

ANÁLISE DE PLACAS RETANGULARES DELGADAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF THIN RECTANGULAR PLATES

Gustavo Luz Xavier da Costa; Fernanda Rodrigues Mittelbach

(P) Engenheiro Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal - RN, Brasil.
Dra. Profa., Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal - RN, Brasil.
gustavo.costa@coc.ufrj.br

Resumo: Este estudo busca analisar placas retangulares delgadas (formulação de Kirchhoff) pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando elementos triangulares bem como, a partir de exemplos práticos, a acurácia do método. Para isso foi desenvolvida uma rotina computacional capaz de calcular esforços, deslocamentos e reações de apoio em uma placa retangular delgada submetida a carregamento uniformemente distribuído em sua superfície. Foi possível observar que os resultados, em geral, convergiram para a solução exata com o aumento do número de elementos, conforme esperado. Da mesma forma, observou-se uma diferença entre o comportamento dos gráficos de deflexão da placa com todos os bordos engastados e o comportamento dos gráficos referentes às placas com todos os bordos simplesmente apoiados. Na primeira situação, a deflexão atinge um ponto de máximo após o qual a solução aproximada converge por valores superiores, enquanto que para a placa apoiada a solução convergiu somente por valores superiores. Outro ponto importante, foi o fato de serem usados elementos triangulares com dimensões semelhantes pois, caso contrário, constatou-se que o erro percentual entre a solução aproximada e analítica aumentava bruscamente, indicando possivelmente o mal condicionamento da matriz de rigidez.

Palavras chaves: Método dos Elementos Finitos, Placa retangular, Análise Estrutural.

Abstract: This study seeks to analyse thin rectangular plates (Kirchhoff's theory) by the Finite Element Method (FEM) using triangular elements as well as, by practical examples, show the method's accuracy. To this end, a computational routine capable of calculate internal forces, displacement and support reactions was developed for a thin rectangular plate subjected to a uniformly loading over it's surface. It was observed that the results, in general, converged to the analytical solution with the increase of the number of elements. It was also observed a difference on the behavior of the graphs for a clamped and a simply supported plate. In the first situation, the vertical displacement reaches a maximum and then converges to the theoretical solution by superior values while for the simply supported plate it converged only by superior values, without reaching na extremum value. Another importante thing to note was the use of triangular elements with similar dimensions, because otherwise the percentual error between the approximate and the analytical solution increased highly, indicating a possible ill conditioned stiffness matrix.

Keywords: Finite Element Method; Rectangular Plate; Structural Analysis.

1 INTRODUÇÃO

A ideia central do Método dos Elementos Finitos (MEF) é subdividir o domínio de estudo em partes menores, também chamados de elementos finitos (Reddy, 2006) e em cada subdomínio obter uma solução aproximada para o problema. Todavia, a maneira de obter esta solução aproximada não é única. Para tanto, pode-se utilizar o Método dos Resíduos Ponderados ou, no caso particular da física aplicada, os princípios variacionais como o Princípio do Mínimo da Energia Potencial Total ou o Princípio dos Trabalhos Virtuais. Neste estudo, utilizou-se a formulação apresentada por Shames e Dym (2003) que baseia-se no Princípio do Mínimo da Energia Potencial Total. No entanto, vale salientar que os princípios variacionais nem sempre podem ser utilizados pois necessitam que o operador (neste caso um operador diferencial linear) seja auto-adjunto, e consequentemente, que a formulação seja variacionalmente consistente. Ou seja $A = A^*$ na Eq. (1):

$$(Au, w)_\Omega = (u, A^*w)_\Omega + (Au, w)_\Gamma \quad (1)$$

onde $(,)$ representa o produto interno, u e w funções reais, A o operador linear e A^* o seu adjunto. A condição de o problema ser variacionalmente consistente implica em simetria da matriz de rigidez bem como na garantia de que a solução do problema existirá e que será única (Reddy, 2017).

O estudo de flexão de placas, assim como de cascas foi um dos primeiros para os quais o MEF foi aplicado. As características peculiares que permeiam seu comportamento têm sido objeto de constante estudo por parte de físicos e engenheiros (Zienkiewicz, 2000). Assim como no caso de vigas (teoria de Euler-Bernoulli), a teoria de placas delgadas (Kirchhoff), cuja equação diferencial que a modela é de quarta ordem, o elemento finito utilizado necessita ter, no mínimo, continuidade C^1 , ou seja, ser contínuo até sua derivada primeira na interface entre elementos. *Polinômios cúbicos de Hermite* podem ser utilizados para vigas atendendo a continuidade C^1 . No entanto, em se tratando de placas delgadas o atendimento desta condição é mais difícil de ser satisfeita quando se emprega elementos triangulares. Devido a isto, utiliza-se frequentemente elementos não conformes (Oñate, 2013). Porém, apesar de convergirem, mostram-se ineficazes para certos tipos de disposição de malha (Shi, 2002). Não obstante, este tipo de elemento foi utilizado neste estudo e apresentou bons resultados. É importante notar, que uma das formas de evitar o uso de elementos C^1 é utilizar formulações mistas de elementos finitos (também chamadas de formulação híbrida) onde a equação diferencial que rege o problema em estudo é subdividida em duas ou mais equações diferenciais de menor ordem, podendo-se utilizar elementos de continuidade C^0 . Formulações mistas ou híbridas estão presentes em (Reddy, 2006), (Zienkiewicz, 2000) e (Bathe, 2003).

2 ELEMENTOS FINITOS EM PLACAS DELGADAS

A teoria de placas delgadas de Kirchhoff é semelhante a teoria de vigas de Euler-Bernoulli e baseia-se nas seguintes suposições apresentadas em (Radeş, 2006):

- a) Não há deformação no plano médio da placa;
- b) As normais ao plano médio de uma placa indeformada permanecem retas e normais a superfície média da placa durante a deformação;
- c) A componente de tensão normal ao plano médio pode ser desprezada.

Conforme mencionado anteriormente, a abordagem por elementos finitos utilizado neste estudo foi por meio do Princípio do Mínimo da Energia Potencial Total. Este tipo de abordagem é interessante pois lida diretamente com a física do problema (Reddy, 2017). Neste sentido, um corpo elástico quando deformado devido a cargas externas tem sua energia potencial total é dada por:

$$\Pi = U + V \quad (2)$$

Onde Π representa o funcional de energia potencial total do corpo, U a energia potencial total das forças internas e V a energia potencial total das forças externas.

A ideia central é fazer com que o funcional de energia potencial total seja mínimo, ou seja, estabelecer que a *primeira variação* do funcional energia potencial total se anule, ou seja:

$$\delta\Pi = 0 \quad (3)$$

Desta forma, a matriz de rigidez de cada elemento será a integral do produto mostrado na Eq. (4)

$$[B][D][B] \quad (4)$$

Sabendo-se que a matriz $[B]$ da Eq. (4) relaciona as deformações aos deslocamentos nodais em cada elemento e $[D]$ é a matriz constitutiva para o caso de Estado Plano de Tensão.

$$[B] = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Como o elemento triangular utilizado possui nove graus de liberdade, é necessário adotar um campo de deslocamentos polinomial que contenha nove termos. Este polinômio pode ser obtido a partir do *Triângulo de Pascal* apresentado em (Shames e Dym, 2003).

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + xy^2) + \alpha_9 y^3 \quad (6)$$



Observa-se que os termos x^2y e xy^2 são somados em um só para configurar um campo de deslocamentos simétrico.

O vetor de forças nodais equivalentes, considerando apenas carregamento uniformemente distribuído na superfície do elementos é dada integral do produto mostrado na Eq. (7)

$$p(x, y)[N] \tag{7}$$

considerando $p(x, y)$ como a função que descreva a carga distribuída no elemento.

2.1 Integração

Shames e Dym (2003) propõe um método de realizar a integração para o cálculo da matriz de rigidez bem como do vetor de forças nodais equivalentes. Isto é feito por meio de um parâmetro β e de acordo com o monômio que está sendo integrado.

Seja $k x^r y^s$ um monômio qualquer a ser integrado para a obtenção da matriz de rigidez ou do vetor de forças nodais equivalentes onde k é uma constante real, a integral resultante será do tipo

$$\frac{A}{\beta} (\xi_i^r \eta_i^s + \xi_j^r \eta_j^s + \xi_k^r \eta_k^s) \tag{8}$$

Onde ξ e η são as coordenadas locais dos vértices do elemento triangular, A a sua área e β um parâmetro apresentado na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetro β para integração

$m = r + s$	1	2	3	4	5
β	$\rightarrow \infty$	12	30	60	120

3 EXEMPLOS NUMÉRICOS E RESULTADOS OBTIDOS

A seguir são apresentados dois exemplos de placas submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos em sua superfície. O primeiro trata-se de uma placa completamente engastada nos quatro bordos enquanto que a segunda refere-se a uma placa simplesmente apoiada. Os dados físicos e geométricos de entrada são apresentados a seguir:

Largura (l_x): 3,0 m

Comprimento (l_y): 3,0 m

Módulo de Elasticidade (E): $21 \cdot 10^7$ kPa

Coefficiente de Poisson (ν): 0,3

Espessura (h): 0,025 m

A título de ilustração, é indicada na Figura 1 a discretização da placa em elementos finitos. Esta discretização, apesar de bastante rudimentar, apresentou-se satisfatória para o problema em estudo. A verificação da convergência se deu pelo aumento do número de elementos na malha.

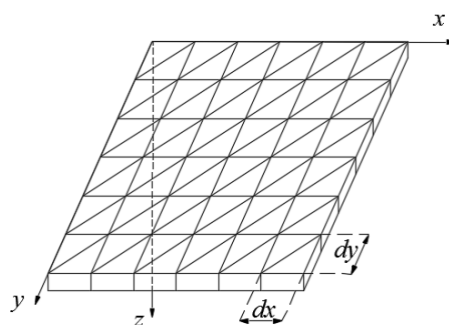


Figura 1. Discretização da placa em elementos finitos

Fonte: (Autor, 2018)

O erro percentual apresentado nas Tabelas 2 e 3 é o erro relativo. Neste cálculo levou-se em consideração apenas a máxima deflexão da placa (neste caso a deflexão no centro).

3.1 Caso 1 - Placa engastada

Tabela 2. Deflexão máxima para o caso 1

Nº de	Nº de elementos	$w_{\text{máx}}$ MEF	$w_{\text{máx}}$	Erro (%)
9	8	0.049140	0.047552	3.340
25	32	0.052115	0.047552	9.597
49	72	0.049984	0.047552	5.115
81	128	0.049097	0.047552	3.250
121	200	0.048650	0.047552	2.309
169	288	0.048393	0.047552	1.770
225	392	0.048233	0.047552	1.433
289	512	0.048126	0.047552	1.208
361	648	0.048051	0.047552	1.051
441	800	0.047997	0.047552	0.936
529	968	0.047956	0.047552	0.851
625	1152	0.047925	0.047552	0.785

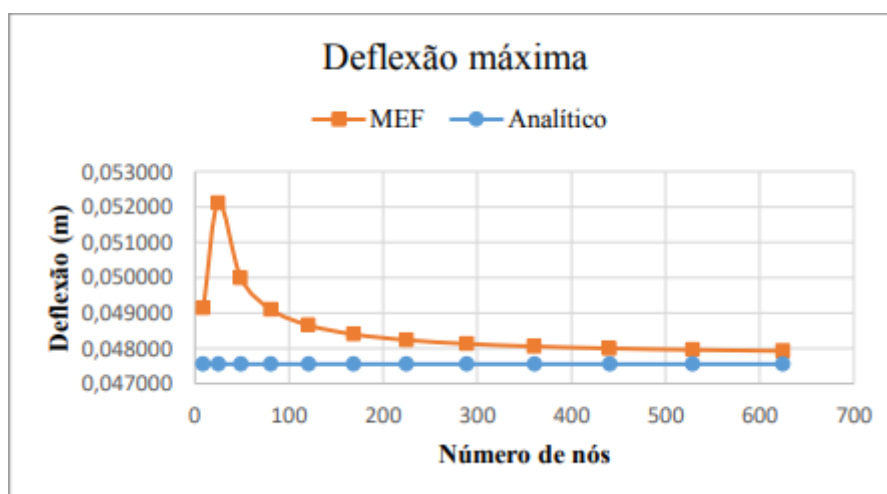


Gráfico 1. Deflexão máxima para o caso 1

Fonte: (Autor, 2018)

3.2 Caso 2 - Placa simplesmente apoiada

Tabela 3. Deflexão máxima para o caso 2

Nº de	Nº de elementos	$w_{\text{máx}}$ MEF	$w_{\text{máx}}$ analítico	Erro (%)
9	8	0.205025	0.153311	33.731
25	32	0.167325	0.153311	9.141
49	72	0.160930	0.153311	4.969
81	128	0.158392	0.153311	3.314
121	200	0.157077	0.153311	2.457
169	288	0.156286	0.153311	1.940
225	392	0.155761	0.153311	1.598
289	512	0.155390	0.153311	1.356
361	648	0.155114	0.153311	1.176
441	800	0.154901	0.153311	1.037
529	968	0.154733	0.153311	0.927
625	1152	0.154596	0.153311	0.838

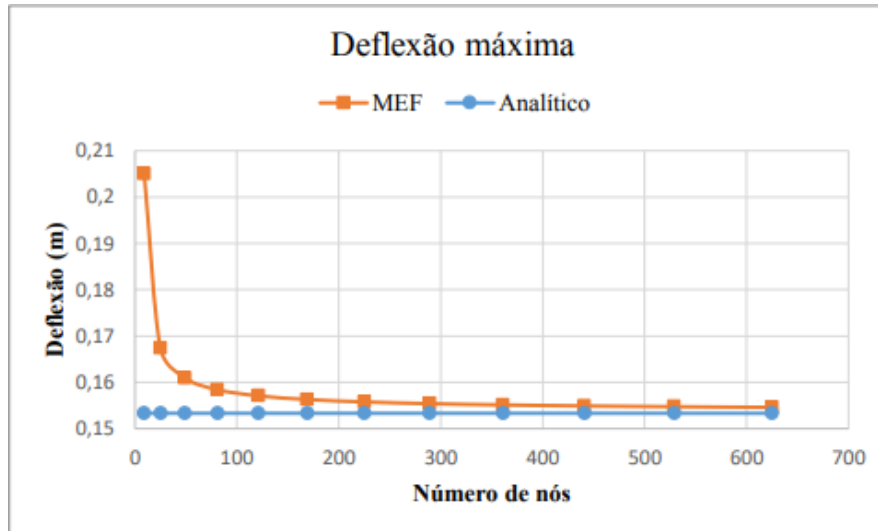


Gráfico 2. Deflexão máxima para o caso 2

Fonte: (Autor, 2018)



4 DISCUSSÃO ACERCA DOS RESULTADOS

A partir dos resultados obtidos constatou-se que a solução do MEF convergiu para a solução analítica com o aumento do número de elemento. Neste sentido, algumas observações podem ser feitas:

Observou-se que a convergência em ambos os casos analisados se deu por valores superiores. No caso da placa engastada observou-se que além de o resultado convergir somente por valores superiores, apresentou-se um pico de deflexão. Isso possivelmente é explicado pelo uso de elementos não conformes que, diferente dos elementos conformes, não necessariamente convergem monotonicamente nem somente por valores inferiores (Moatamedi e Khawaja, 2018).

Apesar de não ter sido exibido, também constatou-se que nos casos de flexão cilíndrica com elementos triangulares muito distorcidos ($dy \gg dx$) o erro aumentava enormemente, indicando um possível mal condicionamento da matriz de rigidez.

Observa-se mais uma vez que para alguns tipos de orientação do elemento em relação aos eixos coordenados, a matriz de rigidez do elemento torna-se singular, sendo esta é uma das limitações deste tipo de elemento.



REFERÊNCIAS

- Bathe, J., 2003. Finite element procedures. Prentice-Hall.
- Moatamedi, M., Khawaja, H., 2018. Finite element analysis. Taylor & Francis.
- Oñate, E., 2013. Structural analysis with the finite element method – volume 2. Springer.
- Radeş, R., 2006. Finite element analysis. Printech.
- Reddy, J., 2006. An introduction to the finite element method. McGraw-Hill.
- Reddy, J., 2017. The finite element method for boundary value problems. Taylor & Francis.
- Shames, I., Dym, C., 2003. Energy and finite element methods in structural mechanics. Taylor & Francis.
- Shi, Z., 2002. Nonconforming finite element methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 149, pp. 221-225.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R., 2000. Finite element method – volume 1: the basis. Butterworth-Heinemann.