



## INSTABILIDADE DINÂMICA EM ARCOS ABATIDOS COM APOIOS ELÁSTICOS SUBMETIDOS A CARGA CONCENTRADA

### Dynamic Instability in Shallow Arches with Elastic Connections Submitted to Concentrated Load

William Luiz Fernandes (1); Rafael Aredes Couto (1) (P); Marcelo Greco (2)

(1) Me. Prof., Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil.

Email para Correspondência: wlfernandes13@gmail.com; (P) Apresentador

**Resumo:** Diante da necessidade da construção de estruturas cada vez mais eficientes e econômicas, estudos referentes a problemas de instabilidade são temas de grande relevância. A eficiência das estruturas está também relacionada com o menor consumo de material para a construção da mesma. Com isso, há a necessidade de construção de elementos estruturais mais esbeltos, o que torna a estrutura mais susceptível a problemas de instabilidade. Destaca-se, desta forma, a importância de compreensão do problema, limites de estabilidade e comportamento pós-crítico. Um exemplo de perda de estabilidade em arcos abatidos é o snap-through, em que a estrutura, em determinada condição de equilíbrio, salta para uma nova configuração de equilíbrio remota, normalmente repentina. Problemas de instabilidade são inerentemente dinâmicos, e uma análise transiente é mais adequada para completa descrição do comportamento da estrutura. Alguns sistemas estruturais susceptíveis a snap-through não possuem solução analítica, sendo necessário utilizar métodos de integração numérica capazes de descrever adequadamente a resposta dinâmica do problema. O presente trabalho objetiva avaliar a resposta dinâmica de arcos abatidos com apoios elásticos sob força transversal via integração numérica utilizando o algoritmo tradicional de Newmark para problemas transientes não lineares.

*Palavras chaves:* Dinâmica; Instabilidade; Arcos; Ligações.

**Abstract:** With the need of efficient and economical structures, studies of instability problems are relevant issues. The efficiency of the structures is related to the consumption of material. Thus, it is necessary to produce slender structural elements, which makes them susceptible to problems of instability. In this way, the importance of understanding the problem, stability limits and post-critical behavior is highlighted. An example of loss of stability in collapsed arcs is the dynamic snap-through, where the structure, in certain equilibrium condition, jumps to a new remote equilibrium configuration. Instability problems are typically dynamic, and a



transient analysis is better suited for the comprehensive description of the behavior of a structure. Some structural systems susceptible to snap-through does not have an analytical solution, and it is necessary to use numerical integration methods capable of adequately describing the dynamic response of the problem. The present work evaluates the dynamic response of sagged arcs with semi-rigid connections under transverse force via numerical integration using the traditional Newmark algorithm for non-linear transient problems.

**Keywords:** Dynamics; Instability; Arches; Connections.

## 1 INTRODUÇÃO

Diante da necessidade crescente por construções sustentáveis e econômicas, a eficiência estrutural torna-se essencial para dimensionar e executar uma estrutura. Com isso, há a necessidade de utilização de elementos estruturais mais esbeltos, tornando a estrutura mais susceptível a problemas de instabilidade. Destaca-se, desta forma, a importância de compreensão do problema, limites de estabilidade e comportamento pós-crítico.

Arcos e cascas são elementos estruturais esbeltos amplamente utilizados nas engenharias civil, mecânica e aeroespacial. Devido ao índice de esbelteza elevado, elementos estruturais esbeltos podem estar susceptíveis a um fenômeno de instabilidade conhecido como *snap-through*. Galvão (2004) afirma que o *snap-through* ocorre quando, para um nível de carregamento crítico, o arco sofre uma inversão em sua configuração, saltando do estado pré-flambagem para um estado pós-crítico estável. Diversas pesquisas vêm sendo realizadas sobre esse fenômeno.

Galvão (2004), Silva (2009) e Rosas (2016) realizaram estudos em um arco esbelto senoidal submetido a um carregamento uniformemente distribuído, considerando elementos finitos com condições de extremidade como molas rotacionais discretas. Chandra et al. (2013) obteve resultados experimentais e computacionais do comportamento transiente de arcos abatidos sob carga distribuída harmônica, identificando as faixas de variação dos parâmetros que levam ao *snap-through*. Virgin et al. (2014) verificaram a resposta para um arco abatido submetido a carregamento e à influência de mudanças no ambiente térmico. Ha et al. (2014) analisaram a estabilidade assintótica de arcos abatidos, obtendo a resposta analítica para os mesmos quando a forma inicial do arco e o carregamento atuante, assumido como independente do tempo, são combinações lineares de funções senoidais. Zhou et al. (2015) apresentaram um método analítico para estudar a estabilidade não linear e o equilíbrio desconectado de arcos rasos com imperfeições geométricas assimétricas. A solução proposta por eles pode ser aplicada a arcos abatidos arbitrários com imperfeições geométricas arbitrárias. Zhou et al. (2017) propuseram uma abordagem de escala para destacar semelhanças entre os limites de *snap-through* dinâmicos em diferentes estruturas curvas delgadas, utilizando variações entre as características geométricas e/ou de condições de contorno para aproximações rápidas de limite de estabilidade dinâmica. Fernandes et al. (2017) apresentaram a resposta dinâmica de arcos abatidos sob carregamento distribuído transversal considerando as ligações rotuladas, sem impor qualquer rigidez para rotação.

O presente trabalho apresenta a resposta dinâmica de arcos abatidos, com ligações elásticas, sob força transversal via integração numérica, utilizando o algoritmo tradicional de Newmark para problemas transientes não lineares. A análise não linear geométrica foi feita utilizando uma formulação posicional do Método dos Elementos Finitos na qual se considera, ao invés dos deslocamentos lineares dos nós, as posições nodais como incógnitas do problema.

## 2 INSTABILIDADE DINÂMICA EM ARCOS ABATIDOS

De acordo com Fernandes et al. (2017) arcos abatidos são aqueles que possuem pequenas contra-flechas comparadas ao seu vão (Figura 1a). A representação típica do *snap-through* em análise estática pode ser visualizada na Fig. 1b. Quando ele ocorre, o diagrama carga-deslocamento apresenta um salto, sob controle de carga, do ponto 1 ao ponto 3. Em alguns casos é possível também observar, sob controle de deslocamento, um efeito *snap-back*: a estrutura retorna à sua configuração original por uma trajetória diferente da anterior (ponto 5 ao ponto 7).

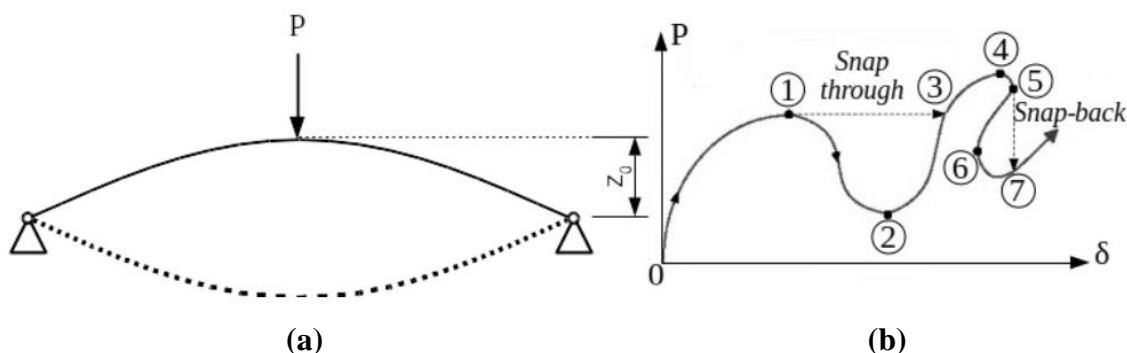


Figura 1. (a) arco abatido bi-rotulado e (b) curva típica carga-deflexão em análise estática.

Fonte: (Fernandes et al., 2017)

Entretanto, a falha das estruturas é um processo dinâmico; conseqüentemente, torna-se mais realista avaliar o fenômeno de flambagem e a estabilidade do ponto de vista dinâmico. Em termos gerais, pode-se dizer que uma estrutura (ou qualquer sistema) é estável se uma pequena alteração nas condições iniciais do problema levarem a uma pequena alteração na solução do mesmo (Bazant e Cedolin, 2010). O comportamento estrutural não linear pode surgir devido à não-linearidade geométrica (grandes deflexões e/ou rotações) ou à não-linearidade física (material não-linear).

Sistemas dinâmicos não-lineares mostram um espectro de comportamento mais complexo em relação aos lineares. Eles podem exibir não apenas uma resposta dinâmica simples, como oscilação ou divergência periódica, mas também uma resposta não periódica e aparentemente aleatória. A esta resposta se denomina caos; no entanto, ele pode apresentar certo grau de ordem e, portanto, seria incorreto tratá-lo por métodos de dinâmica aleatória (Bazant e Cedolin, 2010).

Uma vez que o *snap-through* é um problema altamente não-linear, as simulações numéricas de tal fenômeno requerem uso de algoritmos de marcha no tempo numericamente estáveis. Chandra (2012) demonstra dificuldades numéricas em algoritmos usuais de integração no tempo neste tipo de análise.

### 3 FORMULAÇÃO POSICIONAL PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O equacionamento do Método dos Elementos Finitos baseado em formulação posicional foi desenvolvido por Greco (2004), e associado ao Método de Newmark para análise dinâmica geometricamente não linear.

A expressão que caracteriza o funcional de energia do sistema é dada por:

$$\Pi = U_t - FX - K_c - K_a \quad (1)$$

sendo as parcelas de energia cinética ( $K_c$ ), amortecimento ( $K_a$ ) e energia potencial ( $U_t$ ) definidas como:

$$K_c = \int_V \frac{\rho}{2} \dot{X}^2 dV \quad (2)$$

$$K_a = \int_V c_m \rho X \dot{X} dV - \int_V \int_{X_k} c_m \rho \frac{X \ddot{X}}{X} dX_k dV \quad (3)$$

$$U_t = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dV \quad (4)$$

onde  $c_m$  representa o coeficiente de amortecimento,  $\rho$  a massa específica,  $F$  as forças externas e  $X$  o conjunto de coordenadas (posições ou inclinações) independentes que certo ponto nodal pode apresentar.

A matriz de massa dos elementos é considerada discreta na análise e os termos de massa referentes à rotação foram desprezados, de forma que a diagonal principal apresenta dois elementos nulos (Equação 5).

$$M = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

O termo associado ao amortecimento  $K_a$  no funcional de energia do sistema pode ser reescrito como:

$$K_a = CX \dot{X} - C \int_{X_k} \frac{X \ddot{X}}{X} dX_k \quad (6)$$

de forma que a matriz de amortecimento proporcional à massa ( $C$ ) assume a forma:

$$C = 2c_m M \quad (7)$$

O funcional de energia total descrito na Equação (1), minimizado a partir do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária, torna-se:

$$\frac{\partial K_c}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^{\text{coord}} \frac{m_i}{2} 2\dot{X}_i \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_k} \delta_{ik} \quad (8)$$

Aplicando-se a Regra da Cadeia para se obter a derivada da velocidade em relação aos graus de liberdade  $X_k$  do elemento finitos e, em seguida, retornando à Equação (8):

$$\frac{\partial K_c}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^{\text{coord}} m_i \dot{X}_i \ddot{X}_i \frac{1}{X_i} \delta_{ik} = \sum_{i=1}^{\text{coord}} m_k \ddot{X}_k \quad (9)$$

Para a parcela do amortecimento:

$$\frac{\partial K_a}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^{\text{coord}} c_{mi} \left( \dot{X}_i + X_i \ddot{X}_i \frac{1}{X_i} - \frac{X_i \dot{X}_i}{X_i} \right) \delta_{ik} = \sum_{i=1}^{\text{coord}} c_{mk} \dot{X}_k \quad (10)$$

A minimização do funcional pode, então, ser representada como:

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = \frac{\partial U_t}{\partial X} - F + M\ddot{X} + C\dot{X} = 0 \quad (11)$$

Na Equação (11), o tempo  $t$  e a posição  $X$  são as variáveis. Torna-se necessário fazer uma integração numérica no domínio do tempo e efetuar a segunda derivação com respeito à posição. Reescrevendo-se a mesma equação para o instante de tempo  $t+\Delta t$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\partial U_t}{\partial X} \Big|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + M\ddot{X}_{t+\Delta t} + C\dot{X}_{t+\Delta t} = 0 \quad (12)$$

A Equação (12) representa a equação de movimento, ou seja, a condição de equilíbrio dinâmico não linear geométrico para o problema. O vetor dos carregamentos nodais  $F_{t+\Delta t}$  é conhecido em cada instante de tempo, e definido como:

$$F_{t+\Delta t} = F_0 [c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 \sin(c_6 t) + c_7 \cos(c_8 t) + c_9 e^{c_{10} t}] \quad (13)$$

em que  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{10}$  são coeficientes da função do carregamento aplicado ao sistema em análise.

### 3.1 Método de Newmark

Utilizando o Método de Newmark para a integração numérica no domínio do tempo, pode-se obter as equações em função das posições:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_t \right] + \beta \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (14)$$

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{X}_t + \gamma\Delta t\ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (15)$$

em que a aceleração nodal inicial é determinada, com base na Equação (12), como:

$$\ddot{X}_0 = M^{-1} \left[ F_0 - C\dot{X}_0 - \frac{\partial U_t}{\partial X} \Big|_n \right] \quad (16)$$

Como a formulação apresentada é baseada na descrição das posições, os deslocamentos não são utilizados no processo. Entretanto, conhecidas as posições, pode-se fazer:

$$X = X_0 + U \Rightarrow U = X - X_0 \quad (17)$$

A aceleração e a velocidade ficam:

$$\dot{U} = \dot{X} \quad (18)$$

$$\ddot{U} = \ddot{X} \quad (19)$$

Se as Equações (17) a (19) forem substituídas nas Equações (16) e (17), serão obtidas as expressões para o Método de Newmark em função dos deslocamentos nodais.

Tomando-se a Equação (14) e isolando-se as acelerações no tempo  $t+\Delta t$ , chega-se a:

$$\ddot{X}_{t+\Delta t} = \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot{X}_t}{\beta\Delta t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{X}_t \quad (20)$$

Levando-se as Equações (15) e (20) na Equação (12) obtém-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\partial U_t}{\partial X} \Big|_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta\Delta t^2} X_{t+\Delta t} - MD_t + CE_t + \frac{\gamma C}{\beta\Delta t} X_{t+\Delta t} - \gamma\Delta t CQ_t = 0 \quad (21)$$

em que os vetores  $D_t$  e  $E_t$  possuem, em seus elementos, as contribuições das variáveis consideradas no instante anterior  $t$ :

$$D_t = \frac{X_t}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{X}_t}{\beta\Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{X}_t \quad (22)$$

$$E_t = \dot{X}_t + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{X}_t \quad (23)$$

Retornando-se na Equação (21) e derivando-a em relação às posições no instante atual, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \Big|_{t+\Delta t} = \nabla g(X^0) = \frac{\partial^2 U_t}{\partial X^2} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta\Delta t} \quad (24)$$

A Equação (24) representa a expressão da matriz Hessiana para o problema dinâmico.

A implementação do efeito elástico nos apoios (molas) foi realizada na matriz hessiana de forma global, considerando-se a contribuição de cada elemento finito, nas posições relativas ao grau de liberdade de rotação para cada nó.

## 4 EXEMPLOS

A seguir são apresentados dois exemplos de aplicação da formulação apresentada na Seção 3, implementada em FORTRAN, em arcos abatidos com ligações semi-rígidas, conforme Figura 2. Os dois exemplos seguirão a seguinte descrição:

- Foram considerados 20 elementos, sendo 2 elementos mudos (utilizados somente para permitir a inserção das molas).
- Foram 23 nós, sendo 2 nós duplos (permitem rotação independente entre os elementos concorrentes no nó): nós 2-3 e nós 21-22.
- O nó analisado situa-se no topo do arco abatido (Nó 12).
- Será considerada uma seção quadrada (20mmx20mm), Área = 400mm<sup>2</sup>, I=13333.333...mm<sup>4</sup>, E = 2.10<sup>5</sup>kN/mm<sup>2</sup>, densidade = 7,80.10<sup>-8</sup>Ns<sup>2</sup>/mm<sup>4</sup>.
- Carregamento transversal concentrado.
- E, I e L correspondentes aos elementos são constantes em todo o arco abatido.
- A amplitude do arco é 20 mm.

### 4.1 Exemplo 1

O Exemplo 1 consiste em um arco abatido com apoios elásticos sob carga instantaneamente aplicada, conforme Figura 2. Este problema foi analisado por Rosas (2016) e será utilizado para comparação dos resultados obtidos via formulação posicional do Método dos Elementos Finitos considerando apoios elásticos. O valor específico de mola utilizado foi de 2,8 MN/m, a taxa de amortecimento de 0,010 e o intervalo de tempo de 0,5 segundos.

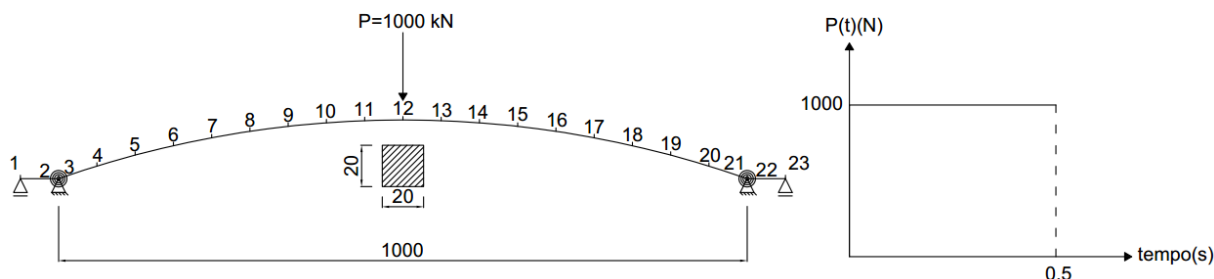
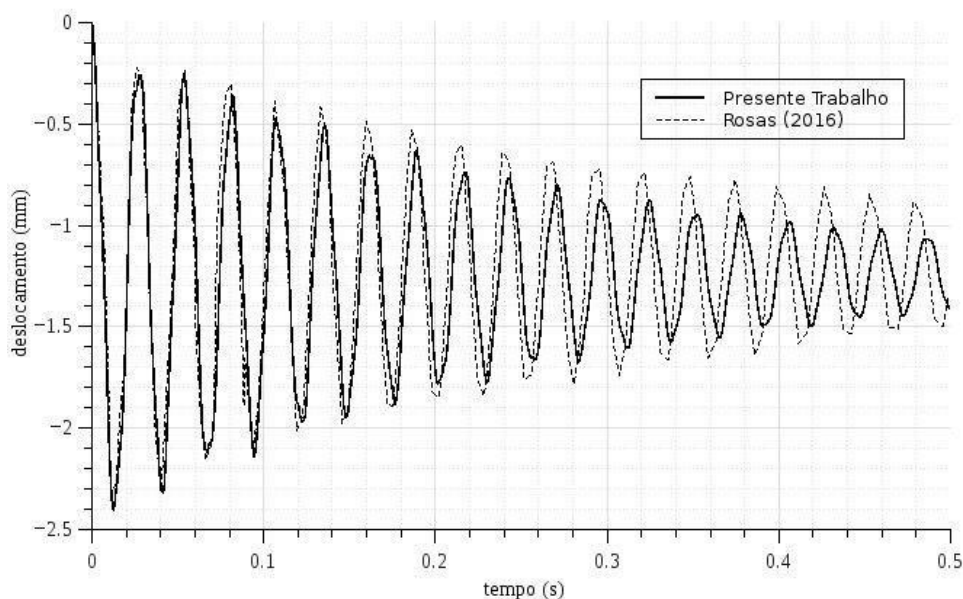


Figura 2. Arco abatido com apoios elásticos sob carga de impacto.

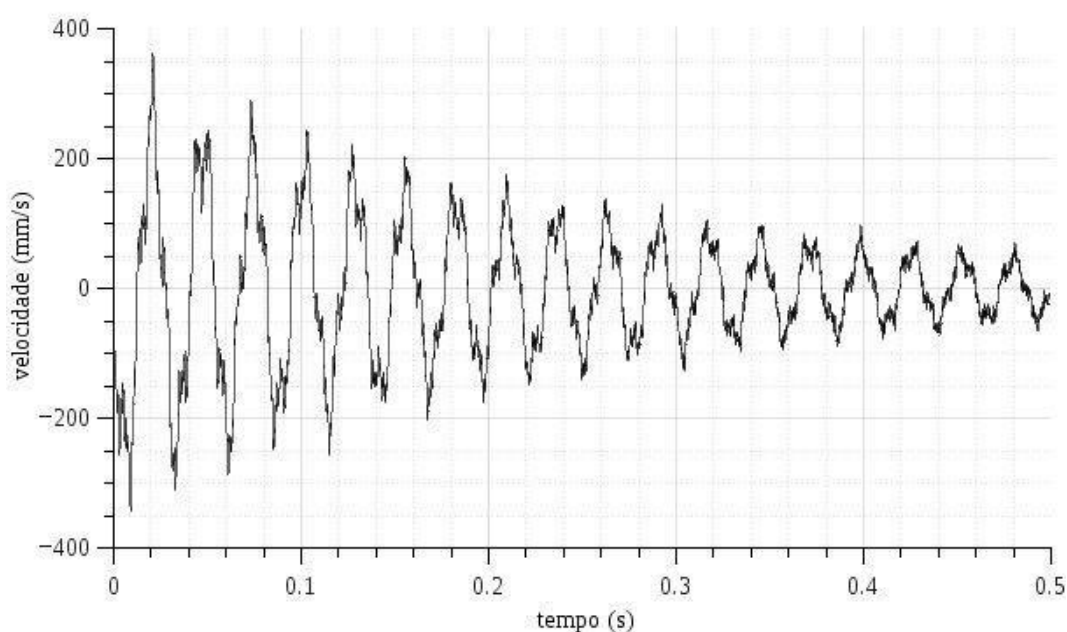
A Figura 3 apresenta os deslocamentos do nó central em função do tempo. Observa-se boa concordância entre os resultados do presente trabalho e Rosas (2016). Não se observa *snap-through* neste caso. Isso fica evidenciado pela amplitude dos deslocamentos do nó central. A diferença entre os resultados pode estar associada à

utilização da formulação posicional para este trabalho e da frequência fundamental utilizada na análise ( $f = 40.210\text{Hz}$ ), correspondente ao 1º modo de vibração (ROSAS, 2016), bem como do coeficiente de amortecimento considerado. Os resultados tendem a um valor constante com o aumento do tempo (aproximadamente 1,3mm).



**Figura 3. Deslocamentos do nó central em função do tempo.**

Para as velocidades (Figura 4), observa-se diminuição da amplitude no avanço de tempo, tendendo ao valor zero (equivalente à resposta estática).



**Figura 4. Velocidades do nó central em função do tempo.**



Para o diagrama de fase (Figura 5), utilizou-se um maior intervalo de tempo ( $t_f=1,5s$ ) para melhor visualização do ponto de foco (ponto para o qual, sendo o sistema amortecido, o diagrama espiral converge, apresentando velocidade nula), que corresponde à resposta em análise estática. No exemplo, este ponto corresponde ao deslocamento aproximado de  $-1,3mm$ . O diagrama em espiral, característico de sistemas amortecidos, mostra-se distorcido pelo efeito dos apoios elásticos.

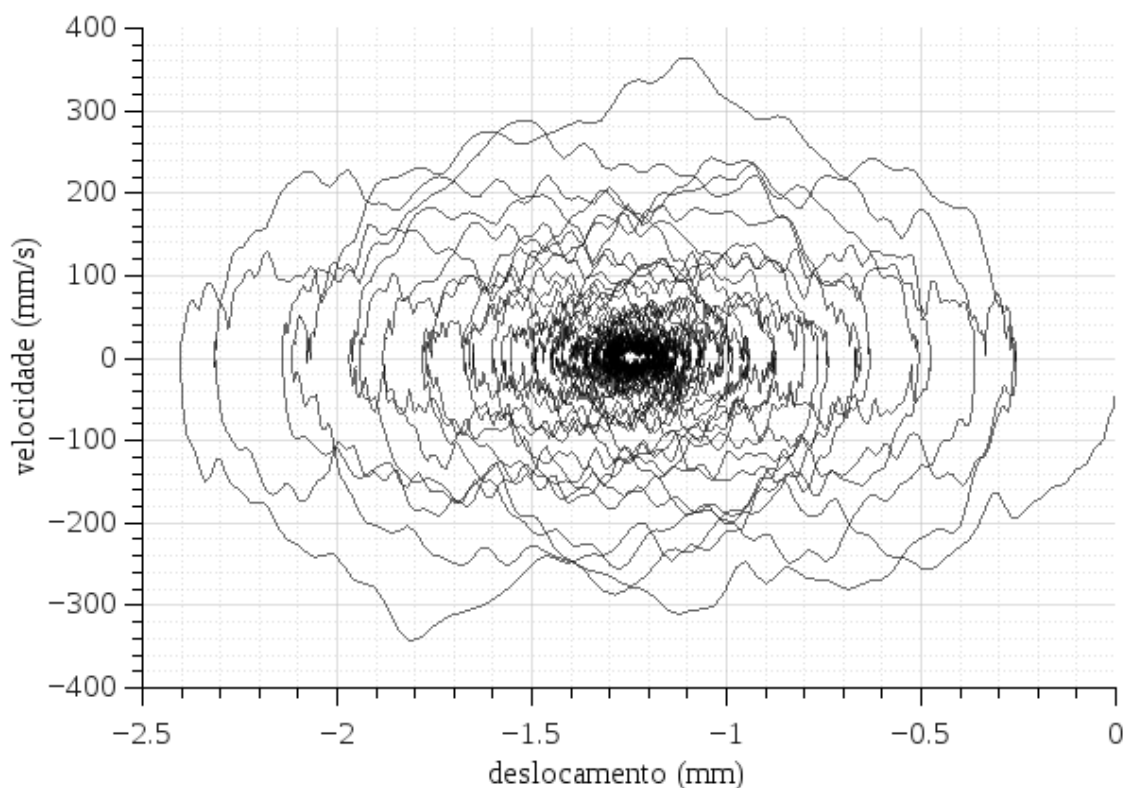


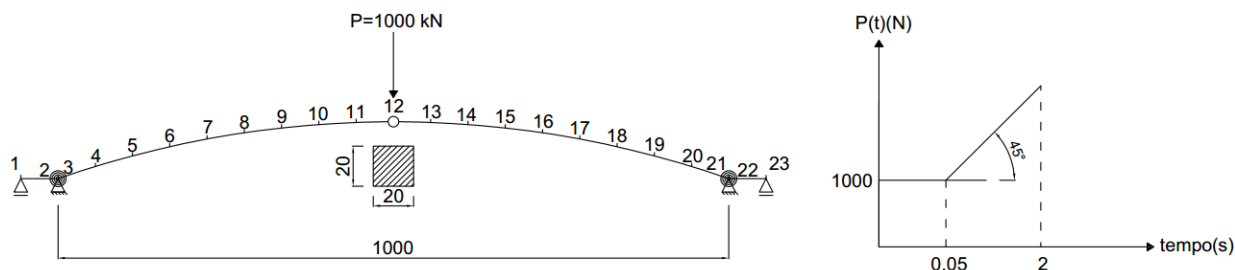
Figura 5. Diagrama de fase do nó central.

## 4.2 Exemplo 2

O Exemplo 2 consiste em um arco abatido considerando distintas condições de apoio. Foram utilizados apoios elásticos, bi-rotulados, bi-engastados e rotulado-engastado. Para os apoios elásticos a rigidez da mola foi obtida pela seguinte relação:

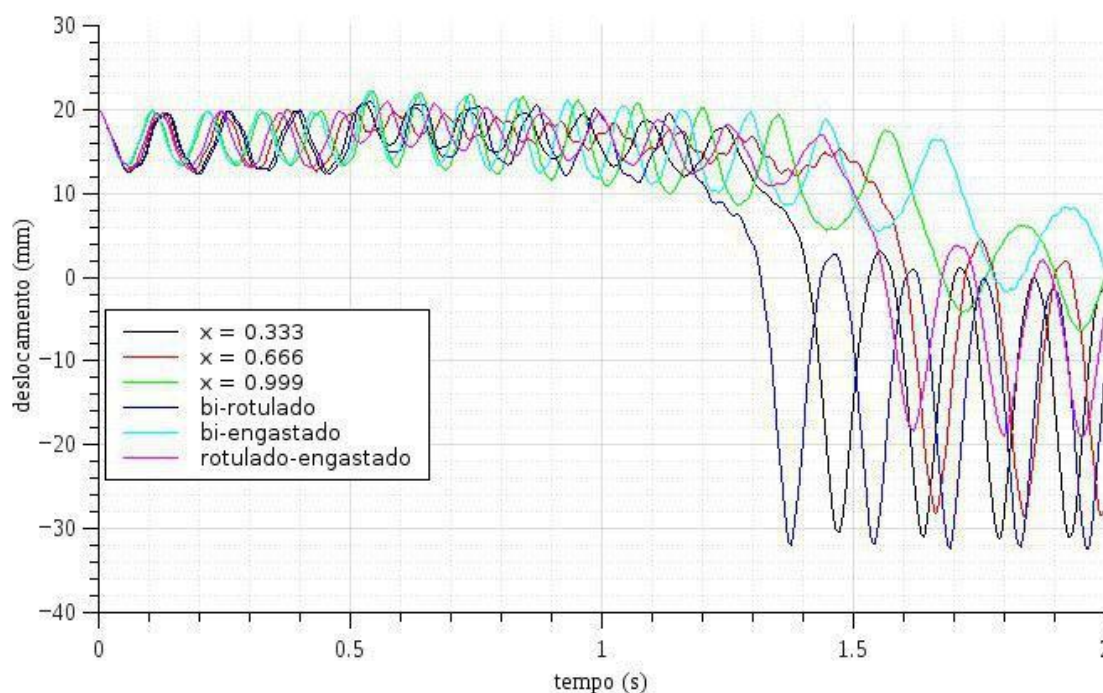
$\left(\frac{x}{1-x}\right) \cdot \frac{EI}{L}$ , sendo  $0 \leq x < 1$ , sendo  $x = 0$  equivalente a uma rótula perfeita e  $x = 1$  equivalente a um engaste perfeito. Os valores escolhidos para análise foram:  $x = 0,333$ ,  $0,666$  e  $0,999$ . Foi considerado um carregamento aplicado de forma súbita até  $0,5$

segundos e crescente no tempo de 0,5 segundos até 2 segundos, conforme apresentado na Figura 6.



**Figura 6.** Arco abatido com rótula em seu topo sob duas fases de carga.

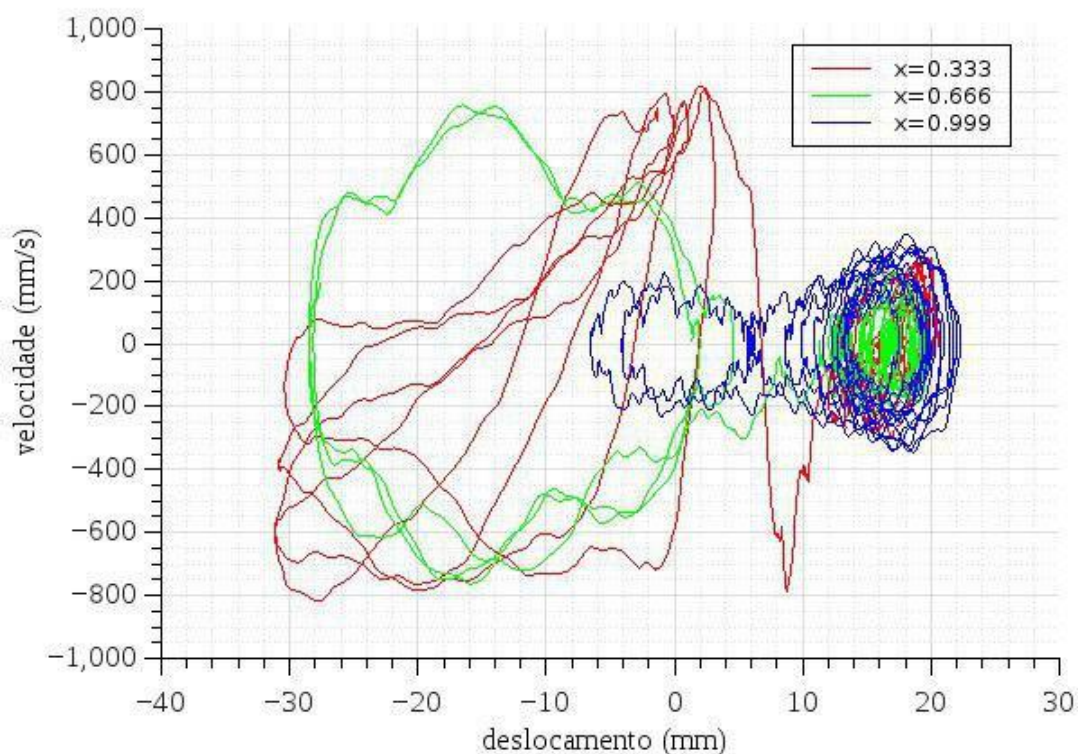
Os deslocamentos são apresentados na Figura 7. A mudança de uma configuração de equilíbrio para outra remota pode ser observada em todos os casos. A situação referente ao arco bi-rotulado foi a primeira a demonstrar o comportamento caótico. O salto ocorre no instante aproximado  $t=1,2s$ . Conforme esperado, a situação de arco bi-engastado foi a última a apresentar *snap-through*. Destaca-se ainda o fato de que a configuração remota não é simétrica à original (como no caso bi-rotulado) devido aos apoios, o que ocasiona um salto menor. As situações intermediárias são também demonstradas. Torna-se importante enfatizar que para  $x = 0,333$  o comportamento se assemelha ao caso bi-rotulado, e para  $x = 0,999$  a resposta se aproxima do caso bi-engastado.



**Figura 7.** Deslocamentos do nó central em função do tempo.

Como não há amortecimento, os diagramas de fase apresentam espirais não convergentes para os pontos de foco. Nota-se que o diagrama de fase para o nó central para o arco com apoios elásticos em que  $x=0,333$  não apresenta espiral bem definida após o *snap-through* (Figura 8). Possivelmente, pelo fato do problema ser não-linear, a influência dos apoios elásticos com baixa rigidez é muito significativa. Para os casos de maior rigidez ( $x=0,666$  e  $x=0,999$ ), as espirais nas configurações antes e depois do salto para a nova configuração de equilíbrio são mais nítidas.

O arco com apoios não elásticos tende a apresentar espirais mais bem definidas (Figura 10). O bi-rotulado é o mais nítido. A distância entre as envoltórias nas configurações de equilíbrio antes e depois do *snap-through* pode ser também observada. Isso está associado à nova configuração de equilíbrio remota. Para o arco bi-rotulado esta distância é maior que para o arco bi-engastado. A situação rótula-engaste assume uma condição intermediária.



**Figura 8. Diagrama de fase do nó central para apoios elásticos.**

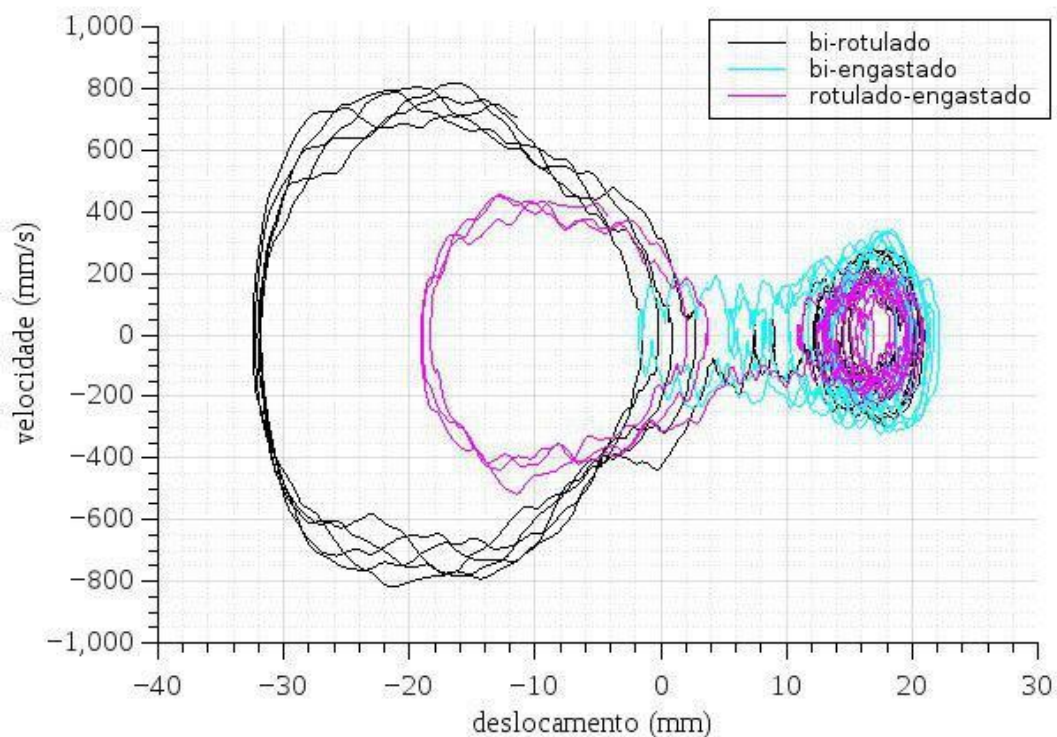


Figura 9. Diagrama de fase do nó central para considerando apoios bi-rotulado, bi-engastado e rotulado-engastado.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresentou a resposta dinâmica de arcos abatidos sob carga concentrada via integração numérica utilizando o Método de Newmark para problemas transientes não lineares. Foi utilizada uma formulação posicional do Método dos Elementos Finitos. As respostas obtidas possuem coerência em relação a problemas encontrados em literatura. O fenômeno de *snap-through* dinâmico, associada a comportamento caótico, pôde ser observado e comentado em cada exemplo.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem os apoios financeiros concedidos pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG).



---

## REFERÊNCIAS

- Bazant, Z., Cedolin, L., 2010. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. World Scientific.
- Chandra, Y., Wiebe, R., Stanciulescu, I., Virgin, L. N., Spottswood, S. M., & Eason, T. G., 2013. Characterizing dynamic transitions associated with snap-through of clamped shallow arches. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, pp. 5837–5855.
- Fernandes, W.L.; Vasconcellos, D. B.; Greco, M., 2017. Instabilidade dinâmica em arcos abatidos submetidos a força transversal. *CILAMCE*, Florianópolis – SC, Brazil.
- Galvão, A. S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas*. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Rosas, L. R. B., 2016. *Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Reticulados com Restrições de Contato*. MSc dissertation, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Silva, A. R. D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. PhD thesis, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Virgin, L. N., Wiebe, R., Spottswood, S. M., & Eason, T. G., 2014. Sensitivity in the structural behavior of shallow arches. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 58, pp. 212–221.
- Zhou, Y., Chang, W., & Stanciulescu, I., 2015. Non-linear stability and remote unconnected equilibria of shallow arches with asymmetric geometric imperfections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 77, pp. 1–11.
- Zhou, Y., Stanciulescu, I., Eason, T., & Spottswood, M., 2017. Fast approximations of dynamic stability boundaries of slender curved structures. *International Journal of NonLinear Mechanics*, vol. 95, pp. 47–58.