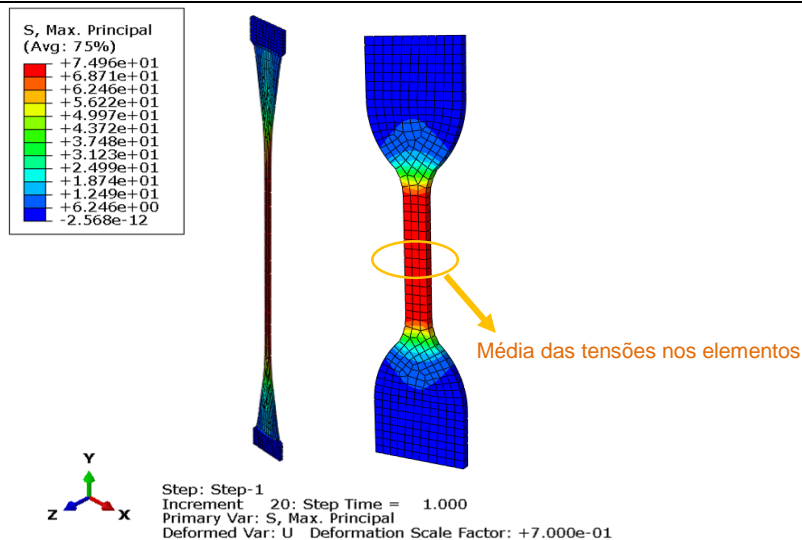


Figura 6. Distribuição de tensões através da malha gerada para o modelo 3D

Fonte: (Autor, 2018)

A Figura 7 representa as curvas obtidas através da simulação pelo MEF para cada modelo constitutivo, cuja rigidez é função de constantes obtidas pelo ajuste de curvas de cada modelo constitutivo hiperelástico em relação a curva média experimental.

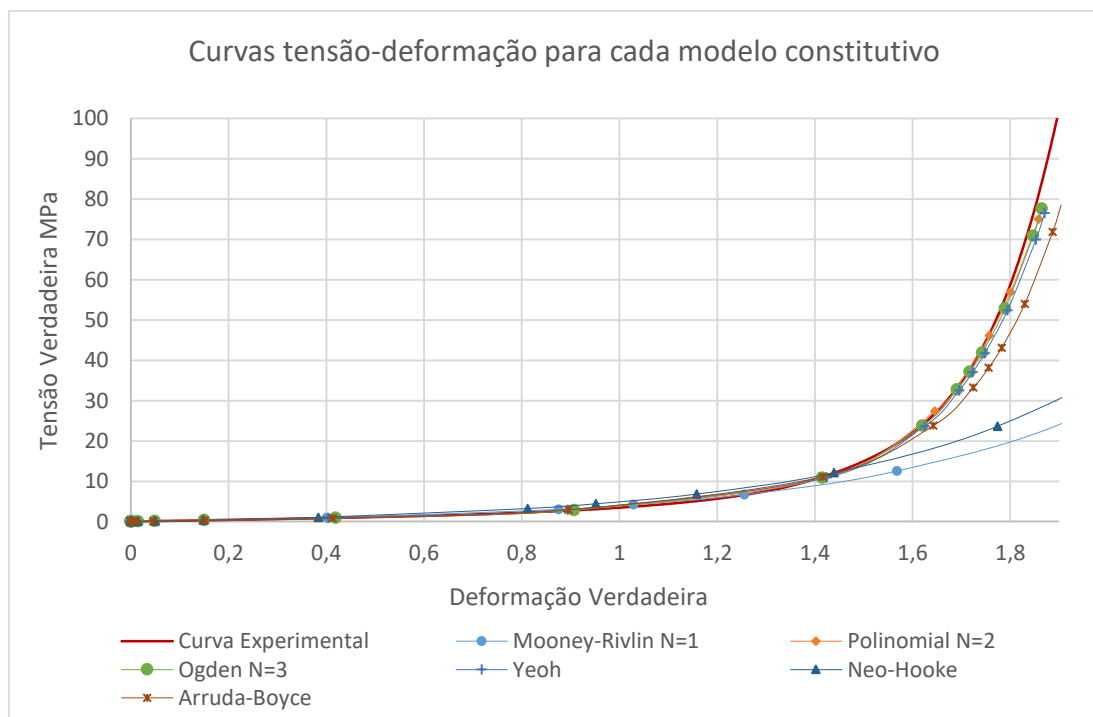


Figura 7. Gráfico tensão-deformação obtido através da análise via MEF para cada modelo constitutivo.

Fonte: (Autor, 2018)

5 CONCLUSÃO

Como visto anteriormente, cada modelo constitutivo hiperelástico possui suas peculiaridades e sua escolha deve ser criteriosa para determinada aplicação, pois os elastômeros possuem uma grande diversidade de variações mecânicas e químicas entre compostos.

Pode-se observar através dos resultados obtidos que, para o modo uniaxial de deformação, os modelos constitutivos de Ogden de terceira ordem, Yeoh, polinomial de segunda ordem e Arruda-Boyce obtiveram as melhores aproximações para o ajuste de curva e para a simulação via MEF. O nível de deformação é um parâmetro importante para uma boa convergência entre a curva aproximada para o modelo constitutivo e a curva do ensaio experimental, pois para deformações maiores como a obtida a um nível de 600%, o modelo de Arruda-Boyce (micromecânico), obteve uma menor convergência em relação a curva experimental se comparado aos outros modelos fenomenológicos.

Para uma análise mais profunda, seria necessário a disposição de um número de resultados experimentais maiores para diferentes modos de deformação. É conveniente dispor de dados experimentais provenientes de ensaios de cisalhamento puro, extensão biaxial e compressão volumétrica para se obter uma melhor caracterização numérica. Os resultados obtidos para o modo uniaxial de deformação geram bons resultados e previsões sobre o trajeto da curva tensão-deformação para outros modos de deformação. Porém muitas vezes não são suficientes, pois existem inúmeros componentes elastoméricos fabricados para aplicações de engenharia que sofrem diferentes esforços mecânicos durante a sua vida útil, sendo grande parte deles, esforços cíclicos de fadiga.

AGRADECIMENTOS

À instituição Centro Universitário da FEI por ter possibilitado a utilização do laboratório e dos equipamentos necessários para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ALI, A.; HOSSEINI, M.; SAHARI, B. B., 2010. A review of constitutive models for rubber-like materials. *American Journal of Engineering and Applied Sciences*, v. 3, n. 1, p. 232-239.
- ARRUDA, E. M.; BOYCE, M. C., 1993. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 41, n. 2, p. 389-412.
- ASTM. (1969). ASTM D412 - 68: Standard Method of Tension Testing of Vulcanized Rubber. *American Society for Testing and Materials*, 552(d), 92–102.
- BOL, M.; REESE, S., 2003. Finite element modelling of polymer networks based on chain statistics. *Constitutive models for rubber*, p. 203-212.
- CHANG, T. Y. P.; SALEEB, A. F.; LI, G., 1991. Large strain analysis of rubber-like materials based on a perturbed Lagrangian variational principle. *Computational*



mechanics, v. 8, n. 4, p. 221-233.

GHOSH, P.; SAHA, A.; MUKHOPADHYAY, R., 2003. Prediction of tyre rolling resistance using FEA. *Constitutive Models for Rubber*, p. 141-146.

MALVERN, L. E., 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*.

MARCKMANN, G.; VERRON, E., 2006. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber chemistry and technology*, v. 79, n. 5, p. 835-858.

MOONEY, M., 1940. A theory of large elastic deformation. *Journal of applied physics*, v. 11, n. 9, p. 582-592.

OGDEN, R. W., 1972. *Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids*. Proc. R. Soc. Lond. A, v. 326, n. 1567, p. 565-584.

OGDEN, R. W., 1984. *Non-Linear Elastic Deformations*. Eds. Harwood Series Mathematics and its Applications, Chichester.

RIVLIN, R. S.; SAUNDERS, D. W., 1951. Large elastic deformations of isotropic materials VII. *Experiments on the deformation of rubber*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, v. 243, n. 865, p. 251-288.

SIMULIA, 2016. *Abaqus analysis user's manual*, Version 6.13, Dassault Systems.

TRELOAR, L. R. G., 1943. The elasticity of a network of long-chain molecules. I. *Transactions of the Faraday Society*, v. 39, p. 36-41.

VALANIS, K. C.; LANDEL, R. F., 1967. *Strain-energy function of a hyper-elastic material in terms of the extension ratios*. J. Appl. Phys., v. 38, p. 2997-3002.

YEOH, O. H., 1990. Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. *Rubber chemistry and technology*, v. 63, n. 5, p. 792-805.