III JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
"Educação e Ciência: Desafio e Perspectivas"

TEOREMA DA CATEGORIA DE BAIRE E A APLICAÇÕES

SANTOS, Eriangra Oliveira dos[1]; **JUNIOR**, José Carlos de Oliveira[2]

RESUMO

Este trabalho analisa o Teorema da Categoria de Baire, um resultado fundamental na topologia e análise funcional. O teorema estabelece que, em um espaço topológico completo, a interseção de uma sequência de conjuntos densos e abertos é também densa, desafiando a intuição comum sobre esses conjuntos. Suas aplicações são amplas, abrangendo áreas como análise real e teoria da medida, incluindo a demonstração do Teorema de Banach-Steinhaus e a existência de soluções para equações diferenciais. O projeto de iniciação científica concentrou esforços na compreensão e delimitação do teorema por meio de uma revisão bibliográfica extensa, consultando diversas fontes. O estudo da teoria das dimensões em sistemas dinâmicos serviu como ponto de partida. Foram abordados conceitos fundamentais, como espaços métricos e espaços métricos completos, estabelecendo uma base sólida para as etapas seguintes da pesquisa. Os resultados alcançados indicam que a dedicação e o aprofundamento nas análises contribuíram para um entendimento significativo do teorema e suas implicações. Este trabalho ressalta a importância teórica do Teorema da Categoria de Baire, além de sua relevância prática na matemática contemporânea.

Palavras-chave: Categoria de Baire. Topologia. Conjuntos. Aplicações.

I. INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

O Teorema da Categoria de Baire, formulado pelo matemático francês René-Louis Baire no final do século XIX, é um resultado central na topologia e análise funcional, com aplicações significativas em áreas como análise, teoria da medida e equações diferenciais. O teorema revela uma propriedade notável de conjuntos

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica (PIBIC). Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas. eriangra.santos@ufnt.edu.br.

2 Professora Doutor do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), orientador do projeto de Iniciação Científica. jose.junior@ufnt.edu.br.

densos em espaços completos: a interseção de uma sequência de conjuntos densos e abertos é também densa. Essa descoberta, publicada em 1899, desafiou a intuição da época ao introduzir o conceito de "categoria" para denotar conjuntos "não-esparsos".

Entre as aplicações do teorema, destaca-se a demonstração do Teorema de Banach-Steinhaus, que estabelece que, em um espaço de Banach, se uma sequência de operadores lineares limitados é ponto a ponto limitada, ela também é uniformemente limitada. O Teorema da Categoria de Baire é crucial para essa prova, pois garante a existência de um conjunto denso onde essa limitação se mantém. Além disso, o teorema é utilizado na prova da existência de soluções para equações diferenciais, mapeando essas equações em problemas de ponto fixo e demonstrando a presença de soluções.

Outras aplicações incluem a prova de que o conjunto dos números reais é não enumerável e que há mais funções contínuas que não possuem derivada em um intervalo do que aquelas que a possuem. Assim, o Teorema da Categoria de Baire se revela uma ferramenta poderosa e versátil, fundamental para a análise e resolução de problemas teóricos e práticos, sendo um dos focos desta pesquisa, que busca explorar suas implicações e apresentar o próprio teorema de forma detalhada.

II. OBJETIVOS

1. Objetivos Gerais:

a. Compreender os conceitos que envolver o Teorema da Categoria de Baire.

b. Aplicar o resultado em questões importantes da Análise Real e da Análise Funcional.

c. Apresentar os resultados da pesquisa em eventos, palestras e efetuar uma possível publicação em revista internacional caso resultados relevantes sejam obtidos.

2. Objetivos Específicos:

a. Compreender o conceito de conjuntos densos em espaços topológicos.

b. Familiarizar-se com o conceito de interseção de conjuntos e suas propriedades.

c. Estudar as propriedades de espaços topológicos completos.

d. Analisar exemplos concretos de conjuntos densos em espaços topológicos.

e. Compreender a formulação precisa do Teorema da Categoria de Baire.

f. Estudar a demonstração do Teorema da Categoria de Baire e entender seus passos chave.

g. Investigar as implicações e consequências do teorema em relação a conjuntos densos e abertos.

h. Aplicar o Teorema da Categoria de Baire na resolução de problemas de análise real.

i. Explorar aplicações do teorema em outras áreas, como em espaços métricos.

j. Desenvolver habilidades de raciocínio abstrato e lógico por meio do estudo e aplicação do teorema.

III. METODOLOGIA

Para atingir os objetivos da pesquisa, a equipe seguiu um programa estruturado. Inicialmente, foram reunidas bibliografias relevantes sobre o Plano de Trabalho, com consultas a dissertações, teses e artigos científicos. Em seguida, a equipe familiarizou-se com conceitos fundamentais de topologia, como espaços topológicos, conjuntos densos e a noção de conjuntos sem interior. O estudo aprofundou-se nos espaços completos, compreendendo que uma sequência de Cauchy converge para um ponto dentro do espaço.

A equipe também leu e entendeu o Teorema da Categoria de Baire, que afirma que a interseção de conjuntos densos e abertos em um espaço completo é densa. A demonstração do teorema foi analisada, permitindo reflexões sobre suas implicações e como desafia a intuição sobre conjuntos. As aplicações do teorema em áreas como análise real e teoria da medida foram exploradas, seguidas da resolução de problemas práticos relacionados.

Além disso, foram consultadas referências adicionais para aprofundar o conhecimento sobre o tema e relatórios sistematizando as observações foram elaborados.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para cumprir com os objetivos, foram executadas tarefas a fim de delinear o teorema por partes e, após isso, compreender cada conceito envolvido por meio de pesquisas bibliográficas.

1) Reunimos bibliografias através de pesquisas na internet e na biblioteca virtual da universidade sobre diferentes literaturas que envolvem o assunto do Plano de Trabalho, consulta no banco de dissertações e teses das instituições de ensino superior e em artigos de revistas científicas.

a. Um estudo da teoria das dimensões aplicadas a sistemas dinâmicos. (Silva, A. P. D., 2015)

2) Delinear o Teorema separando os conceitos em itens.

<u>Teorema</u> 1.14 (Teorema da categoria de Baire, Munkres, Theorem 48.2)

Se X é um espaço métrico completo, então:

a) reunião enumerável de fechados de interior vazio tem interior vazio;

b) a interseção enumerável de abertos densos é densa.

2.1) Delineamento do teorema:

1. Espaços métricos.
2. Espaços métricos completos.

3. Interior de um conjunto
4. Denso em nenhum lugar
5. Interior vazio
6. Topologia discreta
7. Conjunto denso
8. Conjunto de segunda categoria
9. União contável de conjuntos
10. Espaço topológico não escasso
11. Espaço topológico escasso
12. Localmente compacto
13. Metrizável
14. Completamente metrizável

3) Demonstrar o teorema a partir dos pré-requisitos necessários

3.1) Espaço métrico e espaço métrico completo

Para demonstrar que $\mathbb{R}$ é completo, precisamos mostrar que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge para um limite que está em $\mathbb{R}$.

Para ser um espaço métrico, é necessário satisfazer as definições:

$1. d(x, y) \geq 0 \; e \; d(y, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$2. d(x, y) = d(y, x)$

$3. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Uma sequência de cauchy é definida da seguinte forma:

<u>Definição</u> 2.24 (Uma Introdução ao Estudo de Espaços Métricos e Normados, Sousa)

Seja X um espaço métrico e $x_n$uma sequência em X dizemos que x_n é uma sequência de $cauchy$ se:

$$\forall \; e > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < e$$

<u>Para a proposição 2.25:</u>

$$Toda\ sequência\ corvergente\ em\ X\ é\ uma\ sequência\ de\ cauchy$$

Temos a demonstração:

1. x_n *de Cauchy*

2. Vamos mostrar que x_n converge em $\mathbb{R}$

3. Tomando $n = n_0 = 0$ e $e = C > 0$, que é a definição de sequência de Cauchy, que $\forall m \in \mathbb{N}(m \geq 0), d(x_m, 0) < C$, que é a definição de que a sequência (x_n) é limitada.

4. Na página 46 do artigo

   4.1. Suponha que (a_n) sequência limitada

   4.2. $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in N(|a_n| \leq M)$

   4.3. Considere $[-M, M]$

   4.4. $\forall n \in \mathbb{N}\ (a_n) \in [-M, M]$

   4.5. Vamos aplicar o princípio da casa dos pombos

   4.6. Seja $[a_1, b_1]$ bisseção de $[-M, M]$ ao meio tal que $[a, b_1]$ tenha infinitos termos

   4.7. Repita esse processo indefinidamente selecionando a cada passo a_{nk} da sequência original do $[a_k, b_k]$

   4.8. Com isso, formamos (a_{nk})

5. Se (x_n) é uma sequência de Cauchy que possui subsequências corvergentes, ela mesma é corvergente e para o mesmo ponto.

Por consequência:

$\forall m, n \geq n_0, d(x_m, x_n) \geq d(x_m, x) + d(x, x_n) = \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e$ ■

a) reunião enumerável de fechados de interior vazio tem interior vazio

Suponha que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Fn$, F_n conjunto fechado de interior vazio

Int $(\bigcup_n Fn) = \emptyset$

1. Absurdo, assuma o int( ) $\neq \emptyset$
2. $\exists x \in X, \exists e > 0: B(x.e) \subset \bigcup_n Fn$
3. $B(x, e0 \cap F_k \neq 0$ para algum k
4. $\exists B(y, \delta): B(y, \delta) \subseteq B(x, e) \cap F_k,\ \delta > 0$
5. Temos uma contradição, pois F_k tem interior $\emptyset$. ■

V. CONCLUSÃO/CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos primeiros seis meses deste projeto de iniciação científica, focamos na compreensão e delimitação do Teorema da Categoria de Baire, embasando-nos em uma revisão bibliográfica abrangente que incluiu fontes online, a biblioteca virtual da universidade, dissertações, teses e artigos científicos. A teoria das dimensões aplicada a sistemas dinâmicos, conforme proposta por Silva (2015), foi o ponto de partida para nossa investigação.

Exploramos o teorema sob diversos aspectos, abordando conceitos essenciais como espaços métricos e espaços métricos completos. Esse período inicial foi fundamental para estabelecer uma base sólida, orientando o desenvolvimento das etapas subsequentes e a obtenção de resultados significativos. Aprofundamos nossa análise e buscamos novas perspectivas, enriquecendo nosso entendimento.

Com o projeto agora concluído, estamos satisfeitos com os resultados alcançados. A dedicação e o esforço contínuo ao longo do ano trouxeram insights valiosos que acreditamos contribuir para o avanço da ciência e para o enriquecimento do campo de estudo em questão.

VI. REFERÊNCIAS

Adams, Colin; Franzosa, Robert. **Introduction to Topology**: Pure and Applied. Pearson, 2018. Barra, G. de. Measure Theory and Integration. John Wiley & Sons, 1977.

Fabian, Marián; Habala, Petr; Hájek, Petr; Montesinos, Vicente; Zizler, Václav. **Banach Space Theory:** The Basis for Linear and Nonlinear Analysis. CMS Books in Mathematics, Springer, 2011.

Griffel, D.H. **Applied Functional Analysis**. Dover Publications, 2002.

Lax, Peter D. **Functional Analysis.** John Wiley & Sons, 2002. Munkres, James R. Topology. 2ª ed. Prentice Hall, 1999.

Royden, H.L.; Fitzpatrick, P.M. **Real Analysis**. 4ª ed. Pearson, 2010.

Rudin, Walter. **Functional Analysis**. 2ª ed. McGraw-Hill, 1991.

Rudin, Walter. **Principles of Mathematical Analysis**. 3ª ed. McGraw-Hill, 1976.

Rudin, Walter. Real and **Complex Analysis**. 3ª ed. McGraw-Hill, 1987

SILVA, Alex Pereira da. **Um estudo da teoria das dimensões aplicado a sistemas dinâmicos**. 2015. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

SOUSA, Stefânia Carvalho de et al. **Uma introdução ao estudo de espaços métricos e normados**. 2021.

VII. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Universidade Federal do Norte do Tocantins