



Aplicação do Método dos Elementos Finitos para Análise Numérica de Sólidos Axissimétricos

Element Method of Finite Elements for Analysis Number of Axisimetric Solids

Tiago José Ferreira (1); Paulo Anderson Santana Rocha (2); Miguel Angelo Araújo Lima (3); Jhonatan Faria(4)

(1) Ms. Engenheiro Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.

(2) Dr. Prof., Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.

(3) Ms. Engenheiro Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.

(4) Ms. Engenheiro Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil.

Email para Correspondência: tiagojoseferreira@yahoo.com.br; (1) Apresentador

Resumo: O presente trabalho tem como objetivo implementar computacionalmente uma formulação matemática baseada no Método dos Elementos Finitos utilizando-se a linguagem Fortran 90/95 (Chapman). Desta forma, propõe-se nesta pesquisa obter os valores das tensões, deformações e deslocamentos ao longo da estrutura axissimétrica, levando-se em conta que os materiais apresentam comportamentos elástico-lineares e que os mesmos serão submetidos a carregamentos axissimétricos. Para discretizar a estrutura serão utilizados elementos finitos triangulares com três nós, denominados de CST (Constant Strain Triangle), sendo que cada nó apresenta dois graus de liberdade. Em seguida, com intuito de verificar se as intervenções realizadas foram satisfatórias, as respostas do programa computacional implementado em linguagem Fortran 90/95 (Chapman), foram comparados com os resultados da literatura e das modelagens realizadas com o auxílio do Software ANSYS 17. É importante ressaltar que o programa implementado além de calcular os valores de tensões, deformações e deslocamentos no centroide do elemento, permite obtê-los nos nós, através de uma rotina implementada com base no polinômio de interpolação de Lagrange.

Este trabalho pode contribuir de forma eficiente para o cálculo de tensões, deformações e deslocamentos em estruturas tais como: tubulações de água e gás, mineroduto, estacas de aço e/ou concreto, risers flexíveis, pilares de concreto e/ou aço, reservatórios, tubulões de concreto, entre outros.

Palavras chaves: sólidos axissimétricos, método dos elementos finitos, análise numérica, estruturas metálicas, estruturas de concreto.



Abstract: The present work aims to implement a mathematical formulation based on the Finite Element Method using the Fortran 90/95 language (Chapman [1]). In this way, it is proposed in this research to obtain the values of tensions, deformations and displacements along the axissymmetric structure, taking into account that the materials present elastic-linear behaviors and that they will be subjected to axissymmetric loading. In order to discretize the structure, triangular finite elements with three nodes, called CST (Constant Strain Triangle), will be used, with each node having two degrees of freedom. Then, in order to verify if the interventions performed were satisfactory, the responses of the computer program implemented in Fortran 90/95 language (Chapman [1]) were compared with the results of the literature and the modeling carried out with the aid of ANSYS Software 17. It is important to note that the implemented program besides calculating the values of tensions, deformations and displacements in the centroid of the element, allows to obtain them in the nodes, through a routine implemented based on the Lagrange interpolation polynomial.

This work can contribute efficiently to the calculation of tensions, deformations and displacements in structures such as: water and gas pipes, pipeline, steel and / or concrete piles, flexible risers, concrete and / or steel pillars, reservoirs, Concrete pipes, among others.

Keywords: Axissymmetric solids, finite element method, numerical analysis, metal structures, concrete structures.

1 INTRODUÇÃO

Segundo Vicente et al. (2009) o termo Elementos Finitos foi utilizado pela primeira vez na literatura por Clough em 1960, num artigo de engenharia sobre aplicações da elasticidade plana, porém, a ideia fundamental do método já vinha sendo utilizada há alguns anos por matemáticos, físicos e engenheiros. A simplicidade, eficiência e boa precisão, o fizeram uma das principais ferramentas de análise estrutural utilizada para obter os deslocamentos, tensões e deformações nos domínios e contornos da estrutura nesses últimos anos.

As estruturas axissimétricas são caracterizadas por uma seção transversal que contém um eixo de revolução, conforme exemplo indicado na Fig. 1.

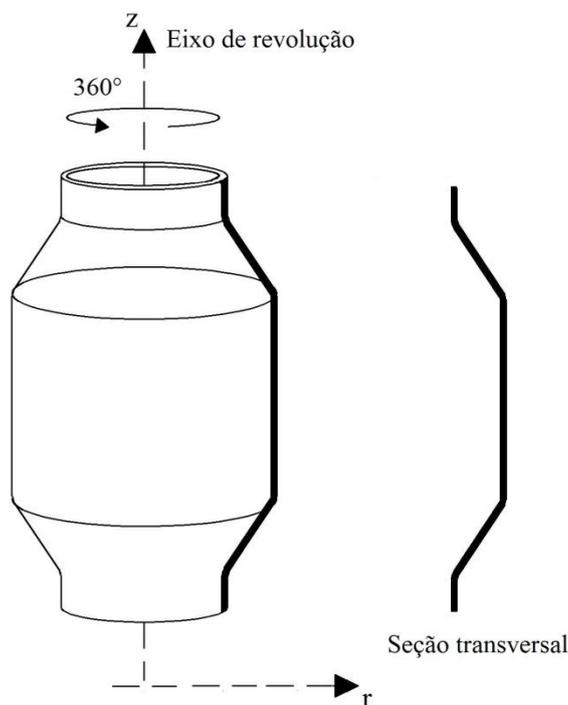


Figura 1. Estrutura axissimétrica com seção transversal gerada por rotação segundo o eixo de revolução

Nesta pesquisa, considerou-se que os materiais são elástico-lineares. Com o presente trabalho tem-se o objetivo de analisar o comportamento de estruturas axissimétricas com a hipótese de relação linear elástica quando submetida a carregamentos axissimétricos, para isso implementou-se computacionalmente uma formulação matemática baseada no MEF utilizando-se a linguagem Fortran Chapman (2003). Desta forma, propõe-se nesta pesquisa obter os valores das tensões, deformações e deslocamentos ao longo da estrutura axissimétrica submetidas a carregamentos axissimétricos. Neste trabalho, além de obter os valores de tensões, deslocamentos e deformações no centroide dos elementos discretizados, possibilitará obtê-los nos nós, através da técnica da interpolação polinomial baseada na função de interpolação de Lagrange

Para discretizar a estrutura serão utilizados elementos finitos triangulares com três nós, denominados de CST (Constant Strain Triangle), sendo que cada nó apresenta dois graus de liberdade.

É importante ressaltar que os campos de deslocamentos dependerão apenas das coordenadas r e z , tendo duas componentes, uma vez que, não existe deslocamento circunferencial.

2 FORMULAÇÃO

O problema pode ser visto como bidimensional no plano rz , definido pela área de rotação conforme mostra a Fig. 2.

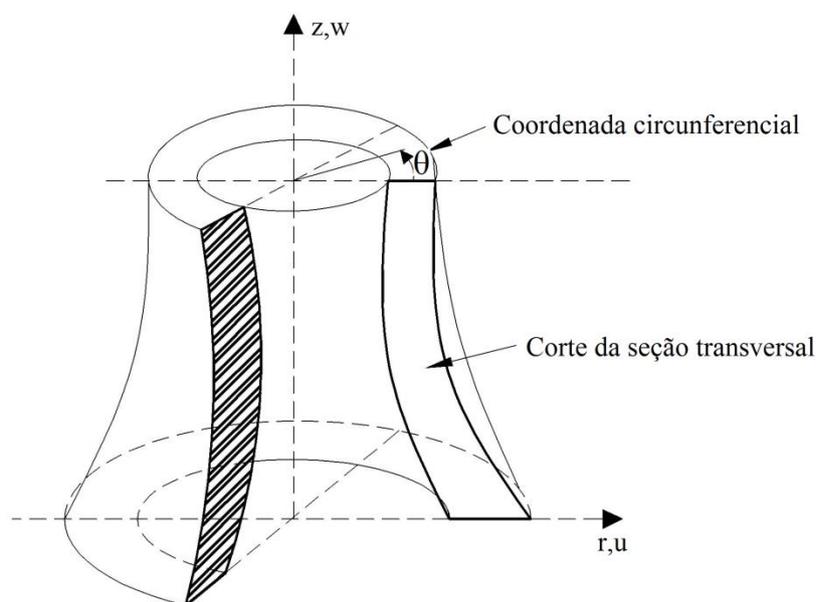


Figura 2. Sólido axissimétrico

Para o CST as funções de forma são lineares sobre o elemento. Os deslocamentos dentro dos elementos podem ser calculados através dos deslocamentos nodais. Para isto, no MEF utilizam-se as funções de forma.

O sólido axissimétrico sob carregamento axissimétrico, está sujeito a deslocamento radial (u) e axial (w). O vetor deslocamento é dado por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(r,z) \\ w(r,z) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Os vetores \mathbf{f} , \mathbf{T} e \mathbf{P} são respectivamente os vetores de força de corpo, de superfície e carga concentrada e estão indicados nas Eqs. (2),(3) e (4).

$$\mathbf{f} = [f_r, f_z]^T. \quad (2)$$

$$\mathbf{T} = [T_r, T_z]^T. \quad (3)$$

$$\mathbf{P} = [P_r, P_z]^T. \quad (4)$$

As tensões atuantes em corpos axissimétricos submetidos a esforços axissimétricos podem ser representadas por:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_r \quad \sigma_z \quad \tau_{rz} \quad \sigma_\theta]^T. \quad (5)$$

em que σ_r , σ_z , τ_{rz} e σ_θ são, respectivamente, as tensões radiais, axiais, tangenciais e circunferenciais indicadas na Fig. 3.

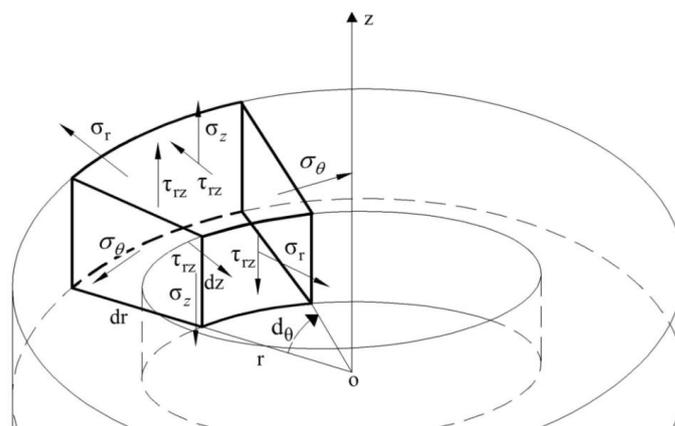


Figura 3. Tensões no volume diferencial de um sólido axissimétrico. submetido a cargas axissimétricas

As deformações podem ser escritas como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz} \quad \varepsilon_\theta]^T \quad (6)$$

sendo ε_r , ε_z , γ_{rz} e ε_θ respectivamente, as deformações radiais, axiais, tangenciais e circunferenciais.

A relação tensão deformação é dada, na forma usual, como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

sendo \mathbf{D} a matriz que relaciona as tensões com as deformações representada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{0,5-\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

2.1 Discretização do Campo de Deslocamento

Usando as funções de forma N_1 , N_2 , N_3 o vetor deslocamento (\mathbf{u}) é definido a partir dos deslocamentos nodais do elemento triangular (\mathbf{q}) como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} \quad (9)$$

sendo \mathbf{N} (matriz das funções de forma) e \mathbf{q} (vetor deslocamento) dados por:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T. \quad (11)$$

2.2 Discretização dos Campos de Deformação e Tensão

Considerando-se que $N_1 = \xi$ e $N_2 = \eta$, nota-se, para um elemento finito bidimensional plano de três nós, que $N_3 = 1 - \xi - \eta$.

Daí, organizando-se as Eq. (10) e (11), vem:

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5 \\ w &= N_1 q_2 + N_2 q_4 + N_3 q_6 \end{aligned} \quad (12)$$

Adaptando a Eq. (12) e calculando as derivadas parciais dos deslocamentos u e w em relação a r e z , tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{z_{31}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{z_{12}}{\det \mathbf{J}} & 0 \\ 0 & \frac{r_{32}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{r_{21}}{\det \mathbf{J}} \\ \frac{r_{32}}{\det \mathbf{J}} & \frac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} & \frac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} & \frac{z_{31}}{\det \mathbf{J}} & \frac{r_{21}}{\det \mathbf{J}} & \frac{z_{12}}{\det \mathbf{J}} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

em que $\det \mathbf{J}$ é a determinante da matriz Jacobiana representada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} r_{13} & z_{13} \\ r_{23} & z_{23} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

sendo:

$$r_{ij} = r_i - r_j. \quad (15)$$

$$z_{ij} = z_i - z_j. \quad (16)$$

A matriz $\boldsymbol{\varepsilon}$ pode ser escrita na forma matricial, como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}. \quad (17)$$

em que a matriz de deformação específica-deslocamento do elemento (\mathbf{B}), de dimensão 4x6, é dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{z_{23}}{\det\mathbf{J}} & 0 & \frac{z_{31}}{\det\mathbf{J}} & 0 & \frac{z_{12}}{\det\mathbf{J}} & 0 \\ 0 & \frac{r_{32}}{\det\mathbf{J}} & 0 & \frac{r_{13}}{\det\mathbf{J}} & 0 & \frac{r_{21}}{\det\mathbf{J}} \\ \frac{r_{32}}{\det\mathbf{J}} & \frac{z_{23}}{\det\mathbf{J}} & \frac{r_{13}}{\det\mathbf{J}} & \frac{z_{31}}{\det\mathbf{J}} & \frac{r_{21}}{\det\mathbf{J}} & \frac{z_{12}}{\det\mathbf{J}} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

2.3 Método da Energia Potencial

A energia potencial, Π , de um corpo elástico é definida como a soma da energia de deformação interna (U) com a energia potencial das forças externas (V), isto é:

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r} dA d\theta}_U - \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^A \mathbf{u}^T \mathbf{f} \mathbf{r} dA d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^L \mathbf{u}^T \mathbf{T} \mathbf{r} dl d\theta - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i}_V. \quad (19)$$

Obtém-se a energia de deformação do elemento, U_e e através de manipulações matemáticas na Eq. (19) pode-se chegar a:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(2\pi \int_e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dA \right) \mathbf{q}. \quad (20)$$

Sendo o termo dentro do parêntese a matriz de rigidez do elemento (\mathbf{K}^e):

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \int_e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dA. \quad (21)$$

2.4 Método de obtenção das tensões nos nós dos elementos

Com a finalidade de determinar as tensões nos nós de cada elemento, implementou-se uma rotina no programa computacional, baseada no Polinômio de Interpolação de Lagrange, mostrado na Eq. (22).

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\prod_{i=1, i \neq k}^{n+1} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \right] y_k. \quad (22)$$

Por analogia, a tensão nos nós de cada elemento será calculada como:

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\prod_{i=1, i \neq k}^{n+1} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \right] \sigma_k. \quad (23)$$

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Serão apresentados 03 exemplos utilizados para validação do código implementado. A saber: tem-se um volante rotativo sujeito a cargas nodais; uma estaca de concreto sujeita a um empuxo ao longo do seu fuste e a um carregamento nodal transferido do bloco de fundação até o seu topo; e por fim um pilar misto de aço e concreto sem armadura de aço sujeito a uma carga de superfície. Os resultados obtidos são comparados com resultados da literatura e também com os determinados por meio da utilização do software ANSYS 17.

3.1 Volante Rotativo

O exemplo mostrado na Fig.4 é um volante do tipo disco de aço que gira a 3000rpm. O diâmetro externo é de 600mm, o diâmetro do furo é de 150mm, a espessura do disco é de 25mm e o objetivo da aplicação é calcular a tensão tangencial no centroide dos elementos finitos, nos nós 1 e 5 da malha e ao longo da posição radial, na extremidade inferior dos elementos 1 e 3, ver Fig.5.

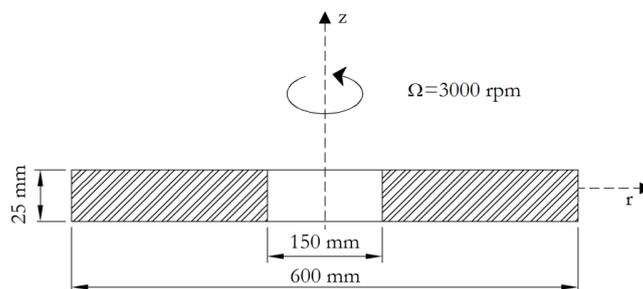


Figura 4. Volante do tipo disco de aço

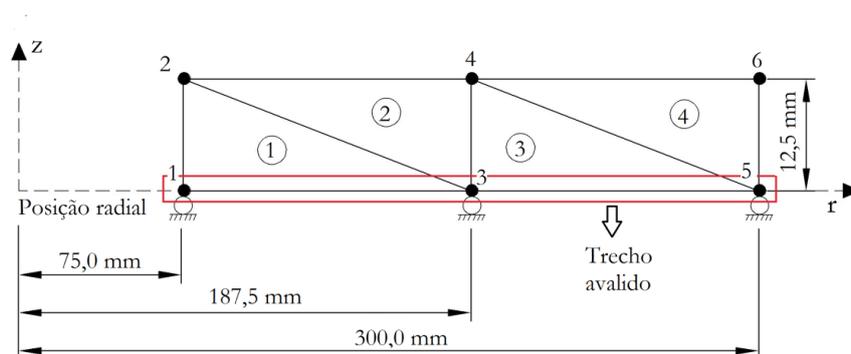


Figura 5. Malha de elementos finitos – Volante rotativo

Para todas as análises, a peça foi discretizada com 4 elementos finitos e com 6 nós, conforme mostrado na Fig. 5. O módulo de elasticidade é igual a 207GPa, o coeficiente de Poisson é 0,3 e a densidade do aço é 7830kg/m³. Neste exemplo foram aplicadas cargas horizontais nos nós 1, 2, 3, 4, 5 e 6 iguais a 14403N, 40009N, 97621N, 161635N, 136030N e 78417N, respectivamente.

Na Fig. 6 apresenta-se a tensão tangencial no volante rotativo em função da posição radial, sendo a resposta comparada com as obtidas via software ANSYS 17 e por Chandrupatla e Belegundu (2014).

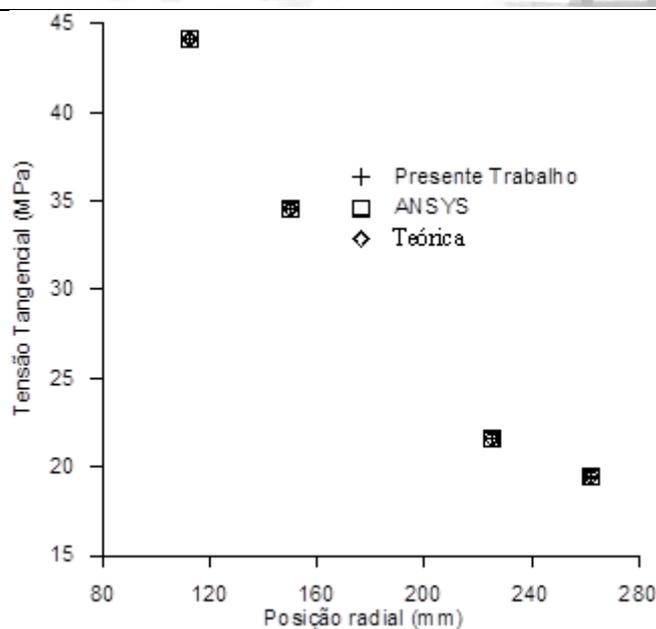


Figura 6. Tensões Tangenciais

Os valores da tensão tangencial nos nós 1 e 5, determinados com a técnica da interpolação polinomial baseada na função de interpolação de Lagrange, são mostrados na Tabela 1 e comparados com os obtidos por Chandrupatla e Belegundu (2014).

Na Tabela 2 apresentam-se os resultados referentes à tensão tangencial ou circunferencial no centroide de cada elemento finito triangular, sendo as mesmas comparadas com as respostas obtidas a partir do software ANSYS 17 e também com respostas da literatura.

Tabela 1. Tensão tangencial (MPa) nos nós 1 e 5

Nó	Presente Trabalho	Chandrupatla e Belegundu (2014)
1	55.110	55.110
5	20.830	20.800

Tabela 2. Tensão tangencial (MPa) no centroide dos elementos

Nó	Presente trabalho	Chandrupatla e Belegundu (2014)	ANSYS
1	44.130	44.100	44.105
2	34.500	34.500	34.834
3	21.570	21.600	21.564
4	19.400	19.400	19.389

3.2 Estaca de Concreto

Neste exemplo apresentam-se os resultados correspondentes à modelagem de uma estaca de concreto conforme mostra a Fig. 7.

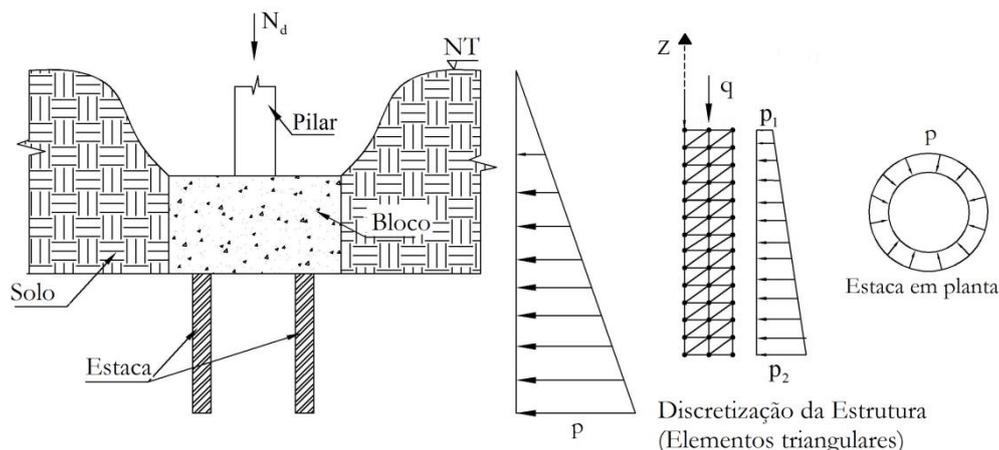


Figura 7. Estacas utilizadas como fundações profundas

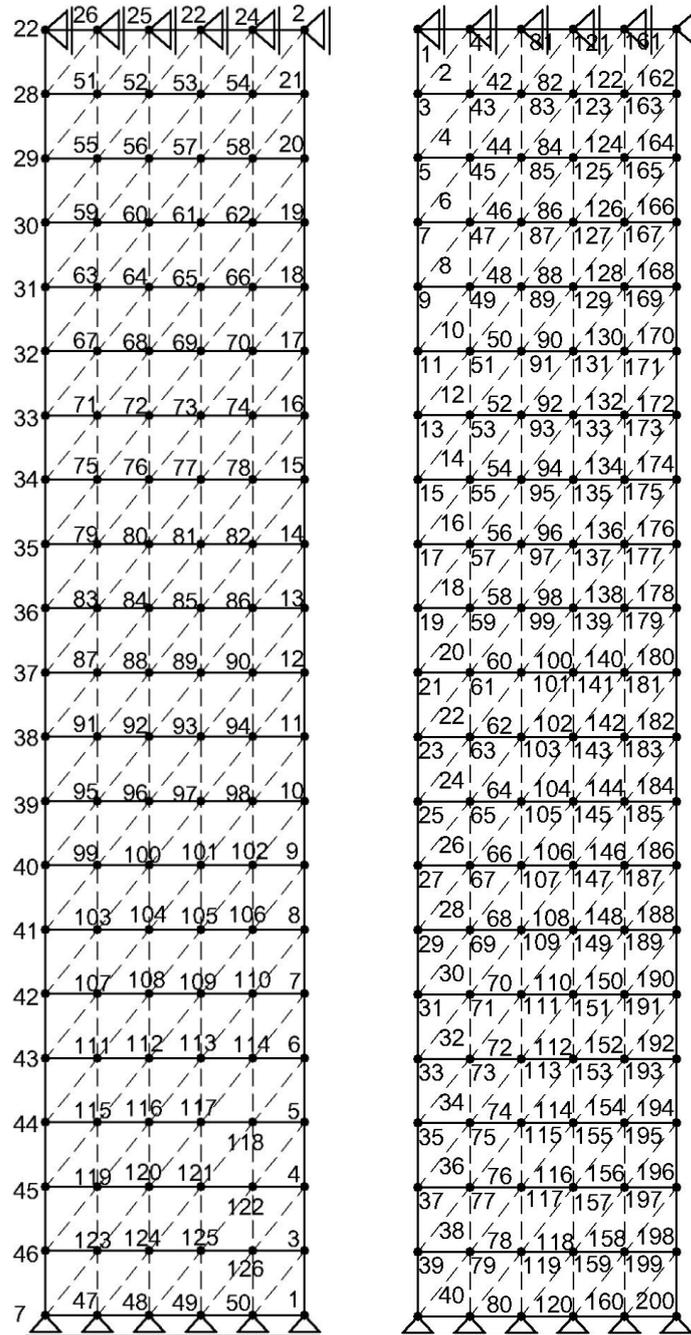
A estaca de concreto apresenta $f_{ck} = 25\text{MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ e o módulo de elasticidade do concreto foi calculado com a equação $E_c = 5600\sqrt{f_{ck}}$.

Neste exemplo considerou-se um solo com peso específico $\gamma_{\text{solo}} = 18\text{kN/m}^3$, ângulo de atrito $\phi = 30^\circ$ e coeficiente de empuxo ativo do solo $k_a = \text{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right)$, ou seja, $k_a = 0,333$.

O bloco possui uma altura igual a 2m e a estaca possui 10m de comprimento, ou seja, a altura do maciço de solo é $h = 12\text{m}$. O diâmetro da estaca é igual a 2m e a mesma está sujeita a uma carga axial igual a $q = 3000\text{kN}$. As pressões atuantes nas arestas da estaca são calculadas pela equação $p = k_a \gamma_{\text{solo}} h$.

A estrutura foi discretizada com 126 nós e 200 elementos, conforme mostrado na Fig. 8. É importante ressaltar que nas análises realizadas através do programa Progaxissimétrico e do ANSYS utilizou-se a mesma malha de elementos finitos.

Nas Tabelas 3, 4, 5 e 6 apresentam-se os resultados referentes à tensão radial, axial, tangencial e circunferencial no centroide dos elementos 192 a 200, ver Fig. 8 sendo as mesmas comparadas com as obtidas a partir do software ANSYS 17. Neste exemplo também se utilizou o elemento finito bidimensional com três nós e com 2 graus de liberdade por nó denominado PLANE 182 para a realização das análises via ANSYS 17.



a) Nós

b) Elementos

Figura 8. Malha de elementos finitos da estaca – numeração dos nós e elementos



XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



Tabela 3. Tensões radiais (kN/m²)

Nó	Presente trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
192	34.860	34.842	1.0005
193	26.660	26.642	1.0007
194	125.300	125.210	1.0007
195	58.070	58.036	1.0006
196	614.100	613.790	1.0005
197	573.400	573.090	1.0005
198	-166.100	-166.020	1.0005
199	-741.700	-741,370	1.0004
200	-3196.000	-3194.800	1.0004

Tabela 4. Tensões axiais (kN/m²)

Nó	Presente trabalho	ANSYS	Presente trabalho/ANSYS
192	-3039.000	-3037.600	1.0005
193	-3126.000	-3124.800	1.0004
194	-3101.000	-3099.400	1.0005
195	-3412.000	-3410.200	1.0005
196	-3392.000	-3390.200	1.0005
197	-4016.000	-4013.700	1.0006
198	-4695.000	-4692.400	1.0006
199	-5388.000	-5385.200	1.0005
200	-10700.000	-10694.000	1.0006

Tabela 5. Tensões tangenciais (kN/m²)

Nó	Presente trabalho	ANSYS	Presente trabalho/ANSYS
192	-7.764	-7.760	1.0005
193	16.250	16.242	1.0005
194	21.680	21.672	1.0004
195	47.350	47.330	1.0004
196	39.020	39.002	1.0005
197	241.100	240.940	1.0007
198	1198.000	1197.700	1.0003
199	601.900	601.590	1.0005
200	4835.000	4832.200	1.0006

Tabela 6. Tensões circunferenciais (kN/m²)

Nó	Presente trabalho	ANSYS	Presente trabalho/ANSYS
192	-27.130	-27.115	1.0006
193	27.350	27.335	1.0005
194	99.730	99.679	1.0005
195	141.900	141.800	1.0007
196	6.742	6.739	1.0005
197	464.700	467.450	1.0005
198	1750.000	1749.200	1.0005
199	140.800	140.690	1.0008
200	-2086.000	-2084.900	1.0005

3.3 Pilar Misto de Aço e Concreto

Neste exemplo apresentam-se os resultados numéricos referentes à análise de um pilar misto de aço e concreto sujeito a uma carga axial de projeto $P_d = 1200\text{kN}$. O pilar possui comprimento igual a 2m e as dimensões do tubo de aço são 35,56cmx33,06cmx1,25mm. O tubo foi preenchido com concreto cuja resistência característica aos 28 dias é igual a $f_{ck} = 30\text{MPa}$, o módulo de elasticidade do concreto foi calculado com a equação $E_c = 5600\sqrt{f_{ck}}$, considerou-se um coeficiente de Poisson para o aço do tubo $\nu = 0,3$ e para o concreto confinado igual a $\nu = 0,2$.

O objetivo da análise é calcular os deslocamentos laterais e as tensões radiais, axiais, tangenciais e circunferenciais em diferentes pontos da estrutura, e com a finalidade de validar os resultados obtidos através do programa computacional desenvolvido nesta pesquisa, a estrutura foi modelada também através do software ANSYS 17.

Na Fig. 9 apresenta-se um esquema do carregamento que atua no topo do pilar misto de aço e concreto e na Fig. 10 mostra-se a malha de elementos finitos adotada para a resolução deste exemplo.

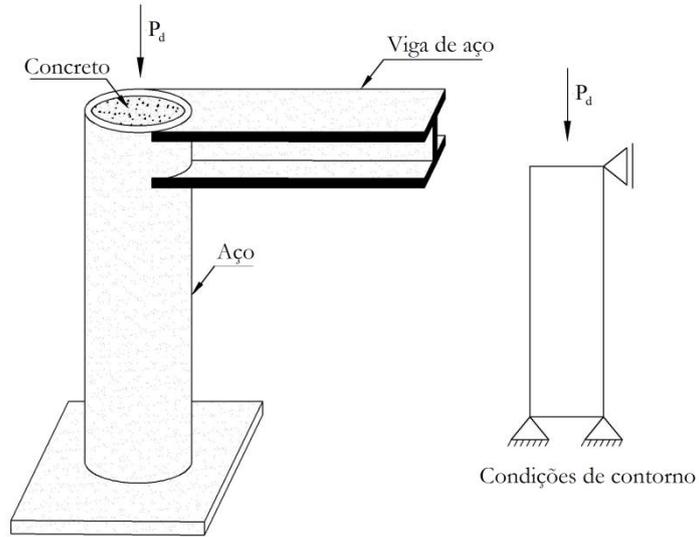
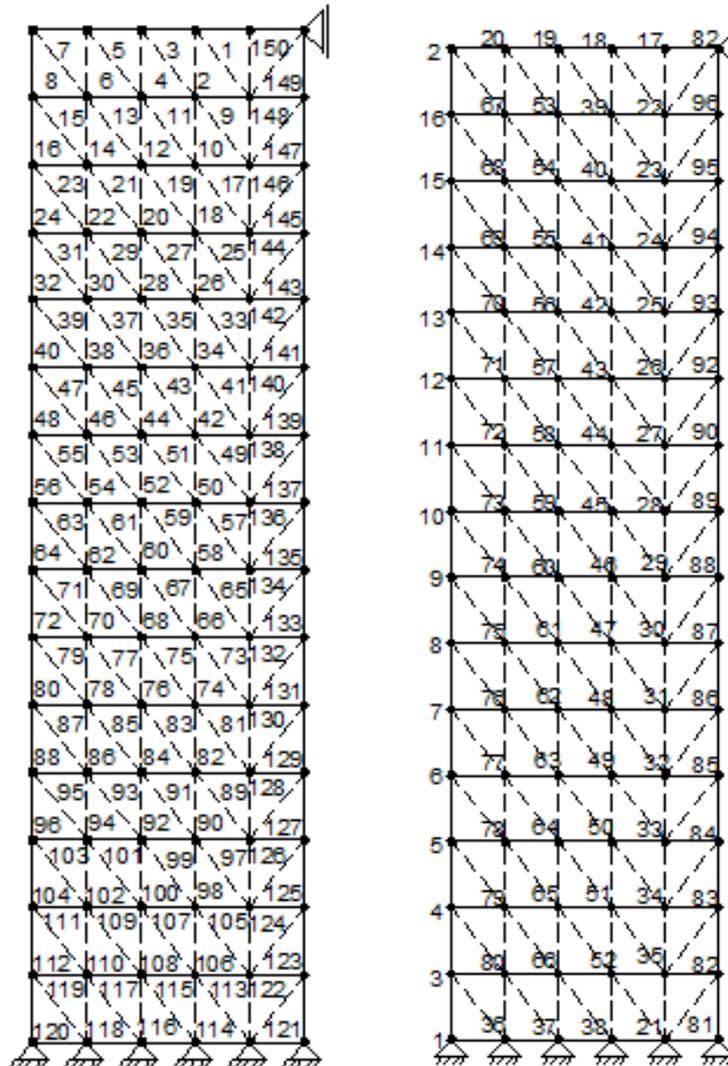


Figura 9. Pilar misto de aço e concreto



a) Nós

b) Elementos

Figura 10. Malha de elementos finitos do pilar misto de aço e concreto – numeração dos nós e elementos

Na Fig. 11 apresentam-se os resultados dos deslocamentos nas direções x e y em diversos nós da estrutura, sendo os mesmos comparados com os obtidos com o auxílio do software ANSYS 17. Conforme mostrado na Fig. 10, estes nós estão situados na extremidade do pilar, ao longo do seu comprimento.

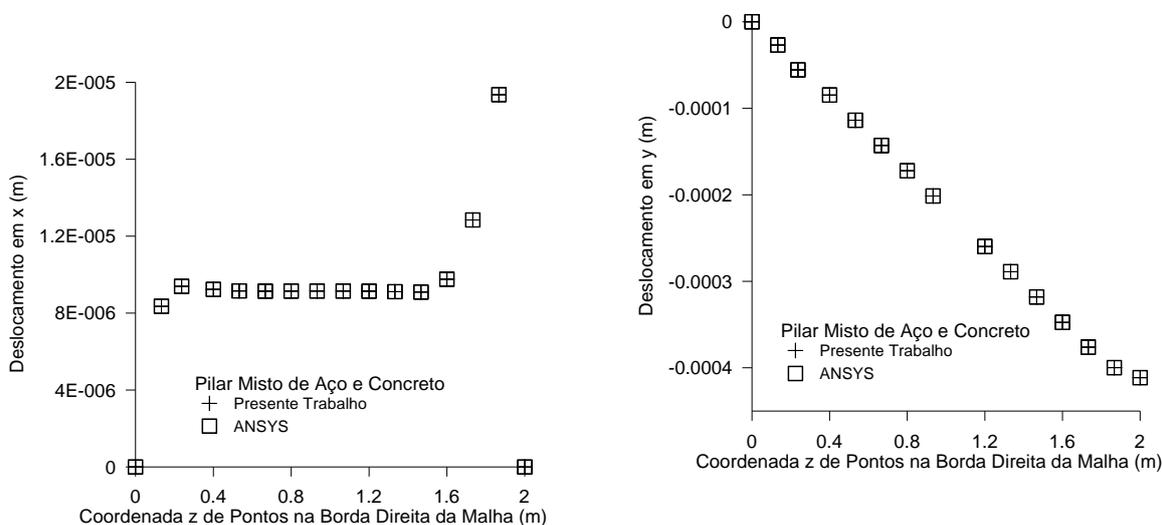


Figura 11. Deslocamentos nodais

Nas Tabelas 7, 8, 9 e 10 apresentam-se os resultados referentes às tensões radiais, axiais, tangenciais e circunferenciais dos elementos situados na extremidade superior do pilar misto.

Tabela 7. Tensões radiais (kN/m²)

Nó	Presente trabalho	ANSYS	Presente trabalho/ANSYS
149	3665.000	3663.000	1.0005
150	-7096.000	-7092.000	1.0006
1	-461.000	-460.770	1.0005
2	-1689.000	-1687.700	1.0008
3	-1022.000	-1021.900	1.0001
4	-2875.000	-2873.200	1.0006
5	-2293.000	-2291.800	1.0005
6	-4616.000	-4613.200	1.0006
7	-5524.000	-5521.400	1.0005
8	-8313.000	-8308.900	1.0005

Tabela 8. Tensões axiais (kN/m²)

Nó	Presente trabalho	ANSYS	Presente trabalho/ANSYS
149	-13360.000	-13354.000	1.0004
150	-22640.000	-22626.000	1.0006
1	-2920.000	-2918.500	1.0005
2	-5608.000	-5605.000	1.0005
3	-5659.000	-5655.800	1.0006
4	-11710.000	-11702.000	1.0007
5	-11820.000	-11815.000	1.0004
6	-28130.000	-28118.000	1.0004
7	-28400.000	-28385.000	1.0005
8	-92310.000	-92263.000	1.0005

Tabela 9. Tensões tangenciais (kN/m²)

Nó	Presente trabalho	ANSYS	Presente trabalho/ANSYS
149	12610.000	12608.000	1.0002
150	-1015.000	-1014.000	1.0010
1	614.900	614.620	1.0005
2	1467.000	1466.500	1.0003
3	546.600	546.360	1.0004
4	1506.000	1505.600	1.0003
5	353.600	356.420	1.0005
6	1207.000	1206.000	1.0008
7	779.000	778.600	1.0005
8	-22.720	-22.710	1.0004

Tabela 10. Tensões circunferências (kN/m²)

Nó	Presente trabalho	ANSYS	Presente trabalho/ANSYS
149	-6897.000	-6893.000	1.0006
150	1283.000	1283.000	1.0000
1	4714.000	4711.400	1.0006
2	1090.000	1089.600	1.0004
3	10410.000	10403.000	1.0007
4	2408.000	2406.900	1.0005
5	25400.000	25384.000	1.0006
6	3964.000	3961.800	1.0006
7	89730.000	89687.000	1.0005
8	6092.000	6088.700	1.0005

4 CONCLUSÕES

Ressalta-se que no exemplo do volante rotativo, os valores das tensões tangenciais nodais foram obtidos a partir da técnica de interpolação polinomial baseada na função de interpolação de Lagrange. A maior diferença percentual entre os resultados de tensões nodais obtidos via código computacional implementado e os resultados da literatura foi de 0,144%. Com relação às tensões obtidas no centroide dos elementos, o valor da média das diferenças obtidas pelo código implementado, quando comparado com as respostas da literatura e do software ANSYS 17, foram, respectivamente, 0,0517% e 0,0470%.

No exemplo da estaca de concreto, as tensões no centroide dos elementos determinadas pelo código implementado quando comparadas com os resultados do software ANSYS 17 resultaram numa diferença percentual máxima de 0,08%.

Com relação ao pilar misto de aço e concreto, as tensões no centroide dos elementos obtidas via o programa Progaxissimétrico quando comparadas com os resultados do software



ANSYS 17 resultaram numa diferença máxima de 0,08%. Vale ressaltar que neste exemplo, gerou-se uma malha constituída por dois materiais, a saber: aço e concreto.

Nos diversos exemplos apresentados observou-se uma convergência entre os resultados obtidos via Progxissimétrico e as respostas da literatura e/ou as obtidas a partir do software ANSYS 17. Conclui-se, portanto que a implementação desenvolvida foi bem sucedida, contribuindo com valores precisos de tensão, deformação e deslocamento das estruturas axissimétricas submetidas a esforços axissimétricos.

5 AGRADECIMENTOS

A Deus, por me iluminar e me conduzir em todos momentos da minha vida.

Ao meu orientador prof. Paulo Rocha pelos ensinamentos, amizade, motivação, paciência, conselhos e dedicação durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

A profa. Katia Inácio, pelas dicas, ensinamentos e apoio.

A todos os professores do mestrado e da graduação que contribuíram para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

A todos os amigos do mestrado, em especial o Miguel Ângelo, pelo apoio, amizade e companheirismo e conhecimentos contribuídos durante o desenvolvimento deste trabalho.

A CAPES e à UFOP, pelo auxílio financeiro.

6 REFERÊNCIAS

Chapman, S. J., *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd ed, 2003.

Vicente, W. M., Oliveira, W.C., *Análise de Tensões em Placas Circulares Utilizando Elementos Finitos Axissimétricos*. Trabalho Final de Graduação de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil, 2009.

Chandrupatla, T.R., Belegundu, A.D., *Elementos Finitos*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

Timosh, S. P., Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*. Third Edition, New York, McGraw-Hill Co, 1951.