ANÁLISE FRACTAL E DE MEMÓRIA DE LONGO ALCANCE NO MERCADO DE CACAU: UMA ABORDAGEM USANDO GRAFOS DE VISIBILIDADE

Priscila Coutinho Miranda[1]; Roberto Luiz Souza Monteiro[2]; Thiago Barros Murari[3]
[1] Mestra em Microbiologia Agrícola, Universidade SENAI CIMATEC e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano (IF Baiano), pcoutinhomiranda@yahoo.com.br, 0000-0002-0874-9097.
[2] Doutor em Difusão do Conhecimento, Universidade do Estado da Bahia (UNEB) e Universidade SENAI CIMATEC, roberto.monteiro@fieb.org.br, 0000-0002-3931-5953
[3] Doutor em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial, Universidade SENAI CIMATEC, thiago.murari@fieb.org.br, 0000-0001-5598-2679.

RESUMO

Este estudo analisa os mercados de cacau de Nova York e Londres por meio do Grafo de Visibilidade Natural (VG), utilizando 11.963 observações diárias em cada mercado, no período de 1980 a 2026. As distribuições de grau apresentam regiões aproximadamente lineares em escala log-log, com expoentes $\alpha = 1{,}970$ para Nova York ($R^2 = 0{,}952$) e $\alpha = 1{,}952$ para Londres ($R^2 = 0{,}942$). A relação entre aglomeração e grau apresenta coeficientes angulares $\beta_1 = -0{,}4204$e $-0{,}4367$, respectivamente. Os resultados evidenciam padrões estruturais semelhantes entre os dois mercados.

PALAVRAS-CHAVE: Séries Temporais; Grafos de Visibilidade; Mercado de Cacau; Redes Complexas.

1 INTRODUÇÃO

O cacau se destaca como uma das commodities críticas do comércio global, sendo o insumo primário não apenas para a indústria alimentícia e de bebidas, com destaque para o chocolate, mas também essencial para os setores farmacêutico, cosmético e de cuidados com a pele. Conforme destacado por Skorbiansky e Camp (2025)[1], a globalização permitiu uma forte dissociação espacial entre produção e consumo, criando uma dependência profunda de importação em grandes mercados consumidores, como os Estados Unidos. No entanto, o mercado de cacau vem enfrentando pressões sem precedentes que justificam estudos aprofundados sobre a sua dinâmica de preços. As mudanças climáticas têm alterado fundamentalmente as condições de cultivo dessa lavoura, cujas restrições biológicas, como o longo ciclo de vida das árvores, dificultam a adaptação rápida aos estressores ambientais. Essa vulnerabilidade produtiva culminou em uma disparada dramática e persistente nas cotações internacionais recentemente, tornando imprescindível o uso de ferramentas matemáticas avançadas para modelar o risco e entender a resiliência dessas cadeias de suprimento.[1]

Neste cenário, a análise de séries temporais financeiras tem evoluído significativamente com o advento de métodos provenientes da econofísica e da teoria de redes complexas. Em especial, o mercado de commodities, caracterizado por sua alta volatilidade e co-movimentos com fatores macroeconômicos e climáticos[2], exige ferramentas sofisticadas para capturar dependências de longo alcance e propriedades fractais. O entendimento das flutuações e dinâmicas desses ativos é vital para decisões estratégicas, alocação de portfólios e gestão de risco.[3,4]

Nesse contexto, o algoritmo de Grafo de Visibilidade (Visibility Graph, VG), introduzido por Lacasa et al. (2008)[5], mapeia uma série temporal em um grafo, preservando a estrutura original dos dados na topologia da rede. Sob essa ótica, séries periódicas se tornam grafos regulares, séries aleatórias se tornam grafos com distribuição de grau exponencial, e séries fractais são mapeadas em redes com distribuição de grau em lei de potência.

Esta pesquisa tem como objetivo investigar a aplicabilidade do Grafo de Visibilidade Natural em duas importantes bases de dados do mercado de commodities: os preços do cacau negociados em Nova York e em Londres. O estudo busca quantificar a memória de longo prazo do mercado por meio da estimativa do expoente de Hurst e comparar a hierarquia modular das redes obtidas com estudos recentes aplicados a índices de grãos e sementes oleaginosas.

2 METODOLOGIA

Neste estudo, foram utilizadas séries temporais dos preços de fechamento diários do cacau nas bolsas de Nova York e Londres, abrangendo o período de 02 de janeiro de 1980 a 01 de maio de 2026 (https://br.investing.com/). Esse vasto intervalo histórico totaliza 11.963 observações de dias de negociação para cada mercado. O método de análise fundamenta-se no algoritmo de VG[5]. Resumidamente, dois valores de uma série temporal têm visibilidade, tornando-se nós conectados no grafo associado, se for possível traçar uma linha reta entre eles que não seja interceptada por nenhum dado intermediário.

Após a conversão das séries temporais em grafos, é avaliada a distribuição de graus $P(k)$, que representa a probabilidade de um nó da rede apresentar grau k. Quando a distribuição apresenta comportamento compatível com uma lei de potência, pode ser representada por $P(k) \sim k^{-\alpha}$, em que α é o expoente de escala. Neste trabalho, α é estimado por meio de uma regressão linear pelo método dos mínimos quadrados aplicada aos logaritmos de $P(k)$e k, considerando a região aproximadamente linear da representação log-log.

Adicionalmente, foi analisada a relação entre o coeficiente de aglomeração local c_ie o grau do nó k_i. De acordo com a metodologia adotada na análise do Grains and Oilseeds Index (GOI)[4], essa relação foi avaliada por meio de uma regressão linear na forma $\ln(c_i) = \beta_0 + \beta_1 \ln(k_i)$. O coeficiente angular $\beta_1$caracteriza a dependência do coeficiente de aglomeração em relação ao grau dos nós, permitindo comparar a organização estrutural das redes de cacau com aquela observada para outros ativos agrícolas.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

As redes resultantes do mercado de cacau em Nova York e Londres apresentaram 11.963 nós, contendo 104.639 e 130.046 arestas, respectivamente. A topologia das redes foi inicialmente investigada por meio das distribuições empíricas de grau (P(k)). A Figura 1 apresenta essas distribuições em escala log-log para os mercados de Nova York e Londres, respectivamente. Observa-se uma região aproximadamente linear em ambos os casos, enquanto desvios da linearidade são identificados principalmente para graus baixos e na região de cauda extrema. Para quantificar o comportamento nessa região de escala, o ajuste linear foi restrito ao intervalo em que a relação entre P(k) e k apresenta comportamento aproximadamente linear.

Para o mercado de Nova York, o ajuste realizado no intervalo $5 \leq k \leq 272$ resulta em $\alpha = 1{,}970$, com $R^2 = 0{,}952$. Para Londres, o ajuste no intervalo $5 \leq k \leq 265$ resulta em $\alpha = 1{,}952$, com $R^2 = 0{,}942$. Esses resultados indicam uma relação aproximadamente linear entre $\log P(k)$ e $\log k$ nas regiões selecionadas, com expoentes próximos entre os dois mercados. Entretanto, os valores de R^2 e os p-values associados à regressão linear devem ser interpretados como medidas da qualidade e da significância do ajuste linear, respectivamente, e não como testes formais da hipótese de que a distribuição de graus segue uma lei de potência.

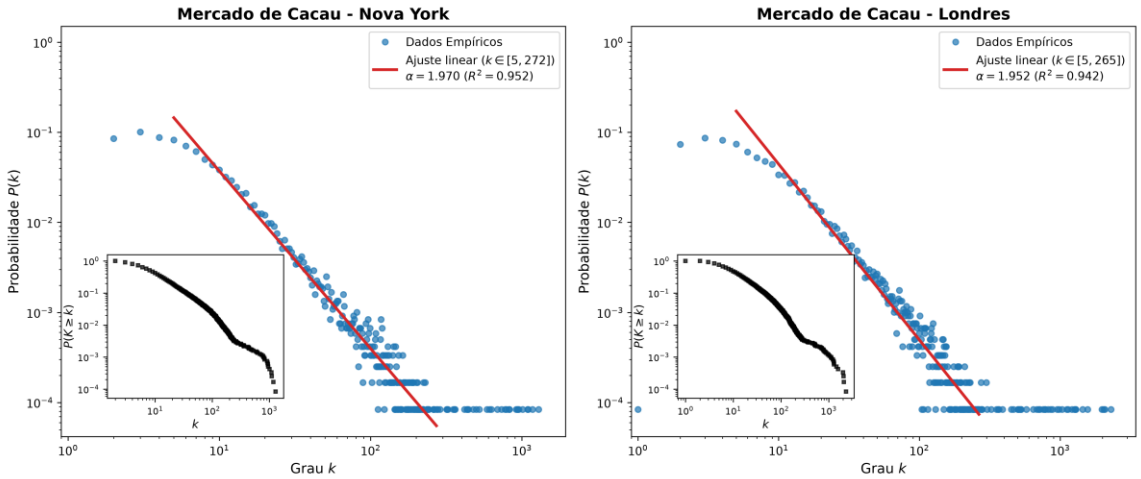


Figura 1. Distribuições de grau empíricas P(k) para os mercados de Nova York (esquerda) e Londres (direita), evidenciando a região de escala aproximadamente linear com o ajuste de regressão linear restrito. A figura interna apresenta a respectiva Função Distribuição Acumulada Complementar empírica P(K ≥ k).

A Tabela 1 compara os expoentes α obtidos para as distribuições de grau das redes de cacau com os valores reportados por Liu et al. (2024)[4] para as redes associadas ao Grains and Oilseeds Index (GOI). Para as redes de cacau, os expoentes foram estimados por regressão linear na região aproximadamente linear da representação log-log, resultando em $\alpha = 1{,}970$ para Nova York e $\alpha = 1{,}952$ para Londres. Esses valores são próximos aos expoentes reportados por Liu et al. para o Trigo ($\alpha = 1{,}9638$) e o IGC GOI ($\alpha = 2{,}0310$). Em comparação com o Arroz ($\alpha = 2{,}5994$), os valores obtidos para o cacau são menores. Sob a interpretação de um modelo de lei de potência, valores menores de αestão associados a uma maior contribuição relativa da região de graus elevados; entretanto, essa comparação deve ser interpretada com cautela, uma vez que os expoentes apresentados foram obtidos por procedimentos de ajuste distintos.

Tabela 1. Comparativo do expoente α.

Série	α	**Intervalo do ajuste**	R^2
IGC GOI	2,0310	—	—
Trigo	1,9638	—	—
Milho	1,3027	—	—
Soja	1,0001	—	—
Arroz	2,5994	—	—
Cevada	1,4707	—	—
Cacau NY	1,970	5–272	0,952
Cacau Londres	1,952	5–265	0,942

Aplicando a relação teórica $H = (3 - \alpha)/2$ aos expoentes estimados nas regiões aproximadamente lineares, obtêm-se $H \approx 0{,}515$ para Nova York e $H \approx 0{,}524$ para Londres. Esses valores são próximos de $H = 0{,}5$, indicando que, segundo essa relação teórica aplicada aos expoentes estimados, os dois mercados apresentam comportamento próximo ao associado ao passeio aleatório. Essa interpretação deve ser considerada indicativa, uma vez que o expoente α foi obtido a partir de uma região aproximadamente linear da distribuição de graus e não de um teste formal de aderência a uma distribuição em lei de potência.

Para aprofundar a análise, foram avaliados os parâmetros da regressão $\ln(c_i) = \beta_0 + \beta_1 \ln(k_i)$, para as redes de cacau, e seus resultados foram comparados com aqueles apresentados por Liu et al. (2024)[4] para os índices de grãos e sementes oleaginosas (Tabela 2).

A relação entre o coeficiente de aglomeração local e o grau dos nós também foi investigada por meio do ajuste $\ln(c_i) = \beta_0 + \beta_1 \ln(k_i)$. Para o mercado de Nova York, obtiveram-se $\beta_1 = -0{,}4204$, $R^2 = 0{,}9001$ e $r = -0{,}9487$. Para Londres, foram obtidos $\beta_1 = -0{,}4367$, $R^2 = 0{,}9353$ e $r = -0{,}9671$. Os coeficientes angulares são próximos aos observados por Liu et al. (2024)[4] para trigo, soja e para o IGC GOI, indicando comportamento semelhante na relação entre aglomeração e grau.

A correlação negativa observada nos dois mercados indica que o coeficiente de aglomeração tende a diminuir à medida que o grau aumenta. Esse comportamento pode ser consistente com uma organização hierárquica da conectividade da rede, na qual nós com maior grau apresentam, em média, menor coeficiente de aglomeração. Em comparação com os índices analisados por Liu et al. (2024)[4], os mercados de cacau apresentam coeficientes β_0 mais elevados, sugerindo diferenças no nível geral da relação entre aglomeração e grau, embora a interpretação desse deslocamento deva ser feita considerando as diferenças entre os mercados e as séries analisadas.

Tabela 2. Comparativo dos resultados do ajuste $\ln(c_i) = \beta_0 + \beta_1 \ln(k_i)$.

Série	β0	β1	R^2	r	p-value
IGC GOI	0.2508	-0.4192	0.9305	-0.9650	<0.001
Trigo	0.2492	-0.4101	0.9488	-0.9743	<0.001
Milho	0.2606	-0.4262	0.9085	-0.9536	<0.001
Soja	0.2529	-0.4249	0.9123	-0.9556	<0.001
Arroz	0.1566	-0.3015	0.9285	-0.9640	<0.001
Cevada	0.2476	-0.3978	0.9348	-0.9672	<0.001
Cacau NY	0.4976	-0.4204	0.9001	-0.9487	<0.001
Cacau Londres	0.6055	-0.4367	0.9353	-0.9671	<0.001

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo evidenciou que o algoritmo de Visibility Graph (VG) constitui uma ferramenta adequada para a caracterização topológica de séries temporais financeiras. A aplicação do método aos mercados de cacau de Nova York e Londres permitiu representar as séries temporais como redes complexas e analisar suas propriedades estruturais.

Em conjunto, os resultados mostram que os grafos de visibilidade dos mercados de cacau apresentam características estruturais não triviais. As distribuições de grau exibem regiões aproximadamente lineares na representação log-log, com expoentes semelhantes para Nova York e Londres. A relação entre o coeficiente de aglomeração e o grau dos nós apresenta coeficientes angulares negativos e elevada correlação linear, indicando uma redução do coeficiente de aglomeração à medida que o grau aumenta. Além disso, para o mesmo número de nós, a rede de Londres apresenta maior densidade de conexões que a rede de Nova York. Esses resultados evidenciam padrões estruturais semelhantes entre os dois mercados. Entretanto, os ajustes lineares realizados na região aproximadamente linear devem ser interpretados como uma caracterização do comportamento de escala observado nos dados, não sendo suficientes, isoladamente, para estabelecer que as distribuições de grau seguem uma lei de potência estrita.

Dessa forma, a análise por VG fornece uma representação complementar das características estruturais das séries temporais dos mercados de cacau, permitindo comparar propriedades como distribuição de graus, relação entre aglomeração e conectividade e densidade das redes. Os resultados obtidos reforçam a utilidade da abordagem para a análise comparativa de mercados financeiros, mantendo uma interpretação compatível com as limitações dos procedimentos de ajuste empregados.

.

Agradecimentos

Agradeço a um amigo do trabalho que me inspirou a iniciar meus estudos com Grafos de Visibilidade. Seu comentário foi “Seriam os Cientistas de Redes astronautas?”. Agradeço a FAPESB (Processo PIE0007/2022) e a Universidade SENAI CIMATEC.

Declaração sobre o uso de IA generativa e tecnologias assistidas por IA no processo de preparação do manuscrito

Durante a preparação deste trabalho, os autores utilizaram a plataforma Google Antigravity com o objetivo de gerar o código em Python e testar os cenários. Após o uso dessa ferramenta, os autores revisaram e editaram o conteúdo conforme necessário, assumindo total responsabilidade pelo conteúdo do artigo publicado.

5 REFERÊNCIAS

1. SKORBIANSKY, Sharon Raszap; CAMP, Kevin M. Hot cocoa prices soar toward the boiling point. **Choices: The Magazine of Food, Farm, and Resource Issues**, v. 41, n. 1, p. 1-9, 2026. DOI: 10.22004/ag.econ.393796. Disponível em: https://www.choicesmagazine.org/choices-magazine/submitted-articles/hot-cocoa-prices-soar-toward-the-boiling-point. Acesso em: 10 ago. 2026.
2. FLORI, Andrea; PAMMOLLI, Fabio; SPELTA, Alessandro. Commodity prices co-movements and financial stability: a multidimensional visibility nexus with climate conditions. **Journal of Financial Stability**, v. 54, p. 100876, 2021. DOI: 10.1016/j.jfs.2021.100876.
3. WANG, F.; TIAN, L.; DU, R.; DONG, G. Universal law in the crude oil market based on visibility graph algorithm and network structure. **Resources Policy**, v. 70, p. 101961, 2021. DOI: 10.1016/j.resourpol.2020.101961.
4. LIU, Hao-Ran; LI, Ming-Xia; ZHOU, Wei-Xing. Visibility graph analysis of the grains and oilseeds indices. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 650, p. 130004, 2024. DOI: 10.1016/j.physa.2024.130004.
5. LACASA, Lucas; LUQUE, Bartolo; BALLESTEROS, Fernando; LUQUE, Jordi; NUÑO, Juan Carlos. From time series to complex networks: the visibility graph. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 105, n. 13, p. 4972-4975, 2008. DOI: 10.1073/pnas.0709247105.
6. LACASA, Lucas; LUQUE, Bartolo; LUQUE, Jordi; NUÑO, Juan Carlos. The visibility graph: a new method for estimating the Hurst exponent of fractional Brownian motion. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 86, n. 3, p. 30001, 2009. DOI: 10.1209/0295-5075/86/30001.