XIII SIMMEC
Simpósio de Mecânica Computacional
29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES

MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA EM SISTEMAS DINÂMICOS USANDO O MÉTODO DAS PERTURBAÇÕES

Modeling and numerical simulation in dynamic systems using the perturbation method

Lucas Silva Rodrigues (1); Emerson De Sousa Costa (2); Társis Augusto Rodrigues Parreiras (3); Luiz Claudio Oliveira (4)

(1) (3) Graduando em Engenharia Mecatrônica, Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET/MG (Campus V), Divinópolis - MG, Brasil.
(2) (4) Doutor Professor, Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET/MG (Campus V), Divinópolis - MG, Brasil.
E-mail para Correspondência: lucassilvarodrigues96@gmail.com; (P) Apresentador

Resumo: Este trabalho propõe-se a apresentar a modelagem matemática, a implementação e a aplicação dos principais métodos fornecidos pela teoria das perturbações. A ideia central desta teoria consiste em decompor um problema complexo em infinitos problemas mais simples e, então, resolvendo apenas alguns destes, obter uma boa aproximação da solução. Em função disso, a teoria das perturbações é uma poderosa ferramenta utilizada para resolver muitos problemas de engenharia envolvendo sistemas dinâmicos, pois a mesma provê um acervo de métodos iterativos capazes de viabilizar uma solução aproximada. Até o presente momento, foi desenvolvido um algoritmo capaz de calcular aproximações satisfatórias para raízes de equações polinomiais, utilizando o método das perturbações.

Palavras chaves: Modelagem; Sistemas dinâmicos; Método das perturbações.

Abstract: This project proposes to present the mathematical modeling, implementation and application of the main methods provided by the perturbation theory. The main idea of this theory is to decompose a complex problem into infinite simpler problems, and then, by solving only some of these decomposed problems, obtain a good approximation of the solution. As a result, perturbation theory is a powerful tool used to solve many engineering problems involving dynamic systems, because it provides a collection of iterative methods capable of making an approximate solution possible. To date, an algorithm has been developed capable of calculating satisfactory approximations for roots of polynomial equations using the perturbations method.

Keywords: Modeling; Dynamics Systems; Perturbations Method.

1 INTRODUÇÃO

Os modelos são interpretações lógicas de sistemas reais que têm como finalidade descrever e predizer os fenômenos físicos neles envolvidos por meio das leis matemáticas que os regem e, a partir disso, obter uma representação aproximada satisfatória. Segundo Carrara (2012), os modelos se dividem em físicos ou matemáticos. Os primeiros, assemelham-se a sistemas reais, porém são simplificados mantendo as características essenciais. Já os modelos matemáticos procuram representar o comportamento dinâmico dos sistemas por meio de equações matemáticas (equações diferenciais e equações das diferenças). Dessa forma, é possível prever o comportamento de um sistema real através do seu modelo físico e/ou matemático.

Entende-se por sistema dinâmico como aquele cujo as variáveis variam com o tempo, ou seja, seu estado evolui temporalmente. Devido à sua aplicabilidade em problemas de engenharia, tais como: vibração mecânica, escoamento de fluidos, condução elétrica e outros, a área de sistemas dinâmicos é uma das mais estudadas pela modelagem matemática. No entanto, a obtenção da solução analítica dos problemas envolvendo estes sistemas é muito trabalhosa e na maioria das vezes impraticável. Em alguns casos específicos é viável resolvê-los por integração numérica, mas a alternativa mais adotada para solucionar este problema é a utilização de métodos numéricos que forneçam soluções aproximadas.

Segundo Hazewinkel (1991), a proposição inicial da teoria das perturbações se deu na mecânica celeste, no contexto dos movimentos dos astros no sistema solar. Os problemas clássicos de trajetória espacial dos “dois-corpos” e “três-corpos” foram os propulsores para o desenvolvimento da teoria. Grandes matemáticos como Laplace, Poisson e Gauss usaram a teoria das perturbações para melhorar a precisão de seus modelos envolvendo os astros do sistema solar. Um dos principais triunfos da teoria foi a contribuição para a descoberta do planeta Netuno, em 1848 por Adams e Verrier, com base nos desvios de seu movimento.

2 TEORIA DAS PERTURBAÇÕES

Segundo Hazewinkel (1991), a teoria das perturbações reside no fato de que é possível obter uma descrição aproximada do sistema em estudo usando algum sistema "ideal" (mais simples) especialmente selecionado que pode ser completamente resolvido.

Um dos critérios de aplicabilidade da teoria das perturbações, dependendo da natureza do problema em estudo, é que as equações que descrevem o processo em questão contêm um pequeno parâmetro, explícita ou implicitamente. O requisito é, além disso, que se o pequeno parâmetro for zero, a equação é exatamente solucionável, de modo que o problema é reduzido a encontrar o comportamento assintótico da melhor aproximação da solução verdadeira. Esse parâmetro, geralmente definido como $\varepsilon \ll 1$, é inserido temporariamente na equação com o objetivo de reduzir a mesma a uma nova equação mais simples de ser solucionada.

O exemplo abaixo ilustra de maneira bem simples a ideia central da teoria. Vale ressaltar que o mesmo não utiliza nenhum método de solução relacionado a teoria das perturbações, sendo apenas uma representação do princípio por trás da teoria.

Seja a equação quadrática definida por:

$$x^2 + 0{,}02x - 1 = 0 \tag{1}$$

Sua solução será:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0{,}02 + \sqrt{(0{,}02)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)} \cong 0{,}99 \\ x_2 &= -0{,}02 - \sqrt{(0{,}02)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)} \cong -1{,}01 \end{aligned} \tag{2}$$

Analisando o termo $0{,}02x$ percebe-se que o mesmo é muito menor (magnitude) do que os demais, sendo proporcionalmente descartável em termos de aproximação para a solução, e então, podemos reescrever a Eq. (1) como:

$$\begin{aligned} &x^2 - 1 = 0 \\ &x_1 = 1\,;\ x_2 = -1 \end{aligned} \tag{3}$$

É possível observar nitidamente que a solução da Eq. (3) é mais simples de ser obtida do que a original. E é fundamentado nesse princípio que os métodos fornecidos pela teoria serão apresentados e utilizados neste trabalho.

Segundo Rozman (2016), existem duas categorias principais de soluções para os problemas que envolvem perturbações, sendo elas: soluções de caráter regular e singular. Na primeira, ao fazer o termo ε tender à zero, tem-se uma boa e suave aproximação da solução não perturbada, ou seja, quando ε é igual a zero.

Já na singular, tem-se que a medida que a precisão da resposta é melhorada, a mesma diverge da solução exata, exigindo então a utilização de métodos modificados para se obter uma solução satisfatória.

2.1 Perturbação regular

A motivação para utilizar os métodos das perturbações está no fato de que a solução exata não é procurada, mas sim uma aproximação da mesma a partir da série de expansão em potências de ε. As potencialidades desta teoria residem no fato de que, em geral, os primeiros termos das séries de solução, são suficientes para revelar características importantes da solução de um problema.

Para obter a solução da Eq. (1) a partir do método de perturbação regular, primeiramente é necessário transformá-la em uma equação que contenha o parâmetro de perturbação (ε). É válido destacar que nem sempre essa transformação é simples e óbvia, especialmente em problemas que envolvam grandezas físicas. Ao inserir o parâmetro de perturbação na Eq. (1), obtém-se:

$$x^2 + 2\varepsilon x - 1 = 0 \tag{4}$$

Ressalta-se que ao considerar $\varepsilon = 0{,}01$ a equação retorna para sua forma original.

A solução para a Eq. (4) deverá ser da forma:

$$x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \varepsilon^n \tag{5}$$

Em que deseja-se encontrar os coeficientes de $x(\varepsilon)$ que satisfazem essa equação e, em seguida, substituí-los na Eq. (1). Ao substituir a Eq. (5) na Eq. (6), obtém-se:

$$(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \cdots)^2 + 2\varepsilon(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \cdots) - 1 = 0 \tag{6}$$

Para efeitos de cálculo será feito um truncamento na série anterior, em que serão considerados somente os três primeiros termos da série de perturbação, que serão suficientes para fornecer uma aproximação razoável da solução exata.

Assim a Eq. (1) se torna:

$$(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2)^2 + 2\varepsilon(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2) - 1 = O(\varepsilon^3) \tag{7}$$

Ao fatorar a Eq.(7) e eliminar os termos de ε com expoente superior a 2 devido ao truncamento feito anteriormente, obtém-se:

$$({x_0}^2 - 1)\varepsilon^0 + (2x_0x_1 + 2x_0)\varepsilon^1 + ({x_1}^2 + 2x_0x_2)\varepsilon^2 = O(\varepsilon^3) \tag{8}$$

Ao fazer o parâmetro $\varepsilon \to 0$, segue que a Eq. (8) também irá tender a zero e, então, os termos da equação em função da ordem de ε poderão ser agrupados da seguinte maneira:

Solução de ordem zero ($O(\varepsilon^0)$):

$$\begin{aligned} {x_0}^2 - 1 &= 0 \\ x_0 &= \pm 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Solução de ordem um ($O(\varepsilon^1)$):

$$\begin{aligned} 2x_0x_1 + 2x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Solução de ordem dois ($O(\varepsilon^2)$):

$$\begin{aligned} {x_1}^2 + 2x_0x_2 &= 0 \\ x_2 &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

Por fim substituindo os coeficientes x_0, x_1 e x_2 em $x(\varepsilon)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} x_{1(a)}(\varepsilon) &= 1 - \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \\ x_{1(b)}(\varepsilon) &= 1 - \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \\ x_{2(a)}(\varepsilon) &= -1 - \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \\ x_{2(b)}(\varepsilon) &= -1 - \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Aplicando $\varepsilon = 0{,}01$ na Eq. (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} x_{1(a)} &= 0{,}9905 \\ x_{1(b)} &= 0{,}98995 \\ x_{2(a)} &= -1{,}01005 \\ x_{2(b)} &= -1{,}00995 \end{aligned} \tag{13}$$

A partir das soluções obtidas pela aplicação do método, pode-se verificar que é possível obter um grau de precisão considerável utilizando apenas os três primeiros termos da série de perturbação.

2.2 Perturbação singular

Segundo Bender (1978), os problemas de perturbação singular são aqueles cuja série de perturbações não assume a forma de uma série de potências, ou a mesma não converge em um intervalo da solução. Na teoria da perturbação singular, às vezes, não há solução para o problema não perturbado (a solução exata em função de ε pode deixar de existir quando $\varepsilon = 0$). Quando existe uma solução para o problema não perturbado, suas características qualitativas são distintamente diferentes daquelas da solução exata para um ε arbitrariamente pequeno (mas diferente de zero).

No entanto, em alguns casos é possível encontrar uma solução satisfatória utilizando métodos modificados da teoria das perturbações. O exemplo abaixo ilustra um problema de caráter singular, onde é possível obter uma solução aproximada com o método do balanço dominante.

Seja a equação quadrática:

$$x^2 - 2{,}0004x + 0{,}9998 = 0 \tag{14}$$

Fazendo $\varepsilon = 0{,}0002$ e inserindo-o na Eq. (14), tem-se:

$$x^2 - 2(1+\varepsilon)x + (1-\varepsilon) = 0 \tag{15}$$

Ao truncar a série de perturbações nos dois primeiros termos, tem-se:

$$x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + O(\varepsilon^2) \tag{16}$$

E a Eq. (15) expandida será:

$$(x_0 + x_1\varepsilon)^2 - 2(1+\varepsilon)(x_0 + x_1\varepsilon) + (1-\varepsilon) = 0 \tag{17}$$

Ao fatorar e eliminar os termos de ε com ordem superior a dois, obtém-se:

$$({x_0}^2 - 2x_0 + 1) + (2x_1x_0 - 2x_1 - 2x_0 - 1)\varepsilon = 0 \tag{18}$$

Ao organizar as soluções por ordem de ε e resolvendo-as, obtém-se:

Solução de ordem zero ($O(\varepsilon^0)$):

$$\begin{aligned} &{x_0}^2 - 2x_0 + 1 = 0 \\ &x_0 = 1 \end{aligned} \tag{19}$$

Solução de ordem um ($O(\varepsilon^1)$):

$$2x_1x_0 - 2x_1 - 2x_0 - 1 = 0 \tag{20}$$

Substituindo $x_0 = 1$ na Eq. (20), obtém-se:

$$-3 = 0 \tag{21}$$

É evidente que a solução de ordem 1 não é válida. A inconsistência na solução encontrada se dá pelo fato de que a série de perturbação assumida (Eq. 16) para esse problema não converge para uma solução aproximada da exata.

Uma das ferramentas disponíveis capazes de resolver esse tipo de problema é o método do balanço dominante. Dada uma equação, esse método consiste em encontrar pares de termos que são assintoticamente comparáveis, ou seja, balanceados entre si e muito maiores (dominantes) que os demais termos desta mesma equação. Uma vez encontrados esses termos, é possível dizer como será a estrutura da série de perturbação que devemos assumir como solução para o problema.

Para aplicar o método do balanço dominante, a Eq. (15) deve ser simplificada a partir de uma mudança de variável: $y = x - 1$. Assim a equação se torna:

$$y^2 - 2y\varepsilon + 3\varepsilon = 0 \tag{22}$$

Ao analisar a primeira possibilidade, define-se $2y\varepsilon$ e 3ε como o par de termos balanceados e dominantes, então tem-se:

$$2y\varepsilon \sim 3\varepsilon \tag{23}$$

Os valores numéricos que acompanham os termos escolhidos podem ser descartados, uma vez que o interesse principal é no comportamento geral das funções quando $\varepsilon \to 0$. Assim, ao reescrever e simplificar a Eq. (23), obtém-se:

$$\begin{aligned} &y\varepsilon \sim \varepsilon \\ &y \sim \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1 \end{aligned} \tag{24}$$

Ao substituir e comparar o resultado da Eq. (24) com os demais termos da Eq. (22), obtém-se:

$$\begin{aligned} &(y^2)\colon y^2 \sim 1^2 = 1 \\ &(2y\varepsilon)\colon y\varepsilon \sim \varepsilon \\ &(3\varepsilon)\colon \varepsilon \sim \varepsilon \end{aligned} \tag{25}$$

Nota-se que o segundo $(2y\varepsilon)$ e o terceiro (3ε) termos são assintóticos, porém não são dominantes, pois, a medida em que $\varepsilon \to 0$, os mesmos se tornam proporcionalmente insignificantes em relação ao primeiro (y^2).

Na segunda possibilidade, ao escolher y^2 e $2y\varepsilon$, obtém-se:

$$\begin{aligned} &y^2 \sim y\varepsilon \\ &y \sim \varepsilon \end{aligned} \tag{26}$$

Ao substituir e comparar o resultado da Eq. (26) com os demais termos da Eq. (22), obtém-se:

$$\begin{aligned} &(y^2)\colon y^2 \sim \varepsilon^2 \\ &(2y\varepsilon)\colon y\varepsilon \sim \varepsilon^2 \\ &(3\varepsilon)\colon \varepsilon \sim \varepsilon \end{aligned} \tag{27}$$

Observa-se que apenas o terceiro termo (3ε) é dominante em comparação com os demais, pois $\varepsilon \gg \varepsilon^2$ conforme $\varepsilon \to 0$.

Na última possibilidade, tem-se:

$$\begin{aligned} &y^2 \sim \varepsilon \\ &y \sim \sqrt{\varepsilon} \end{aligned} \tag{28}$$

Ao substituir e comparar o resultado da Eq. (28) com os demais termos da Eq. (22), obtém-se:

$$(y^2): y^2 \sim \varepsilon$$
$$(2y\varepsilon): y\varepsilon \sim \varepsilon^{\frac{3}{2}} \tag{29}$$
$$(3\varepsilon): \varepsilon \sim \varepsilon$$

Percebe-se que o primeiro e terceiro termos são assintoticamente comparáveis e dominantes em relação ao segundo, pois $\varepsilon \gg \varepsilon^{\frac{3}{2}}$ quando $\varepsilon \to 0$.

Então o resultado $y \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ deverá ser utilizado para definir uma nova série de perturbação. Ao fazer $\vartheta = \frac{y}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$ isolar e substituir y na Eq. (22), obtém-se:

$$\vartheta^2\varepsilon - 2\vartheta\varepsilon^{\frac{3}{2}} - 3\varepsilon = 0 \tag{30}$$

Ao dividir a Eq. (30) por ε:

$$\vartheta^2 - 2\vartheta\varepsilon^{\frac{1}{2}} - 3\varepsilon = 0 \tag{31}$$

A nova série de perturbação será:

$$\vartheta(\varepsilon) = \vartheta_0 + \vartheta_1\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) \tag{32}$$

Ao substituir $\vartheta(\varepsilon)$ na Eq. (33):

$$(\vartheta_0 + \vartheta_1\varepsilon^{\frac{1}{2}})^2 - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\vartheta_0 + \vartheta_1\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) - 3 = 0 \tag{33}$$

E então as novas soluções serão:

Solução de ordem zero ($O(\varepsilon^0)$):

$$\vartheta_0{}^2 - 3 = 0$$
$$\vartheta_0 = \pm\sqrt{3} \tag{34}$$

Solução de ordem um ($O(\varepsilon^1)$):

$$2\vartheta_0\vartheta_1 - 2\vartheta_0 = 0$$
$$\vartheta_1 = 1 \tag{35}$$

E então temos:

$$\vartheta(\varepsilon) = \pm\sqrt{3} + \sqrt{\varepsilon} \tag{36}$$

Como $\vartheta = \frac{y}{\sqrt[2]{\varepsilon}}$, tem-se que:

$$\frac{y}{\sqrt[2]{\varepsilon}} = \pm\sqrt{3} + \sqrt{\varepsilon} \tag{37}$$

Isolando y:

$$y(\varepsilon) = \varepsilon \pm \sqrt{3\varepsilon} \tag{38}$$

Como $y = x - 1$, então:

$$x(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \pm \sqrt{3\varepsilon} \tag{39}$$

E a solução final aproximada para Eq. (14), será:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \varepsilon + \sqrt{3\varepsilon} = 1{,}00055 \\ x_2 &= 1 + \varepsilon - \sqrt{3\varepsilon} = 0{,}99985 \end{aligned} \tag{40}$$

A partir das soluções obtidas pela aplicação do método do balanço dominante, pode-se verificar que é possível obter uma resposta razoável para um problema que aparentemente não possuía solução utilizando o método tradicional para problemas envolvendo perturbação regular.

3 IMPLEMENTAÇÃO EM MATLAB®

Com o intuito de otimizar e ampliar o uso dos métodos das perturbações, desenvolveu-se, baseado na teoria apresentada neste trabalho, um algoritmo computacional no software MATLAB® capaz de solucionar equações polinomiais de caráter regular. Esse algoritmo permite ao usuário definir valores variados para o parâmetro ε como também o número de termos da série de perturbação, possibilitando assim, estudos sobre a influência desse parâmetro e também da série de perturbação na existência e convergência das soluções obtidas pela aplicação dos métodos. Esse algoritmo será usado como ferramenta para determinar qual o melhor valor de ε e a quantidade ideal de termos da série de perturbação e, consequentemente, otimizar a solução aproximada.

A lógica do algoritmo é descrita abaixo:

1. Entrada de dados:
    - O usuário fornece a equação já com o parâmetro ε e também a quantidade termos para a série de perturbação;
2. Série de perturbação:
    - Em seguida, a série é gerada por um conjunto de funções que cria os coeficientes da mesma utilizando variáveis simbólicas e então os agrupa no formato de somatório por meio de laços de repetição;

- A série é então substituída na equação fornecida por meio de uma troca de variáveis.

3. Rearranjo da equação:

   - Nessa etapa, um conjunto de funções organiza os termos da equação em função do parâmetro de perturbação com a finalidade de dividir as soluções por ordem das potências de ε;

4. Soluções:

   - Os coeficientes da série são calculados por meio de uma laço de repetição que realiza substituições retroativas dos mesmos nas soluções em função de ε;
   - É obtida uma solução em função do parâmetro de perturbação.
   - Por fim, o usuário define um valor para ε e é calculada uma solução numérica aproximada para o problema.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para validar o algoritmo desenvolvido, foram realizados uma série de testes com várias equações polinomiais de caráter regular. A tabela exibe os resultados obtidos ao testar a Eq. (4) variando a quantidade de termos da série de perturbação como também o parâmetro ε.

Tabela 1. Soluções aproximadas envolvendo variação de parâmetros

ε	$\sum_{n=0}^{1} x_n \cdot \varepsilon^n$	$\sum_{n=0}^{2} x_n \cdot \varepsilon^n$	$\sum_{n=0}^{3} x_n \cdot \varepsilon^n$	$\sum_{n=0}^{4} x_n \cdot \varepsilon^n$
1	$x_1 = -2$ $x_2 = 0$	$x_1 = -2{,}5000$ $x_2 = 0{,}5000$	$x_1 = -2{,}5000$ $x_2 = 0{,}5000$	$x_1 = -2{,}3750$ $x_2 = 0{,}3750$
0,5	$x_1 = -1{,}5000$ $x_2 = 0{,}5000$	$x_1 = -1{,}6250$ $x_2 = 0{,}6250$	$x_1 = -1{,}6250$ $x_2 = 0{,}6250$	$x_1 = -1.6172$ $x_2 = 0.6172$
0,1	$x_1 = -1{,}1000$ $x_2 = 0{,}9000$	$x_1 = -1{,}1050$ $x_2 = 0{,}9050$	$x_1 = -1{,}1050$ $x_2 = 0{,}9050$	$x_1 = -1{,}1050$ $x_2 = 0{,}9050$
0,05	$x_1 = -1{,}0500$ $x_2 = 0{,}9500$	$x_1 = -1{,}0513$ $x_2 = 0{,}9513$	$x_1 = -1{,}0513$ $x_2 = 0{,}9513$	$x_1 = -1{,}0512$ $x_2 = 0{,}9512$
0,005	$x_1 = -1{,}0050$ $x_2 = 0{,}9950$	$x_1 = -1{,}0050$ $x_2 = 0{,}9950$	$x_1 = -1{,}0050$ $x_2 = 0{,}9950$	$x_1 = -1{,}0050$ $x_2 = 0{,}9950$

0.0005	$x_1 = -1{,}0005$ $x_2 = 0{,}9995$	$x_1 = -1{,}0005$ $x_2 = 0{,}9995$	$x_1 = -1{,}0005$ $x_2 = 0{,}9995$	$x_1 = -1{,}0005$ $x_2 = 0{,}9995$
0,00005	$x_1 = -1{,}0001$ $x_2 = 1{,}0000$	$x_1 = -1{,}0001$ $x_2 = 1{,}0000$	$x_1 = -1{,}0001$ $x_2 = 1{,}0000$	$x_1 = -1{,}0001$ $x_2 = 1{,}0000$

Percebe-se que a quantidade de termos da série de perturbação pouco influencia na precisão das soluções, comprovando o que foi citado no início – as potencialidades da teoria das perturbações residem no fato de que, geralmente, os primeiros termos das séries de solução são suficientes para revelar características importantes da solução. E isso é um grande motivador para utilizar os métodos fornecidos pela teoria, já que o custo computacional é relativamente baixo.

Já o parâmetro de perturbação tem influência direta na precisão e convergência das soluções. Desta forma, para o teste realizado observa-se que, quanto mais próximo de zero é o valor de ε, mais próximo da solução exata se encontra a aproximada.

4 CONCLUSÕES

Até o presente momento, este trabalho objetivou introduzir as principais ideias da teoria de uma maneira clara e didática, com o intuito de fomentar a aplicação dos métodos disponíveis em outras áreas, principalmente na engenharia. Atualmente, a teoria de perturbação vem sendo estudada em muitas áreas, mas sua principal aplicação é na mecânica quântica. Tem-se em vista que muitos problemas na engenharia envolvem sistemas dinâmicos não lineares e estes podem ser resolvidos usando os métodos das perturbações, uma vez que estes métodos não necessitam de linearização prévia para serem aplicados. Salienta-se que a teoria das perturbações é muito útil para problemas pouco não lineares, devido aos seus critérios de convergência.

As projeções futuras são: implementar computacionalmente todos métodos das perturbações, otimizar o algoritmo já desenvolvido e utilizar os demais para resolver problemas de modelagem envolvendo equações diferenciais na área de bombeamento e monitoramento do nível de tanques e demais áreas estudadas pelo laboratório de controle do campus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CEFET-MG pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador Dr. Prof. Emerson de Sousa Costa pelo apoio e paciência no processo de pesquisa e estudo deste trabalho, também agradeço a todos os meus colegas de graduação, em especial aos parceiros de pesquisa Dr. Prof. Luiz Claudio Oliveira, Társis Augusto Rodrigues Parreiras e Álan Christoffer.

REFERÊNCIAS

Bender C. M., 1978. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, n. 7, pp. 319-330.

Carrara V., 2012. Análise e controle de sistemas lineares.

Hazewinkel M., 1987. ENCYCLOPAEDIA OF MATHEMATICS, vol. 7, pp. 136-138.

Jhonson R. S., 2005. MATHEMATICAL AND ANALYTICAL TECHNIQUES WITH APPLICATIONS ENGINEERING, n. 2, pp. 48-66.

Pasquetti E., 2008. Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares, pp. 54-56. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio De Janeiro/ Rio de Janeiro.

ROSA, E. S. Introdução ao método das perturbações.