



Um estudo sobre grandes deformações em uma barra engastada-livre por aproximações numéricas

Aniel Costa Cruz Júnior¹; Alexandre da Silva Galvão²

- (1) Estudante, Universidade Federal de São João Del-Rei, Ouro Branco - MG, Brasil.(P)
(2) Prof. Universidade Federal de São João Del-Rei, Ouro Branco - MG, Brasil.

Resumo: Sabe-se que em barras esbeltas sujeitas a esforço axial de compressão pode ocorrer perda de estabilidade por deflexão lateral antes de atingir o ponto de ruptura do material, para tais situações, a estabilidade deve ser o critério levado em consideração no dimensionamento. O estudo do comportamento estrutural pós-crítico nestes casos é, portanto, fundamental para que o projetista possa prever o aparecimento de novas configurações de equilíbrio que podem ser estáveis ou não. O presente trabalho ilustra a importância desses efeitos não-lineares por meio do estudo da deflexão de um pilar engastado livre sujeito à flexo-compressão em sua trajetória de equilíbrio pós-crítica. Para este fim, são usados métodos numéricos e analíticos com um subsequente estudo comparativo entre tais métodos. É adotado o modelo com as hipóteses propostas por Timoshenko e a resolução da equação diferencial é feita por meio de integrais elípticas. Para a solução numérica, usa-se o método Runge-Kutta de 4ª ordem incrementado com o método de Newton-Raphson e o método Rayleigh-Ritz.

Palavras chaves: Não-linearidade geométrica; Pilares; Deflexão;

Abstract:

Keywords: *word1; word2;....;word5.*

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento do comportamento estrutural das barras que constituem um sistema estrutural reticulado é de grande importância para que os projetistas dimensionem adequadamente sistemas estruturais resistentes e estáveis. Sendo assim, o conhecimento das cargas críticas e trajetórias de equilíbrio pós-críticas das barras é de grande interesse.

O avanço no desenvolvimento das técnicas construtivas, emprego de novos materiais de resistência elevada, tem levado a metodologia de análise/projeto estrutural a uma mudança de paradigma, na qual se inclui efeitos não lineares (Silveira 2012).

A curvatura exata de uma coluna foi estudada primariamente por Euler e por Lagrange, em Timoshenko, Theory of Elastic Stability 1963, a expressão diferencial para a *Elastica* é feita em analogia a equação diferencial da oscilação do pêndulo, conhecida como Analogia Dinâmica de Kirchhoff.

Em caso de peças sujeitas a esforço axial de compressão desde que seja esbelta suficiente para tal, pode ocorrer perda de estabilidade por deflexão lateral antes de atingir o ponto de ruptura do material, para tais situações, a estabilidade deve ser o critério levado em consideração no dimensionamento. O estudo da trajetória pós-crítica desses elementos toma relevância, pois se poderá prever o aparecimento de novas configurações de equilíbrio, estáveis, instáveis e neutros (Galvão 2000).

2 FORMULAÇÃO DO FUNCIONAL DE ENERGIA

Tomando uma barra esbelta fletida por uma força axial P , podemos dizer que sua energia potencial total (π) é um somatório do potencial da força aplicada com sua energia interna de deformação.

$$\pi = U + V_p. \quad (1)$$

Onde U é a energia interna de deformação e V_p o trabalho da força externa aplicada, no qual o sinal negativo apenas identifica o sentido da força.

Na parcela de deformação interna, o termo pode ser subdividido em sua parcela referente a deformação axial e outra parcela de energia gerada pelo alongamento e encurtamento de fibras na flexão (Serebrenick 2004)

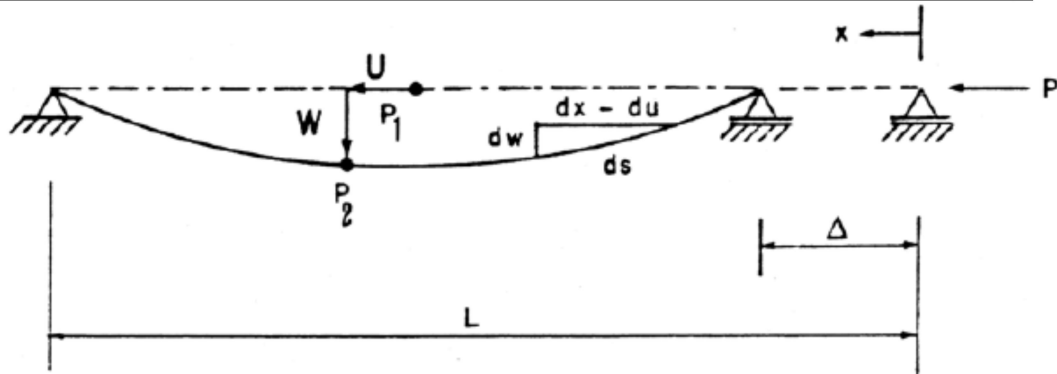


Figura 1 - Modelagem de uma barra esbelta

Fonte: (Serebrenick 2004)

Para a presente análise em vista que a barra é esbelta o suficiente, pode-se ignorar a parcela de deformação axial.

Assim, a energia de deformação interna, poderá ser dada por:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (2)$$

Onde E e I são os parâmetros de rigidez, respectivamente, o módulo de elasticidade e o momento de inércia da barra. χ é a mudança de curvatura.

O trabalho das forças externas se define a partir do deslocamento na direção da aplicação da força.

$$V_p = -W = -P\Delta \quad (3)$$

Logo, substituindo as expressões, obtemos a seguinte equação para π .

$$\pi = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx - P\Delta \quad (4)$$

Admitindo um elemento infinitesimal da barra, pequeno tal para que a aproximação $ds \approx dx$ seja razoável tal qual mostrado na Fig. (1). Das relações trigonométricas obtemos:

$$\text{sen}(\Psi) = \frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx} = \dot{w}(x) \quad (5)$$

$$\psi = \arcsen(\dot{w}(x)) \quad (6)$$

Sendo ψ o ângulo entre o eixo retilíneo e o deformado após a flexão, podemos definir a partir deste a curvatura:

$$k = \frac{1}{R_d} = \dot{\psi}(x) = \frac{\ddot{w}(x)}{\sqrt{1+\dot{w}(x)^2}} \quad (7)$$

Dependendo do tipo da análise, é usual se considerar pequenas rotações ($\dot{w}^2 \approx 0$), segundo Galvão (2000), tal aproximação mostra-se condizente com grande maioria dos

problemas usuais em análise e cálculo de estruturas. Mantendo nossa relação para grandes rotações, definimos a energia de deformação interna como:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\frac{\dot{w}(x)^2}{1 - \dot{w}(x)^2} \right) dx \quad (8)$$

Expandindo a série de Taylor associada à curvatura, admitindo não variação da elasticidade e do momento de inércia em todo comprimento da barra.

$$\chi = \dot{w}(x) \left(1 + \frac{1}{2} \dot{w}(x)^2 \right) \quad (9)$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\dot{w}(x)^2 + \dot{w}(x)^2 \dot{w}(x)^2 + \frac{1}{4} \dot{w}(x)^2 \dot{w}(x)^4 \right) dx \quad (10)$$

Sendo esta a expressão adotada para a energia interna de deformação.

Para elucidar o termo $-P\Delta$, pode-se escreve-lo, utilizando o teorema de Pitágoras, em termos do deslocamento axial originado apenas da flexão.

$$\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = \left(\frac{dx}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (11)$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - \sqrt{1 - \dot{w}(x)} \quad (12)$$

Observando que $\Delta = \int_0^L du$, e expandindo o termo na raiz, em séries de Taylor até a quarta ordem:

$$V_p = \int_0^L P \left(-\frac{1}{2} \dot{w}(x)^2 - \frac{1}{8} \dot{w}(x)^4 \right) dx \quad (13)$$

A esse ponto é conveniente notar que os termos podem ser reescritos para que se explorem as formas de solução. Revisitando as expressões, com algumas mudanças chave, o funcional de energia sob a ótica da inclinação ($\pi(s, \theta)$).

$$\pi = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\ddot{w}(x)^2 + \dot{w}(x)^2 \dot{w}(x)^2 + \frac{1}{4} \dot{w}(x)^2 \dot{w}(x)^4 \right) dx - \int_0^L \frac{1}{2} P \left(\dot{w}(x)^2 + \frac{1}{4} \dot{w}(x)^4 \right) dx \quad (14)$$

E também,

$$\pi(s, \theta) = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds + P \left\{ \int_0^L \cos \theta ds - L \right\} \quad (15)$$

Que é o funcional completo de energia para uma barra esbelta carregada.

Nota-se que, ao supor pequenas deformações ($\dot{w}^2 = 0$), forma-se o funcional de energia linear $\pi = \int_0^L \frac{1}{2} EI (\ddot{w}(x)^2) dx - \int_0^L \frac{1}{2} P (\dot{w}(x)^2) dx$.

Usar-se-á o mesmo princípio utilizado por Serebrenick (2004) na resolução dos funcionais. Este em específico adquire uma forma padrão $\int_0^L f(x, w, \dot{w}, \ddot{w}) dx$, para a qual, considerando pequenas rotações, a equação de Euler que define o problema é $f = \left\{ \frac{1}{2} EI (\ddot{w}(x)^2) - \frac{1}{2} P (\dot{w}^2) \right\}$, prosseguindo, obtêm-se.

$$\left(\frac{d^4 w(x)}{dx^4}\right) + \frac{P}{EI} \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2}\right) = 0 \quad (16)$$

Para grandes rotações, não há soluções analíticas que satisfaçam as equações lineares derivadas da solução do funcional. Isso se deve a sua alta complexidade, sendo necessário algum nível de aproximação, no presente trabalho usaremos o método de Rayleigh-Ritz como aproximação para o caminho pós crítico, como já foi mostrado por Serebrenick (2004).

A solução linear, do funcional de energia é da forma abaixo, onde as constantes são definidas a partir das condições de contorno do problema em questão.

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \text{sen}(\lambda \pi x) + C_4 \cos(\lambda \pi x) \quad (17)$$

Onde $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$. Retomando ao funcional em função da inclinação ($\pi(s, \theta)$), sua resolução se dá pela imposição da condição de estacionariedade, a saber $\delta^{(1)}\pi = 0$.

$$\delta^{(1)}\pi = \int_0^L \frac{1}{2} EI \frac{d\theta}{ds} \partial \left(\frac{d\theta}{ds}\right) ds + P \left\{ \int_0^L \text{sen}(\theta) \partial \theta ds - L \right\} = 0 \quad (18)$$

Integrando a primeira parte da equação por partes e expandindo a segunda, obteremos a expressão para o equilíbrio.

$$EI \frac{d^2 \theta}{ds^2} + P \text{sen}(\theta) = 0 \quad (19)$$

Que também está sujeita as condições de contorno usuais do problema.

Para o presente texto se usará as condições de contorno condizentes com uma barra engastada em sua extremidade, assim sendo suas condições de contorno são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{w}(L) = \beta \\ \ddot{w}(L) + \frac{Pw(L)}{EI} = 0 \\ w(0) = 0 \\ \dot{w}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

Onde o termo $\beta = \frac{M_0}{EI}$, refere-se a um momento aplicado no extremo da barra, com objetivo de modelar imperfeições na estrutura, assim sendo, exceto que se diga o contrário, assumiremos $M_0 = 0$, ou de dimensões suficientemente desprezíveis.

2.1 Solução analítica

Metodologia de solução originalmente proposta por Timoshenko (1985) dá-se através de integrais elípticas.

Tomando Eq. (19), sabemos que $\text{sen}\theta = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, daqui podemos fazer:

$$\left[\frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)\right] = -\lambda^2 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (21)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{d\theta}{ds}$, teremos:

$$\frac{d\theta^2}{ds} = 4\lambda^2 \left[m^2 - \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (22)$$

Onde m é uma constante arbitrária definida por $\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) = -m \text{sen} \psi$ e $m = \text{sen} \gamma$, pode se reescrever a equação acima em termo dos valores de m e ψ .

$$\frac{d\theta}{ds} = 2\lambda m \cos \psi \quad (23)$$

Para corretamente escrever a expressão em função de uma conveniente troca de variáveis, faz-se.

$$\frac{d}{ds} \left(\text{sen} \frac{\theta}{2} \right) = -\frac{d}{ds} (m \text{sen} \psi) = -m \frac{d}{ds} \text{sen} \psi \quad (24)$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{ds} = -m \cos \psi \frac{d\psi}{ds} \therefore \frac{1}{2} \sqrt{1 - m^2 \text{sen}^2 \psi} \frac{d\theta}{ds} = -m \cos \psi \frac{d\psi}{ds} \quad (25)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{-2m \cos \psi}{\sqrt{1 - m^2 \text{sen}^2 \psi}} \frac{d\psi}{ds} \quad (26)$$

Igualando os termos.

$$\lambda ds = -\frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \text{sen}^2 \psi}} \therefore \lambda \int_0^L ds = -\int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \text{sen}^2 \psi}} \quad (27)$$

Este último termo é classificado como Integral Elíptica Completa ou Incompleta de primeira Classe. Aproveita-se das condições de contorno supracitadas, para uma definição mais particular.

$$\theta_{s=0} = 0 \therefore -m \text{sen} \psi_0 = 0 \therefore \psi_{0s=0} = 0 \quad (28)$$

$$\lambda L = -\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \text{sen}^2 \psi}} \therefore \frac{P}{P_c} = -\frac{L_{ef}^2}{\pi^2 L^2} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \text{sen}^2 \psi}} \quad (29)$$

Com L_{ef} sendo o comprimento efetivo da barra e P_{cr} sendo a carga crítica de flambagem para o 1º Modo.

Para cálculo da deflexão máxima, que no caso ocorrerá com $s = L$, faz-se:

$$dw = \text{sen} \theta ds \therefore dw = 2 \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} ds \therefore dw = -m \text{sen} \psi \sqrt{1 - m^2 \text{sen}^2(\psi)} \quad (30)$$

Porém, $ds = -\frac{d\psi}{\lambda \sqrt{1 - m^2 \text{sen}^2 \psi}}$ daí:

$$\int_0^w dw = \frac{2m}{\lambda} \int_{\psi_0}^{\psi} \text{sen} \psi d\psi \therefore w = \frac{2m}{\lambda} [\cos \psi_0 - \cos \psi] \rightarrow w_{Máx} = \frac{2m}{\lambda} \quad (31)$$

De forma semelhante a usada para o cálculo do $w_{Máx}$, faz-se também para a posição da coordenada x , aproveitando-se da relação $dx = \cos \theta ds$, aproveitando-se das relações trigonométricas para escrever x em termos de $\text{sen} \theta$ e depois em termos de m e ψ . Assim obtêm-se.

$$x = -\frac{2}{\lambda} \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \psi} d\psi - L \therefore x_{\psi_0=0} = -\frac{2}{\lambda} \int_0^{\psi} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \psi} d\psi \quad (32)$$

O segundo termo da equação sendo um Integral elíptica Incompleta de 2ª Classe.

A partir das deduções, podemos traçar um gráfico da trajetória da coluna, utilizando de valores tabelados para as variáveis envolvidas (ver o ‘Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas’ de Murray R. Spiegel).

2.2 Método de Runge-Kutta

Por muitas das vezes, essa inclusive, a resposta numérica traz uma aproximação bastante próxima para a solução de problemas com forte não linearidade. Para a solução do caso da barra tomemos a Eq. (19) deduzida acima, aplicando as condições de contorno cabíveis obtemos o seguinte problema de contorno.

$$\begin{cases} EI \frac{d^2 \theta}{ds^2} + P \operatorname{sen}(\theta) = 0 \\ \theta_{s=0} = 0 \\ \dot{\theta}_{s=L} = \beta \end{cases} \quad (33)$$

Segundo Zill e Cullen (2001), o método de Runge-Kutta tem larga aplicação na resolução aproximada de equações diferenciais, para tanto o método se vale da determinação numérica das constantes apropriadas que satisfaçam a seguinte relação:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = h f(x_n, y_n) \\ k_2 = h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 = h f\left(x_n + h, y_n + k_3\right) \end{cases} \quad (34)$$

Vale salientar que a escolha de h e, portanto o nível de discretização da barra, estão diretamente relacionados à proximidade da solução exata bem como com a quantidade de iterações necessárias para convergir o resultado. Este método foi elaborado para aproximação de Problemas de Valor Inicial (PVI), assim, a priori, não se encaixando na descrição exata da nossa equação diferencial. Em vias de adaptar o método, se faz necessário transformar o problema em um problema de contorno, explicitando sua não-linearidade.

$$\begin{cases} EI \frac{d^2 \theta}{ds^2} + P \operatorname{sen}(\theta) = 0 \\ \theta_{s=0} = 0 \\ \dot{\theta}_{s=0} = M_k \end{cases} \quad (35)$$



XIII SIMMEC

Simpósio de Mecânica Computacional

29 de Outubro a 1º de Novembro de 2018
UFES - Campus Goiabeiras - Vitória, ES



Sendo o termo recém adicionando $M_k = \frac{M_l}{EI}$, e M_l o momento no engaste. O método Runge-Kutta, por ser um método de passo único, não lida bem com não linearidades. Para suprir essa falta, se faz necessário a aplicação de algum método iterativo. Iremos usar o método de Newton-Raphson seguindo o que foi previamente avaliado por Banerjee, Bhattacharya e Mallik (2007).

$$M_k = M_{k-1} - \frac{\text{erro}}{\frac{\partial}{\partial M}(\dot{\theta}_{s=L})} \quad (36)$$

Onde este erro é a diferença entre o $\dot{\theta}_{s=L}$ e o β citado acima na dedução do problema. Para casos onde não haja imperfeições na peça e com o carregamento completamente centrado, faz-se $\beta = 0$.

Para o cálculo do termo $\frac{\partial}{\partial M}(\dot{\theta}_{s=L})$, iremos montar outro sistema-solução baseado no método Runge-Kutta, porém como dessa vez se trata, desde já, de um problema de valor inicial, pode-se fazer uma aplicação direta do método.

A priori, vê-se que $\frac{\partial}{\partial M}(\dot{\theta}_{s=L})$ pode ser reescrito como $\frac{\partial \theta}{\partial M} = f_s \frac{\partial s}{\partial M} + f_\theta \frac{\partial \theta}{\partial M} + f_{\dot{\theta}} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial M}$, onde $\ddot{\theta} = f(s, \theta, \dot{\theta})$. Como M é independente de s , sua derivada vai ser nula, obtemos assim, uma equação de segunda ordem da forma.

$$\begin{cases} \ddot{\omega} = f_\theta \omega + f_{\dot{\theta}} \dot{\omega} \\ \omega_{s=0} = 0 \\ \dot{\omega}_{s=0} = 1 \end{cases} \quad (37)$$

A solução simultânea iterativa e incremental dessa equação nós dá a trajetória do caminho pós-crítico da barra.

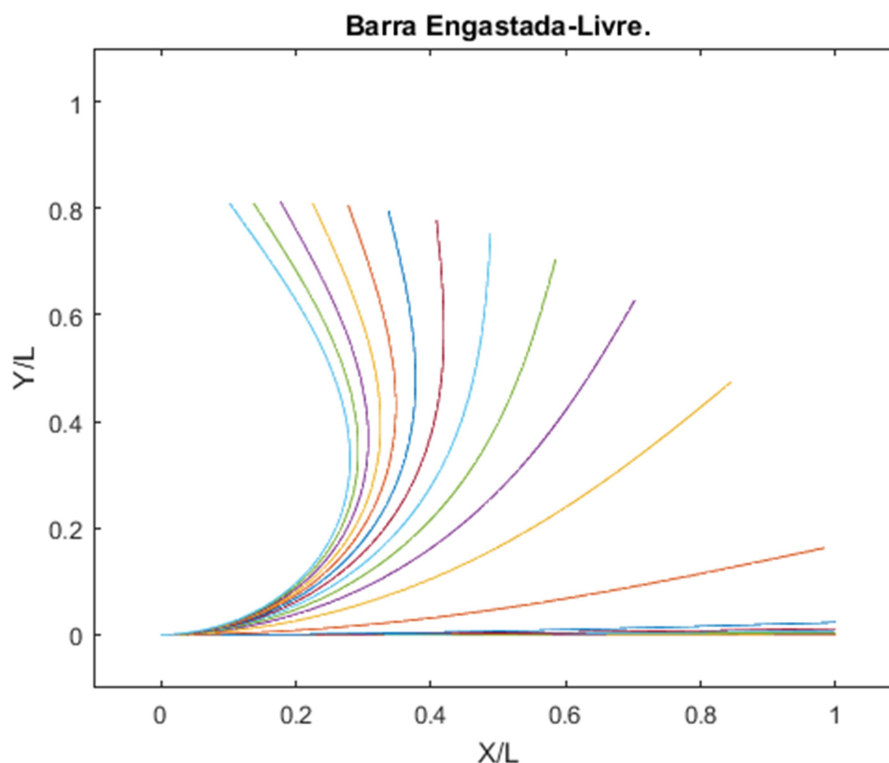


Figura 2 - Comportamento pós-crítico de uma barra engastada livre, pelo método de Runge-Kutta 4ª Ordem (RK4)

Fonte: (O próprio Autor)

2.3 Método de Rayleigh-Ritz

Como já foi dito, na solução do Funcional de energia não-linear as equações diferenciais geradas não tem solução analítica. Uma alternativa, que mostrou bons resultados em Serebrenick (2004) foi o método de Rayleigh-Ritz.

Consiste na aproximação da função de deslocamento por funções polinomiais do tipo $f_n = \sum_{j=1}^n A_j \phi_j$. Para que seja praticável, segundo Cook et al(2001), se usam apenas funções polinomiais e do tipo seno e cosseno. Outra imposição para aplicação do método é que a função f_n se atenha as condições de contorno.

Assim as soluções para o problema análogo, em sua ótica de pequenas rotações mostra-se adequada e de simples implementação para a aplicação neste texto.

Faz-se necessário solucionar primeiro o funcional linear valendo-se da Eq. (17) deduzida no capítulo anterior e das condições de contorno impostas.

Monta-se um sistema em forma matricial, contendo as condições de contorno e os coeficientes.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = \frac{\lambda^2 \pi^2 \cos(\pi \lambda)}{L^2}, \quad a_{14} = -\frac{\lambda^2 \pi^2 \sin(\pi \lambda)}{L^2}, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0, \\ a_{23} &= \frac{\lambda^3 \pi^3 \sin(\lambda \pi)}{L^3} - \frac{\lambda^4 \pi^4 \cos(\lambda \pi)}{L^4}, \quad a_{24} = -\frac{\lambda^3 \pi^3 \cos(\lambda \pi)}{L^3} - \frac{\lambda^4 \pi^4 \sin(\lambda \pi)}{L^4}, \quad a_{31} = 1, \quad a_{32} = 0, \\ a_{33} &= 1, \quad a_{34} = 0, \quad a_{41} = 0, \quad a_{42} = \frac{1}{L}, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = \frac{\lambda \pi}{L}. \end{aligned}$$

A solução trivial desse sistema, $\{C\} = 0$, é o caso da estrutura não deformada. O determinante da matriz gera a equação característica do sistema:

$$\det(A) = \frac{\lambda^5 \pi^5 (\cos^2(\lambda \pi) + \sin^2(\lambda \pi))}{L^6} \quad (39)$$

Fazendo $\det(A) = 0$ nós obtemos as cargas críticas para a configuração procurada. Seguindo o método de Serebrenick (2004), o estudo dos sinais do determinante para diversas cargas, com cuidadosa inspeção para os pontos de troca de sinal, nós dá um valor crítico da ordem de $\lambda_{cr} = 0,502833$, com erro da ordem de 10^{-5} .

Resolvendo o problema de autovalor e autovetor, obtêm-se os modos críticos de associados aos modos de flambagem. Estes autovetores devem ser normalizados. É importante ressaltar que esta forma não dá amplitude da deflexão, e sim sua forma, sendo assim, a equação base para essa forma deve ser também normalizada e multiplicada por um fator (η) simbolizando a amplitude da deflexão.

A equação de Rayleigh-Ritz utilizada, correspondente também à deflexão da barra por flambagem é $w(x) = \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\lambda \pi x}{L}\right)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ao usar essa expressão no funcional de energia a integral resultante para o balanço de energia se torna mais amena, sendo assim, possível aplicar a condição de estacionariedade, $\delta^{(1)}\pi = 0$.

Como a expressão para o funcional encontra-se normalizada, a derivação ocorre em função da sua amplitude η . Obtem-se a equação de equilíbrio não-linear da coluna, relacionando λ e η . Torna-se uma tarefa fácil traçar o caminho de deslocamento pós-crítico.

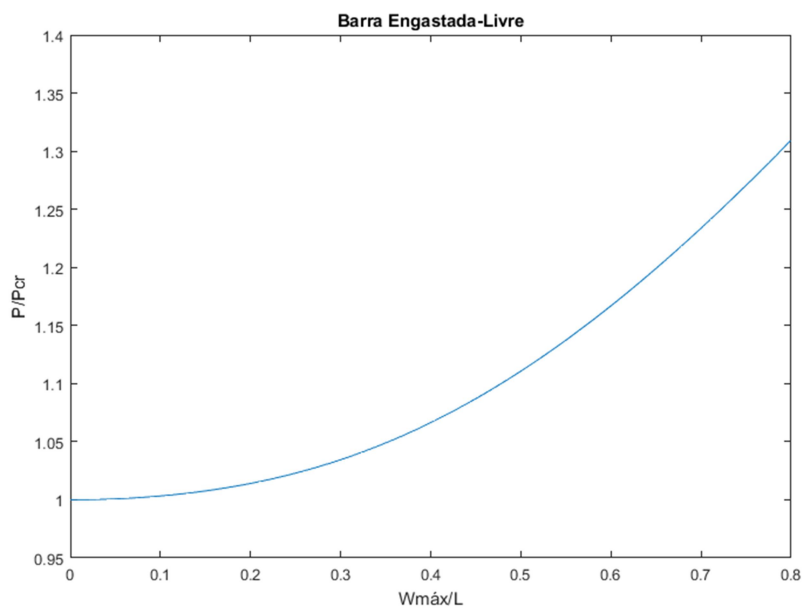


Figura 3 - Traçado do caminho pós-crítico barra engastada livre.

Fonte: (O próprio Autor)

Colocando todos os resultados sobrepostos em um gráfico, obtemos um comparativo sobre as zonas de precisão dos métodos estudados, atentando para que os métodos: analítico e Rayleigh-Ritz estão definidos para uma deflexão ocorrida após o a chegada da carga de crítica, sendo que até este patamar a barra não apresenta nenhuma deformação.

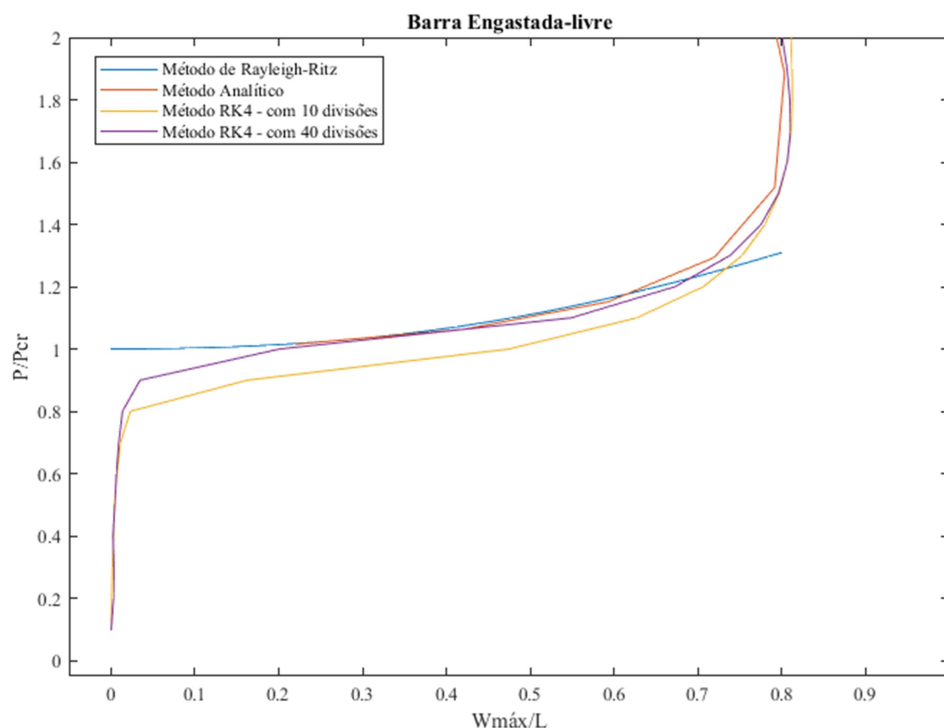


Figura 4 - Comparativo para todos os métodos estudados.

Fonte: (O próprio autor)

3 CONCLUSÃO

A grande dificuldade em se tratando de não linearidade é a formulação de um método automático de solução. Nos métodos analíticos, a solução é exata e exigem poucas aproximações, porém frequentemente se mostram de difícil e demorada solução, quando um método numérico traria mesmo benefício. No traçado pós-crítico, ainda há o problema do salto dinâmico corresponde à divisão das zonas de pequenas e grandes deformações.

O método analítico traz uma série de vantagens, entre elas a precisão acurada dos resultados obtidos. Como desvantagem, sua dificultosa formulação e o trato com as integrais elípticas, tornam sua implementação computacional pouco vantajosa em vista os métodos iterativos que se apresentam atualmente e mesmo nesse artigo.

O método Runge-Kutta tem fácil implementação, porém com alto custo computacional. Com a adequada discretização é possível modelar com facilidade as zonas de salto dinâmicos moderados, ficando ainda a desejar quanto ao controle quando em uma região específica que porventura venha necessitar de maior atenção.

A aproximação no método de Rayleigh-Ritz mostra-se interessante quando para a modelagem em regiões imediatamente após a carga crítica, perdendo o sentido quanto



ao comportamento não linear em todo o caminho da barra. A simplificação para pequenas rotações, faz o caminho de comportamento da barra ser dividido em duas etapas, uma pós-crítica e uma elástica, na qual não ocorrem deformações na barra.

Ambos se mostram métodos competitivos e até complementares, em se tratando da região da barra estudada, como alternativa ao complexo método que é o analítico.



REFERÊNCIAS

Banerjee, A.; Bhattacharya, B.; Mallik, A.K. Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: Analytical and numerical approaches. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, [S.l.], v. 43, n. 6, p. 366-376, jun. 2008. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746208000048?via%3Dihub>>. Acesso em: 01 set. 2018.

Cook, R. D. et al. *Concepts and applications of a finite element analysis*. 4ª. ed. New Jersey: Hamilton P.C., 2001. 719 p.

Galvão, A.S. *Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado. Ouro Preto: UFOP, 2000. 241.

Serebrenick, G. 2004. *Análise da estabilidade de colunas esbeltas parcialmente enterradas em uma fundação elásticas não-linear*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)- PUC – Rio.

Silveira, R. A. M. et al. Aplicação de um Elemento Finito Híbrido Não-Linear na Modelagem de Estruturas Metálicas. *REM*, 2012: 19-28.

Timoshenko, S. P. & Gere, J. E. *Theory of Elastic Stability*. 2ª. New York: McGraw-Hill, 1963. Janeiro: LTC, 1983.

Zill, D. G.; Cullen, M. R. *Equações Diferenciais*. 3ª. ed. [S.l.]: Pearson, 2001. 434 p. v. 2.