



ESTUDO DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA VIA MASTAN2

Study of soil-structure interaction via Mastan2

Lucas de Melo Corrêa e Silva (1); Jackson da Silva Rocha Segundo (2);
Ricardo Azoubel da Mota Silveira (3); Jéssica Lorrany e Silva (4)

- (1) Engenheiro Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.
(2) Engenheiro Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.
(3) Dr. Prof., Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.
(4) MSc., Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.
Email para Correspondência: lucasdemelo31@gmail.com; (P) Lucas Silva.

Resumo: No contexto das engenharias estrutural e geotécnica é comum identificar situações onde o meio geológico, como o solo ou rocha, desempenha papel de suporte para elementos estruturais, ou mesmo está apoiado nestes elementos, como é o caso das seguintes situações práticas: pavimentos, dormentes apoiados em lastro ferroviário, sapatas corridas e isoladas, vigas baldrames, estacas verticais, estruturas de contenção, entre outros. Nesse sentido, o presente trabalho pretende realizar o estudo do equilíbrio e estabilidade elástica de estruturas, sob carregamento estático extremo, com restrições de contato impostas pelo meio geológico. Ênfase será dada à solução numérica de vigas e colunas com restrições bilaterais de contato. Esta pesquisa tem como características principais: o emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF) na modelagem do sistema solo-estrutura; a inclusão dos efeitos de segunda-ordem; a consideração de modelos matemáticos lineares, discretos e contínuos (modelo de Winkler), na representação do meio geológico; e a utilização de métodos de continuidade na solução do problema solo-estrutura não linear. As modelagens computacionais são realizadas através do sistema Mastan2 (McGuire et al., 2014), em que se procura verificar a eficiência da formulação numérica proposta através da comparação dos resultados aqui obtidos com aqueles da literatura advindos de outras abordagens numéricas.

Palavras chaves: *Elementos Estruturais; Solo; Interação solo-estrutura; Método dos Elementos Finitos; Mastan2*



Abstract: In the structural and geotechnical engineering is common to identify situations where the geological environment, such as soil or rock, play the role of support for structural elements, or even are supported by these elements, as is the case of the following situations: pavements, railroad supported by ballast, spread and strip footing, foundation beams, vertical piles, retaining walls, among others. In this context, the present work aims to study the equilibrium and stability of structures under extreme static loading under contact constraints imposed by the geological environment. Emphasis will be given to the numerical solution of beams and columns with bilateral contact constraints. This research has as main characteristics: the use of the Finite Element Method (FEM) in the soil-structure system modeling; the inclusion of second-orders effects; the consideration of linear discrete and continuous mathematical models (Winkler model), in the geological environment representation; and the use of path-following methods. The computer simulations will be made by the program Mastan2 (McGuire et al., 2014), where the efficiency of the proposed numerical methodology will be verified and tested through the comparison of the obtained results with those reported in the literature using other numerical approaches.

Keywords: *Structural Elements; Soil; Soil-structure interaction; Finite Element Method; Mastan2.*



1 INTRODUÇÃO

Historicamente, projetos relacionados à engenharia civil sempre foram desenvolvidos sob condições de incerteza, principalmente no que diz respeito às ações dos carregamentos, à resistência estrutural e às condições de contorno. Entretanto, para a solução desses problemas, tem sido cada vez maior o esforço em se aliar os avanços tecnológicos e científicos com o objetivo de se prever o comportamento da estrutura, possibilitando desta forma a concepção de membros mais leves e esbeltos.

No que diz respeito à geometria dos elementos estruturais, o aumento da esbeltez é um fator que tem sido preponderante nas análises, tendo em vista que essa característica torna as estruturas mais suscetíveis a grandes deslocamentos e ao fenômeno de instabilidade, promovendo assim o surgimento de esforços adicionais, denominados efeitos de segunda ordem. Alva, Debs e Kaminski Jr. (2010) ressaltaram a importância de se considerar os efeitos não lineares em uma análise estrutural.

Outro fator importante nesse contexto é o comportamento do material, pois à medida que as solicitações se aproximam da capacidade portante da estrutura, o projeto se torna mais otimizado. Desta forma, admite-se nas análises que o material ultrapasse o limite onde há proporcionalidade entre as tensões e suas deformações correspondentes. Rocha (2006) e Santos (2007) levaram em consideração os efeitos não lineares no estudo de estruturas metálicas. Já Silva (2009) desenvolveu um programa computacional (CS-ASA) para análise não linear estática e dinâmica de estruturas em aço.

Pode-se ainda ter a não linearidade associada à relação momento-rotação da ligação dos elementos estruturais. Chen e Sohal (1995), Chen e Kim (1997) e Chan e Chui (1997) sugeriram a adoção de metodologias de análise e/ou projeto que levem em consideração os efeitos de segunda ordem, a inelasticidade do material e a semirrigidez das ligações.

A interação solo-estrutura (ISS) é outro fator recorrente na engenharia, e diversas formulações foram desenvolvidas para a representação dos problemas ISS. Maciel (2012) analisou problemas ISS com restrições bilaterais de contato por meio do software CS-ASA (Silva, 2009). Santos (2016) estendeu os estudos aos problemas de contato unilateral por meio do software ANSYS, e Batelo (2018), mais recentemente, avaliou o comportamento transiente inelástico de segunda ordem de estruturas com ligações semirrígidas em contato com o solo.

No presente trabalho, o software Mastan2 (<http://www.mastan2.com>) será utilizado na modelagem de problemas ISS, em que os efeitos de segunda ordem serão considerados. Esse software é baseado no MEF e é capaz de realizar análises elásticas e inelásticas, de primeira e segunda ordem de estruturas bi e tridimensionais.

2 FUNDAMENTOS E FORMULAÇÕES

Esta seção apresenta alguns conceitos teóricos a respeito dos temas envolvidos neste estudo, bem como a estratégia de adaptação do modelo de Winkler (Winkler, 1867) para a representação do comportamento do meio geológico.

2.1 Não linearidade geométrica

As vigas e colunas têm por função não apenas transmitir os carregamentos dos subsistemas horizontais para os elementos de fundação, mas também resistir aos momentos fletores, esforços de tração e compressão, além de carregamentos laterais de ações como vento ou empuxo de solo, por exemplo.

Além de desempenhar papel de sustentação, os elementos estruturais, muitas das vezes, ainda devem responder às demandas arquitetônicas e econômicas, buscando seções transversais com elevado índice de esbeltez e baixo peso próprio. Entretanto, nota-se que a medida que se aumenta a esbeltez e se otimiza o peso desses elementos, o grau de complexidade do comportamento estrutural do sistema se torna mais elevado.

Sabe-se ainda que, durante o processo de fabricação e montagem, algumas inconformidades relacionadas à geometria das peças podem surgir, fato que também tem influência sobre o comportamento da estrutura. Além disso, as mudanças na configuração do sistema podem se acentuar ocasionando o surgimento de novos esforços.

Nesse contexto surge a não linearidade geométrica, oriunda de grandes deformações, deslocamentos e rotações em relação à configuração inicial do sistema. Desta maneira, quando se une todos esses fatores, a estrutura se torna suscetível aos fenômenos de instabilidade, sendo de extrema importância considerá-los em uma análise para uma representação mais realística e segura do problema. Tais efeitos estão representados na Figura 1.

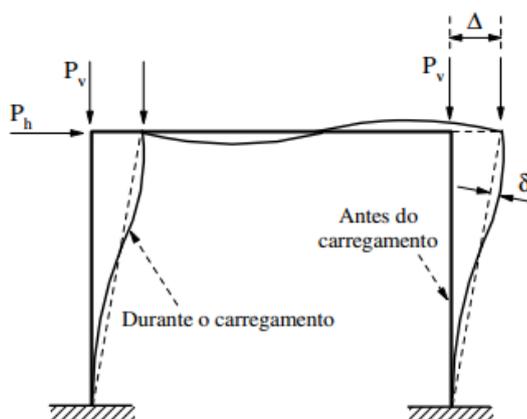


Figura 1. Efeitos de segunda ordem

Fonte: (Silva, 2009)

No contexto do MEF, as equações de equilíbrio de um sistema estrutural podem ser representadas genericamente da seguinte forma:

$$\mathbf{g}(\lambda, \mathbf{U}) = \mathbf{F}_e(\lambda) - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) \cong 0 \quad (1)$$

em que \mathbf{F}_e é o vetor de forças externas do sistema, \mathbf{F}_R é o vetor de forças externas de referência, λ o parâmetro de carga, \mathbf{F}_i o vetor de forças internas, e \mathbf{U} o vetor de deslocamentos nodais do sistema. O vetor \mathbf{g} é definido como o vetor de forças residuais. Para o equilíbrio do sistema, é necessário que as forças internas se igualem às forças externas, de modo que o vetor de forças residuais \mathbf{g} seja nulo. Para atingir tal objetivo utiliza-se usualmente métodos incrementais-iterativos, como o de Newton-Raphson, por exemplo.

2.2 Modelagem da base elástica (interação solo-estrutura)

Quando se analisa uma estrutura em contato com o meio geológico (solo ou rocha), normalmente esse meio é aproximado de apoios rígidos indeslocáveis, admitindo um comportamento simplificado desses materiais. Entretanto, sabe-se que o solo apresenta comportamento complexo, e nesse sentido estudos vêm sendo realizados para se otimizar essa interação através de formulações que descrevam esse comportamento de maneira adequada.

O modelo idealizado por Winkler representa o solo como um colchão de molas independentes (Figura 2). Nesse caso, o solo é admitido como um material homogêneo e isotrópico, em que a reação exercida em qualquer ponto da região de contato é proporcional ao deslocamento da estrutura nesse mesmo ponto.

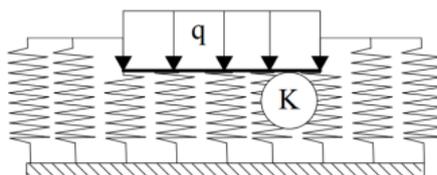


Figura 2. Modelo de Winkler

Fonte: (Silva, 2016)

Ainda no contexto do MEF, ao se considerar a contribuição de todos os elementos finitos do sistema com a influência do solo, a condição a ser satisfeita na configuração de equilíbrio $t+\Delta t$ é dada por:

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_b] \Delta \mathbf{U} + {}^t \mathbf{F}_{ie}^e + {}^t \mathbf{F}_{ib}^e = {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_R \quad (2)$$

em que \mathbf{K}_L é a matriz de rigidez linear do sistema, \mathbf{K}_σ representa a matriz das tensões iniciais ou matriz de rigidez geométrica, \mathbf{K}_b é a matriz de rigidez da base elástica, $\Delta \mathbf{U}$ representam os incrementos de deslocamentos nodais, ${}^t \mathbf{F}_{ie}^e$ é o vetor de forças internas da estrutura, ${}^t \mathbf{F}_{ib}^e$ é o vetor de forças internas da base elástica, e ${}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_R$ é o vetor de forças externas na condição de equilíbrio.

Em Silveira (1995), Maciel (2012), Machado (2013) e McGuire *et al.* (2014) podem ser encontrados os detalhes da solução da Eq. (2), bem como as expressões que definem cada vetor e matriz dessa equação.

De acordo com Maciel (2012), pode-se exprimir, para um elemento finito qualquer do modelo estrutural em contato com o solo, uma relação entre o incremento de reação da base, $\Delta \mathbf{r}_b$, e o incremento de deslocamento, $\Delta \mathbf{u}_b$, em qualquer ponto desse elemento. Tal relação pode ser descrita da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{r}_b = k \Delta \mathbf{u}_b \quad (3)$$

em que k é o parâmetro de rigidez da base elástica.

Entretanto, como o software usado nas análises numéricas do presente trabalho, o Mastan2, não possui em suas formulações molas discretas ou contínuas que representem o modelo de Winkler, a base elástica foi aproximada por elementos de barra com rigidez à flexão desprezível, porém com rigidez axial (Rocha Segundo, 2017).

Para que essa aproximação seja possível, é necessário inicialmente que se distribua o parâmetro de rigidez da base elástica k do modelo contínuo de Winkler entre todos os segmentos da estrutura discretizada, de acordo com o seu respectivo comprimento de influência. O valor do parâmetro de rigidez discretizado, denotado por k' , pode ser obtido a partir da seguinte relação:

$$k' = k a \quad (4)$$

em que k é o parâmetro de rigidez da base elástica do modelo do Winkler e a é o comprimento de influência de cada apoio elástico discreto. A Figura 3 apresenta os parâmetros anteriormente citados.

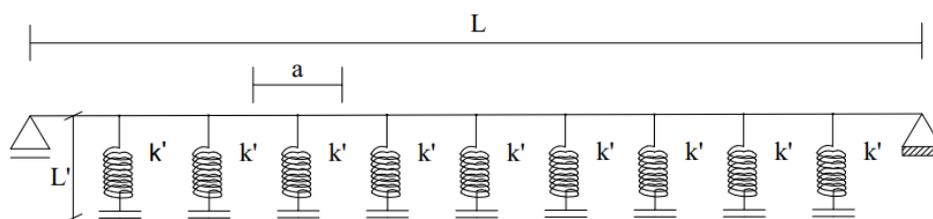


Figura 3. Adaptação do modelo de Winkler ao Mastan2

Igualando-se a rigidez axial da barra à rigidez da mola, chega-se na seguinte relação:

$$k' = \frac{E_s A}{L'} \quad (5)$$

em que L' é o comprimento do elemento de barra que representará a mola, E_s o módulo de elasticidade do material do elemento de barra, e A a área da seção transversal do elemento de barra.

Por fim, de posse do parâmetro de rigidez da base discretizado k' (Eq. (4)), é possível calcular, usando a expressão anterior, a área da seção transversal, A , desse elemento de barra conforme:

$$A = \frac{k'L'}{E_s} \quad (6)$$

3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Diversos problemas ISS são analisados nesta seção em que se procura avaliar influência das condições de apoio, geometria e carregamento.

3.1 Viga com extremidades livres em contato bilateral com base elástica

A Figura 4 apresenta uma viga com extremidades livres em contato com uma base elástica e submetida a uma carga concentrada P . A estrutura foi discretizada em 16 elementos finitos, variando-se o seu comprimento a fim de avaliar a interferência da geometria. Admitiu-se para a estrutura uma seção transversal quadrada com área $A = 10,9545$ e inércia à flexão $EI = 1000$. O comprimento do elemento de barra que representa o apoio elástico é de $L' = 2$, com um módulo de elasticidade do solo $E_s = 10$ e um parâmetro $k = 4000$ para representar a rigidez da base. Cabe ressaltar que todos os dados foram introduzidos em unidades compatíveis.

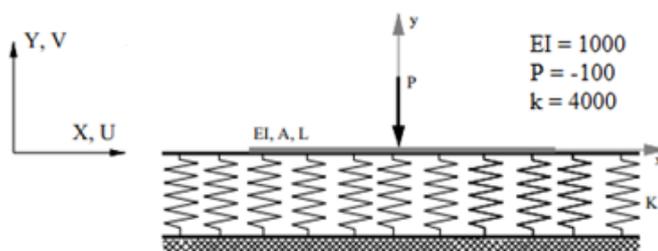


Figura 4. Viga com extremidades livres em contato com base elástica

Fonte: (Abreu, 2016) modificada

As Figuras 5 e 6 trazem os valores de deflexão lateral da viga em função do seu comprimento, e os resultados foram comparados com respostas numéricas encontradas na literatura. Nota-se que o aumento do comprimento provoca o surgimento de um ponto de deflexão nula e de uma região com deslocamento positivo, ou seja, situação em que a base elástica reage à tração, fato que só ocorre quando a hipótese de contato bilateral é considerada.

Já a Figura 7 mostra os valores de reação da base elástica ao longo da região de contato com a estrutura, que apresentaram boa concordância com a modelagem numérica realizada por Abreu (2016). No que diz respeito à essa reação, observa-se que o valor é mais elevado no ponto de aplicação da carga, assim como esperado, e reduz sua magnitude conforme se

aproxima da extremidade. Além disso percebe-se o aparecimento de valores positivos, que mais uma vez corrobora o fato da hipótese de contato bilateral que foi adotada.

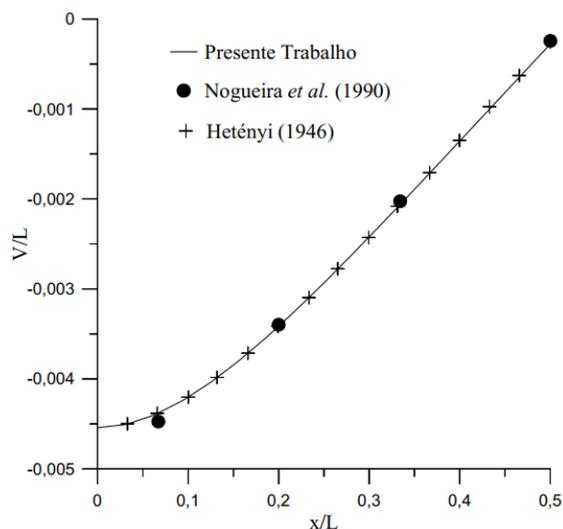


Figura 5. Deflexão lateral para L = 3

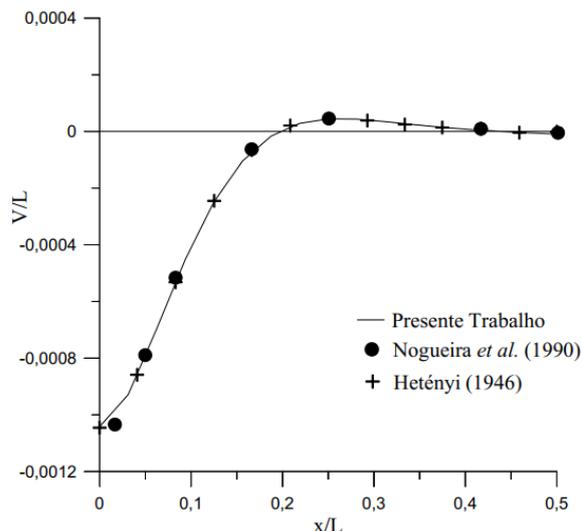


Figura 6. Deflexão lateral para L = 12

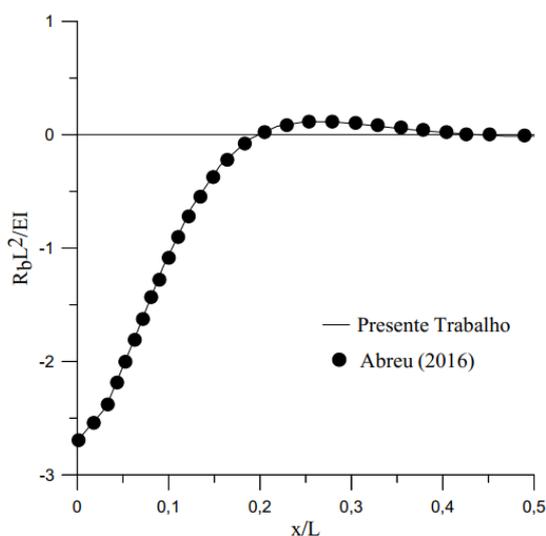


Figura 7. Reação da base elástica para L=12

3.2 Estaca-coluna parcialmente enterrada no solo

Considera-se agora a modelagem de uma estaca-coluna em contato com o solo (Figura 8). Inicialmente foram adotadas molas no sentido horizontal, e posteriormente foram adicionadas molas no sentido vertical. A Figura 8 apresenta também as propriedades geométricas e físicas do problema.

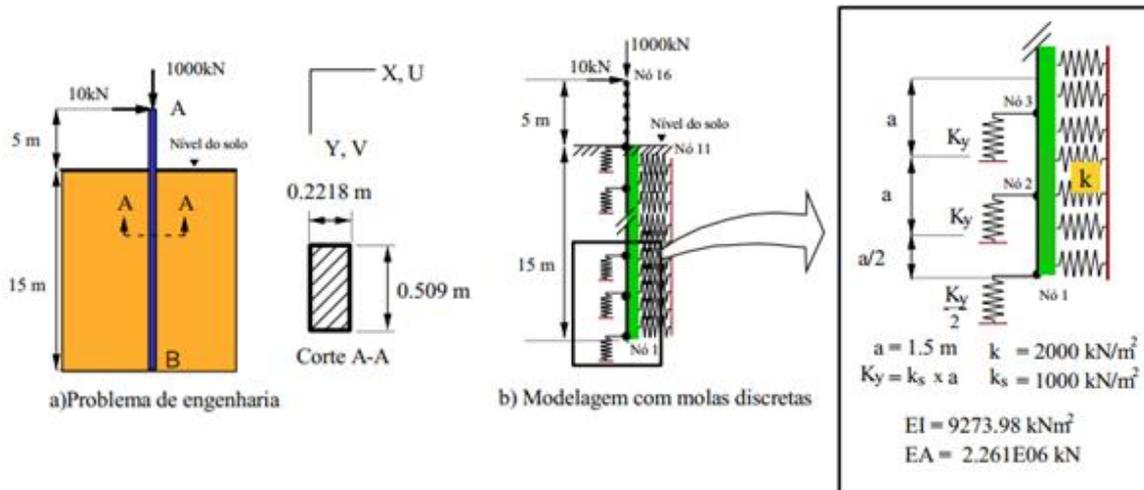


Figura 8. Estaca-coluna parcialmente enterrada

Fonte: (Maciel, 2012) modificada

Para a mola no sentido horizontal foi utilizada uma rigidez $K_x = 2000 \text{ kN/m}^2$ e comprimento do elemento de barra que representa o apoio elástico $L'_x = 2 \text{ m}$; para a representação dos apoios elásticos no sentido vertical foi usado um parâmetro de rigidez $K_y = 1000 \text{ kN/m}^2$ e comprimento do elemento de barra que representa o apoio elástico $L'_y = 0,5 \text{ m}$. Para ambos os apoios foi adotado módulo de elasticidade do solo $E_s = 20027246,27 \text{ kN/m}^2$. Uma malha de 15 elementos finitos foi utilizada. Além disso, foi admitida seção retangular com $EI = 9273,98 \text{ kNm}^2$ e $EA = 2,261 \times 10^6 \text{ kN}$. No topo da coluna foi aplicada uma carga vertical de 1000 kN e um carregamento horizontal de 10 kN.

Avaliou-se então a configuração deformada da coluna para as duas situações, e os valores de deflexão lateral U e deslocamento axial V foram plotados na Figura 9 juntamente com as soluções encontradas por outros autores.

Nota-se inicialmente que, quando apenas as molas no sentido horizontal são adotadas, a representação do deslocamento lateral já apresenta um bom resultado, porém há uma divergência entre os valores de deslocamento no sentido axial. Esse problema é resolvido quando adota-se as molas no sentido do eixo da coluna, gerando resultados bem próximos aos da literatura. É possível ainda perceber que o deslocamento lateral é bem mais acentuado no topo da estrutura, região onde o carregamento é aplicado e a estaca não possui restrição de movimento. Fica evidente também a forte influência da base elástica sobre o comportamento do sistema, tendo em vista que o deslocamento lateral passa a ser quase nulo em toda a região de contato da estrutura com o solo.

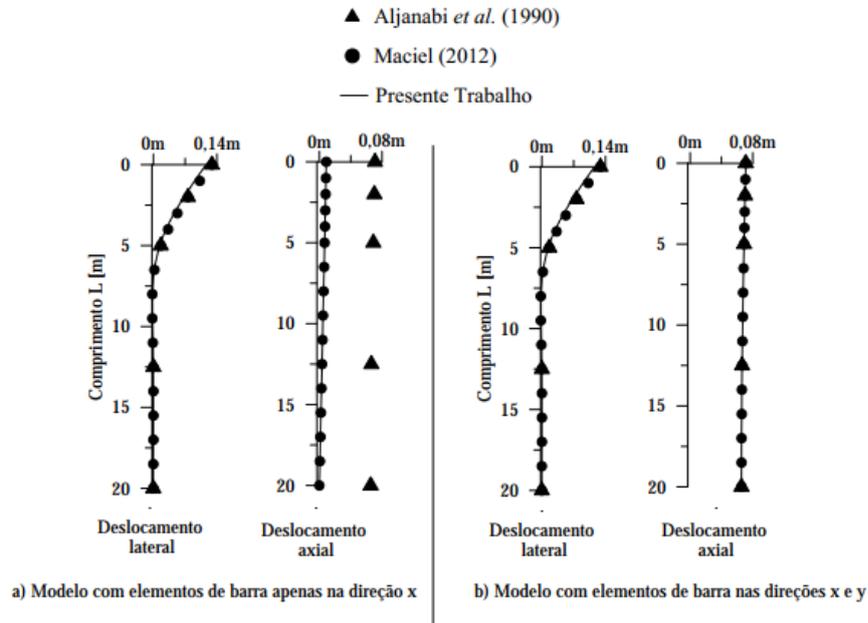


Figura 9. Configuração deformada da estaca-coluna parcialmente enterrada

3.3 Viga biengastada em contato com base elástica

A Figura 10 apresenta o problema ISS a ser resolvido nesta seção. Considerou-se uma viga de comprimento $L = 10$, seção transversal com rigidez à flexão $EI = 100$ e área $A = 0,02999$, e coeficiente de Poisson $\nu = 0,4$. Uma malha de 10 elementos finitos foi utilizada na discretização da estrutura.

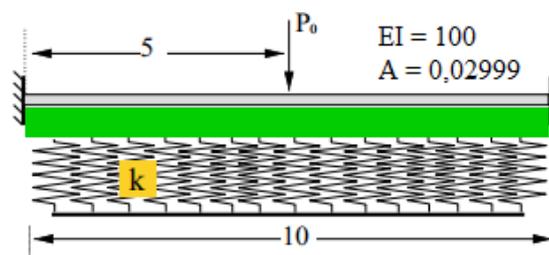


Figura 10. Viga biengastada com carga concentrada

Fonte: (Maciel, 2012) modificada

Para a representação da base elástica definiu-se o comprimento do elemento de barra que representa o apoio elástico $L' = 2$, e a rigidez do solo foi relacionada através do parâmetro adimensional $\beta = kL^4/EI$, fixando-o no valor de 100. Foi adotado ainda um valor do módulo de elasticidade do solo $E_s = 200$. Novamente todos os dados foram introduzidos em unidades compatíveis.

A carga P foi incrementada e a deflexão lateral máxima da viga no meio do vão ($x = L/2$) foi avaliada, conforme apresentado na Figura 11. Através da trajetória de equilíbrio fornecida é possível perceber um efeito não linear significativo na deflexão lateral da viga. Nota-se também que a estrutura apresenta uma variação acentuada de deslocamento na etapa inicial de carregamento, e a partir de determinado valor da carga P o comportamento da viga tende a se tornar mais linear.

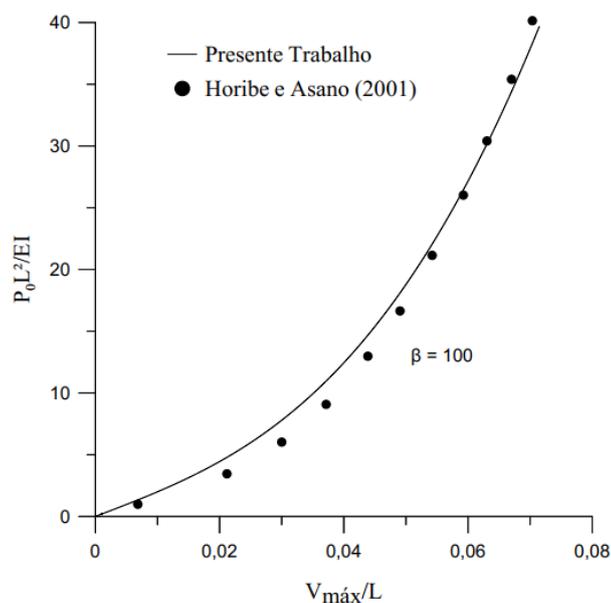


Figura 11. Trajetória de equilíbrio da viga

3.4 Colunas com apoio elástico discreto intermediário

Brush e Almroth (1975) apresentaram a solução analítica para o caso de uma coluna biapoiada com apoio elástico intermediário situado a uma posição arbitrária “ c ” da extremidade superior do elemento. Para uma coluna de comprimento L , denominou-se então o parâmetro c_b como sendo a razão entre a posição do apoio c e o comprimento total da coluna L . Para exprimir a rigidez do apoio elástico, utilizou-se o parâmetro Kx . Variando-se então esses dois parâmetros, foi realizada uma análise do equilíbrio crítico da estrutura. A Figura 12 contextualiza o problema em questão.

Para as análises apresentadas a seguir foram utilizados os seguintes dados: comprimento da coluna $L = 10$, malha de 10 elementos finitos, inércia à flexão da coluna $EI = 100$ e área da seção transversal calculada de 3,4641. O apoio elástico discreto foi introduzido com comprimento $L' = 2$ e módulo de elasticidade do solo $E_s = 100$. É importante salientar que todos os dados foram introduzidos em unidades compatíveis. Os resultados obtidos nesse trabalho são apresentados nas Figuras 13 - 16.

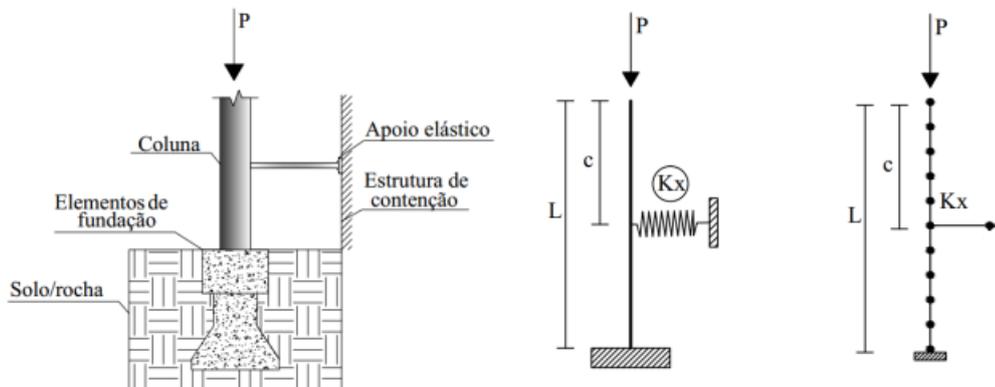


Figura 12. Coluna com apoio discreto intermediário

Fonte: (Santos 2016) modificada

A Figura 13 apresenta os resultados para a coluna biapoiada. Nota-se que quando o apoio elástico está situado no meio da coluna, ou seja, para $cb = 0,5$ para bases mais enrijecidas, com β maior que 150, o elemento de barra que representa a mola passa a trabalhar como um apoio rígido, e o valor da carga crítica aplicada chega a quatro vezes o valor da carga crítica de Euler, que corresponde ao valor da carga crítica de uma coluna biapoiada com comprimento $L/2$. Para valores de cb diferentes de 0,5 percebe-se que a medida que o valor de β aumenta, mais o comportamento do apoio elástico se aproxima do comportamento de um apoio rígido.

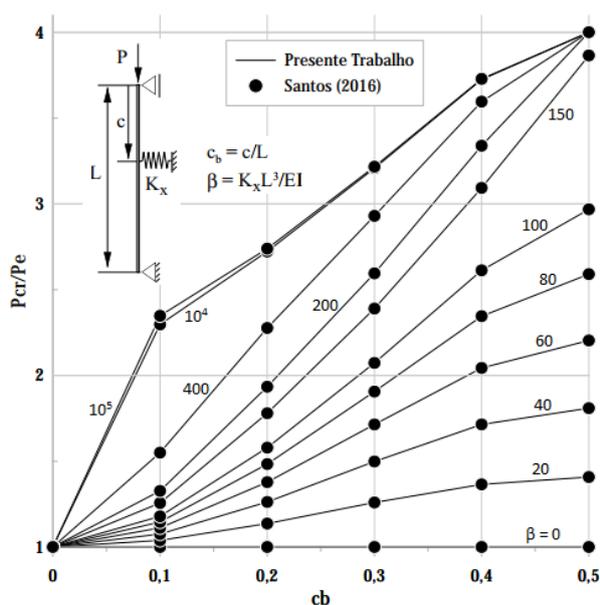


Figura 13. Coluna biapoiada

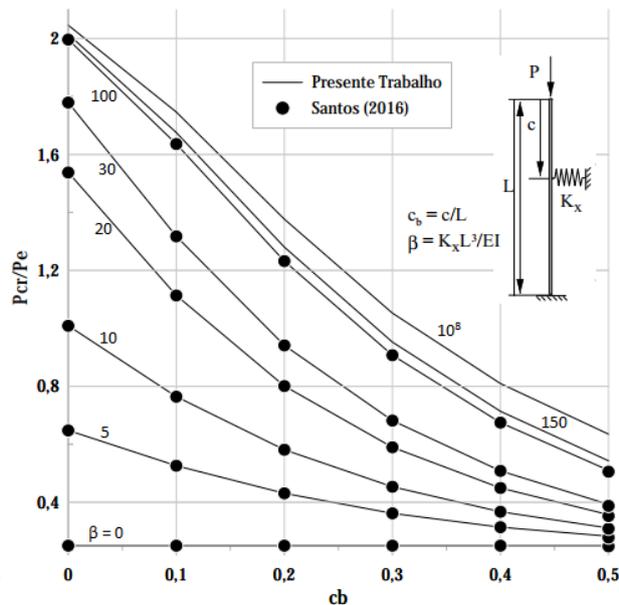


Figura 14. Coluna engastada-livre

Já analisando a coluna engastada-livre, apresentada na Figura 14, nota-se que quando a mola se encontra próxima ao bordo livre, $cb = 0$, e para β acima de 100, a carga crítica aplicada

assume o valor de aproximadamente 2,05 da carga crítica de Euler, que coincide com a carga crítica de uma coluna engastada-apoiada.

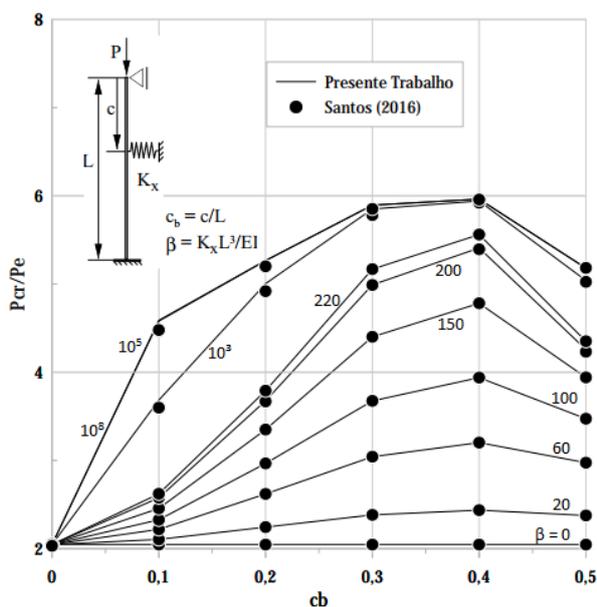


Figura 15. Coluna engastada-apoiada

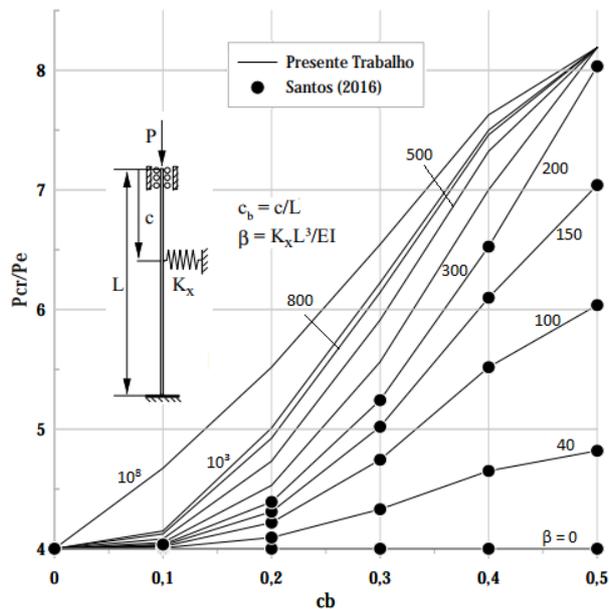


Figura 16. Coluna biengastada

Na Figura 15 estão os resultados para a coluna engastada-apoiada. Nota-se inicialmente boa semelhança entre os resultados obtidos aqui e os de Santos (2016). Observa-se ainda que quando a mola se encontra próxima ao apoio superior, $cb = 0$, a carga crítica adimensional assume o valor de aproximadamente 2,05 para todos os valores de β analisados.

Por fim, os resultados para a coluna biengastada (Figura 16) também se mostraram em consonância com os de Santos (2016). Cabe ressaltar ainda que o deslocamento axial nesse caso é livre na extremidade superior, e portanto é a configuração que precisa de maiores valores de energia elástica para que o apoio discreto se comporte como rígido.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho avaliou, via MEF e através do programa computacional Mastan2, o equilíbrio estático não linear do problema ISS. Os efeitos geométricos não lineares foram considerados na modelagem da estrutura e o solo foi representado através do modelo de Winkler.

A modelagem numérica proposta mostrou-se uma opção viável para a realização de análises avançadas em que a ISS deva ser considerada. Essa proposta teve como ponto de destaque o sucesso na adaptação do modelo de Winkler ao programa Mastan2. Os resultados alcançados na solução dos problemas ISS na seção anterior ficaram próximos aos da literatura.

5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, CAPES, FAPEMIG, PROPP/UFOP e Fundação Gorceix pelo apoio fornecido para o desenvolvimento deste estudo.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abreu, J.F.A.C., Santos, L.C., Silveira, R.A.M., 2016. *Estudo do equilíbrio e estabilidade elástica de arcos esbeltos com restrições de contato*. CILAMCE, Brasília, DF, Brasil.

Aljanabi, A.I.M., Farid, B.J.M., e Mohamad Ali, A.A.A., 1990. *The interaction of plane frames with elastic foundation having normal and shear moduli of subgrade reactions*. Comput. Struct. v. Xi, pp. 1047-1056.

Alva, G.M.S.; Debs, A.L.H.C.E.; Kaminski Jr., J. *Análise não-linear de estruturas de concreto armado*. Revista Ibracon de Estruturas e Materiais, v. 3, p. 149-178, Junho 2010. ISSN 1983-4195.

Batelo, E.A.P., 2018. *Análise Dinâmica Avançada de Estruturas de Aço com Ligações Semirrígidas e Interação com o Solo*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Brush, D.O e Almroth, B.O., 1975. *Buckling of bars, plates and shell*”, *International student edition*.

Chan, S.L., e Chui, P.P.T., 1997. *Vibration and deflection characteristics of semi-rigid jointed frames*. Engineering Structures, v. 19(12), pp. 1001-1010.

Chen, W.F., e Kim, S-E., 1997. *LRFD Steel Design using Advanced Analysis*. CRC Press, Inc., Flórida, USA.

Chen, W.F., e Sohal, I., 1995. *Plastic Design and Second-order Analysis of Steel Frames*. Springer-Verlag, New York.

Hetényi, M., 1946. *Beams on Elastic Foundation*, University of Michigan Press, Mich.

Horibe, T., e Asano, N., 2001. *Large deflection analysis of beams on two-parameter elastic foundation using the boundary integral equation method*. JSME International Journal, v. 44(2), pp.231–236.

Machado, F.C.S., 2013. *Análise computacional via MDF de cascas cilíndricas com restrições bilaterais e unilaterais de contato*, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.



Maciel, F.V., 2012. *Equilíbrio e estabilidade de elementos estruturais com restrições bilaterais impostas por bases elásticas*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

McGuire, W., Gallagher, R., H., Ziemian, R., D., 2014. *Matrix Structural Analysis*. 2. Ed.

Nogueira, C.L., Carvalho, M.T.T., e Silveira, R.A.M., 1990. *Modelagem de vigas sobre base elástica*, Trabalho da disciplina Método dos Elementos Finitos na Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

Rocha, P.A.S., 2006. *Análise inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semirrígidas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Rocha Segundo, J. S., 2017. *Estudo computacional de arcos metálicos abatidos*. Trabalho de Conclusão de Curso, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Santos, L.C., 2016. *Análise Numérica via Ansys do Equilíbrio não linear e estabilidade elástica de estruturas com restrições de contato*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, DECIV/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Santos, M.N., 2007. *Emprego de Elemento Finito Híbrido na Análise Não-linear de Estruturas Metálicas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*, Dissertação de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Winkler, E., 1867. *Die Lehre Von der Elasticitaet und Festigkeit*. Prag, Dominucus.