# COMPUTABILIDADE, O TEOREMA DE CANTOR E O ARGUMENTO DA DIAGONAL

**ROCHA**, Gustavo Daniel Sousa[1]; **LOBO**, Matheus Pereira[2]

## RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo principal investigar as limitações da computação efetiva a partir do estudo do Teorema de Cantor e do argumento da diagonal, fazendo uma relação entre tais conceitos à teoria da computabilidade De à lógica. O trabalho foi desenvolvido com base em estudo teórico e análise dedutiva, partindo da Aritmética de Peano (PA), da hierarquia aritmética e das noções de decidibilidade e enumerabilidade. A partir da condição de funcionamento da máquina de Turing por números naturais, foi construído o conjunto $D = \{k \in \mathbb{N} : M_k(k)\ para\}$ representando os índices de programas que param quando executados com a própria descrição como entrada, cuja análise demonstrou que, embora seus elementos possam ser enumerados por um procedimento efetivo, não existe máquina capaz de decidir, de forma geral, se cada $M_k(k)$ irá parar. Desse modo, comprovou-se que $D$ é computavelmente enumerável, mas não decidível, evidenciando o alcance e efetividade do argumento da diagonal como ferramenta de demonstração. A

1 Bolsista do Programa de Iniciação Científica (PIBIC). Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de ciências integradas. Gustavo.rocha@ufnt.edu.br e-mail.
2 Professor Doutor do Curso de licenciatura em física, Universidade Federal do Norte do Tocantins, Orientador da pesquisa, Matheus.lobo@ufnt.edu.br

formalização do conjunto e dessa prova permitiu relacionar os resultados obtidos à classificação aritmética $\Sigma_1^0$, reforçando a correspondência entre expressões de PA e propriedades efetivas de conjuntos numéricos. A pesquisa consolidou a compreensão dos limites da computação, demonstrando a partir de fundamentos lógicos, a existência de problemas indecidíveis.

**Palavras-chave**: Computabilidade, Argumento da Diagonal, Teorema de Cantor, Indecidibilidade, Máquinas de Turing.

## I. INTRODUÇÃO/JUSTIFICATIVA

Esta iniciação científica tratou da computabilidade, com foco no Teorema de Cantor e no argumento da diagonal, e englobou estudos formais (Axiomas de Peano (PA), hierarquia aritmética), construção e prova do conjunto $D = \{k \in \mathbb{N} : M_k(k)\ para\}$, e análise dos seus desdobramentos. A motivação principal por trás desse trabalho foi compreender os fundamentos e limites da matemática moderna. É integrado na área de Matemática, lógica matemática e teoria da computação, e aborda temáticas principais como decidibilidade, enumerabilidade e máquinas de Turing. Como aplicação e exemplo, temos a demonstração por diagonalização que $D$ é enumerável, mas indecidível, ilustra diretamente a técnica de Cantor aplicada à teoria da computação e a conexão com o problema da parada. Essas atividades foram responsáveis por consolidarem a compreensão dos limites computáveis e a relação entre fórmulas em PA e propriedades efetivas. Com tais desenvolvimentos da pesquisa, pude fortalecer minha formação para atuação futura em pesquisa/ensino, desenvolvendo raciocínio formal e elaborações de provas.

## II. BASE TEÓRICA

A pesquisa se fundamenta nos trabalhos de Georg Cantor (1891) e Alan Turing (1936), as ideias por trás deste artigo, cujos fundamentos na teoria da computabilidade vem das construções do argumento da diagonal e das máquinas de Turing. Além disso, Jonh Stillwell (Reverse Mathematics: Proofs from the inside out) foi consultado, dado que ele explora a diagonalização e o seu impacto na matemática contemporânea. Tal pesquisa bibliográfica serviu de alicerce para a construção e análise do conjunto $D = \{k \in \mathbb{N} : M_k(k)\ para\}$ , relacionando o método de Cantor aos conceitos de decidibilidade e enumerabilidade.

## III. OBJETIVOS

### Geral

Investigar as limitações da computação efetiva: usar o teorema de Cantor e o argumento da diagonal para construir e analisar o conjunto $D = \{k \in \mathbb{N} : M_k(k)\ para\}$, e relacionando essa construção às noções formais de PA e as máquinas de Turing.

### Específicos

- Revisar os fundamentos teóricos necessários da computabilidade incluindo axiomas de Peano, hierarquia aritmética, definições de enumerabilidade, decidibilidade e máquinas de Turing;
- Construir explicitamente o conjunto $D$ e demonstrar, via diagonalização, que o próprio é computavelmente enumerável, mas não decidível, e expor essa prova;
- Relacionar a técnica de diagonalização ao problema da parada e com a classificação aritmética.

## IV. METODOLOGIA

A pesquisa teve caráter teórica e expositiva, conduzida por estudo bibliográfico e análise conceitual sobre lógica matemática e computabilidade, utilizando o método dedutivo para estudar o argumento da diagonal, o Teorema de Cantor e sua reformulação por Alan Turing para construirmos e verificarmos conjuntos como $D = \{k \in \mathbb{N} : M_k(k)\ para\}$. O trabalho foi desenvolvido na Universidade Federal do Norte do Tocantins. A análise concentrou-se na correlação dos temas e na validação lógica das demonstrações e na relação entre os resultados, a decidibilidade e a enumerabilidade.

## V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

1. Definimos o conjunto canônico $D = \{k \in \mathbb{N} : M_k(k)\ para\}$ , onde $M_k$denota a k-ésima máquina de Turing seguindo uma enumeração efetiva fixada.
2. Existe um procedimento efetivo que lista todos os elementos de $D$ . A ideia é simular $M_1 1,\ M_2 2, \ldots$ em camadas: para cada limite de tempo $S = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ , simule cada $M_k k$ por $S$ passos e, sempre que uma simulação terminar, emita o índice $k$ . Se $M_k k$ para em algum tempo finito $t$ , então no estágio $s = t$ (ou algum

$s \geq t$ ), a parada será detectada e $k$ será listado. Isso mostra que $D$ é computavelmente enumerável, pertence ao conjunto $\Sigma_1^0$.

3. Suponha, por contradição, que exista um programa total $d$ que decide $D$ , isto é, para todo $k$ , $dk = 1 \Leftrightarrow k \epsilon D, \ \ dk = 0 \ \Leftrightarrow \ k \ \notin \ D.$
4. Usando $d$ , podemos construir uma máquina $R$ (efetivamente) que, dada a entrada $x$ , procede assim
   a) Calcule $dx$ ;
   b) $Se\, dx = 1$ então entre em loop infinito (não pare);
   c) $Se\, dx = 0$ então pare imediatamente.
5. Seja $e$ o índice de $R$ na enumeração das máquinas. O comportamento de $R$ em si mesmo gera a contradição: $Re\, para \ \Leftrightarrow \ de = 0 \ \Leftrightarrow \ e \ \notin \ D$ , por outro lado $Re\, não\, para \ \Leftrightarrow \ de = 1 \ \Leftrightarrow \ e \ \in \ D$ .
6. Da equivalência $e \ \in \ D \ \Leftrightarrow \ Re$ , obtivemos uma contradição com a definição de $R$ . Logo, não existe tal decisor $d$ , e $D$ não é decidível.

Pela construção do conjunto $\{k \ \in \ \mathbb{N}\ tal\ que\ M_k \ \ para\ na\ entrada\ k\}$ . Demostrou-se que;

- $D$ é computavelmente enumerável, pois existe uma máquina que, ao simular todas as $M_k(k)$, lista os índices $k$ para quais a computação termina.
- $D$ não é dedecidível, pois se existisse uma máquina $R$ que decidisse $D$ poderíamos definir $R(k)$ como "para se $M_k(k)$ não parar", o que contradiz a própria definição de $D$ .
- Assim, obteve-se a demonstração de que existe um conjunto computavelmente enumerável, mas não computável, formalizando o resultado clássico derivado do argumento da diagonal.

## VI. CONCLUSÃO/CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa possibilitou maior compreensão em relação ao alcance e às limitações da computação efetiva, por meio da aplicação do argumento da diagonal de Cantor ao contexto da computabilidade. O estudo reforçou o entendimento dos conceitos de decidibilidade, enumerabilidade e formalização aritmética, resultando na demonstração de um conjunto computavelmente enumerável, mas não decidível , o que por conseguinte resultou em uma repertorio amplo na teoria de conjuntos. Essa experiencia contribuiu significativamente no desenvolvimento do raciocínio lógico e da autonomia na formulação de demonstrações.

## VII. REFERÊNCIAS

WARNER, Steve. Pure Mathematics for Beginners. GET 800, 2018.

VELLEMAN, Daniel J. How to Prove It: A Structured Approach. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

STILLWELL, John. “Roads to Infinity”. Wellesley: AK Peters, 2010

STILLWELL, John. Reverse Mathematics: Proofs from the inside out Princeton: Princeton University Press, 2019.

## VIII. AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq – Brasil), pelo apoio concedido por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Cientifica (PIBIC). Agradeço, também, a Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT) pela oportunidade de desenvolver esta pesquisa, e ao meu orientador Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo, pela orientação e disponibilidade durante todo o processo de pesquisa.