



## **NÃO PRECISA MAIS PROCURAR AGULHA EM PALHEIRO: EXPERIMENTO DA AGULHA DE BUFFON EM CONSTRUÇÕES DO GEOGEBRA.**

Anthony Vasconcelos<sup>1</sup>

### **Resumo**

Este estudo tem como objetivo analisar a contribuição dos materiais didáticos do site GeoGebra, referentes ao experimento da agulha de Buffon, ao ensino e à aprendizagem da probabilidade. Para isso, realizamos uma busca no site GeoGebra por materiais abrangendo esse experimento, selecionando os que respeitavam alguns critérios previamente elencados. Verificamos que os materiais selecionados permitem simular computacionalmente o experimento da agulha de Buffon com muita eficiência ao utilizar diversas representações visuais, operando com um enfoque frequentista para o cálculo das probabilidades e, portanto, apresentando um elevado potencial para o ensino e a aprendizagem desta área.

**Palavras-chave:** ensino de matemática; probabilidade frequentista; probabilidade geométrica; simulação computacional; GeoGebra.

### **Introdução**

Não é possível tratar de uma formação integral sem considerar os fenômenos aleatórios. Um cidadão que não reconheça eventos advindos do acaso (sem causa que justifique os resultados) não estará preparado para lidar com situações de incerteza envolvendo tomada de decisões, riscos e níveis variados de confiança. Por esta razão, a teoria das probabilidades precisa estar presente nos currículos da Educação Básica desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Mas não basta apenas discutir alguns problemas sobre acaso e incerteza. É fundamental que o ensino de Matemática oportunize aos estudantes operar com os diferentes significados da probabilidade (BATANERO, 2005) e mobilizar os diferentes elementos que os tornem letrados probabilisticamente (GAL, 2005).

Segundo Batanero, há cinco significados para a probabilidade: o intuitivo, sobre as primeiras ideias intuitivas que surgem em situações de aleatoriedade, expressas pelo uso de expressões coloquiais; o clássico (ou laplaciano), sobre a quantificação

---

<sup>1</sup> Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

de uma probabilidade pela razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos; o frequentista, sobre a quantificação de uma probabilidade pela frequência relativa de casos favoráveis em um experimento com muitas repetições; o subjetivo, sobre a revisão e atualização de probabilidades após a inserção de um novo ponto de vista, descrevendo o grau de crença do sujeito acerca do acontecimento de um determinado evento; e o axiomático, sobre compreender a probabilidade como um modelo matemático construído sobre axiomas (BATANERO, 2005).

Nessa direção, a história da matemática apresenta frutíferas situações para discutir noções de qualquer conteúdo da Matemática (BRASIL, 2018), e não seria diferente com a probabilidade e seus diferentes significados. Algumas noções sobre a probabilidade já haviam surgido na história, mas foi apenas pelas cartas trocadas entre os matemáticos Pascal e Fermat, em 1654, que se deram os primeiros avanços significativos no desenvolvimento da Teoria das Probabilidades. Passando pelas notáveis contribuições de Christiaan Huygens, Jacob Bernoulli, Pierre-Simon Laplace, Abraham de Moivre, Carls Friedrich Gauss, Thomas Bayes, entre outros, hoje nossa visão sobre a aleatoriedade adquiriu um raio de abrangência tão extenso que atingiu a teoria científica da mecânica quântica, totalmente construída a partir dos pressupostos da probabilidade.

Citamos o grande potencial para o ensino e a aprendizagem da probabilidade no famoso “problema dos pontos”, sobre soluções envolvendo mera proporcionalidade serem insuficientes para fenômenos aleatórios, e no também conhecido “paradoxo de D’Alembert”, ou erro de D’Alembert, sobre equiprobabilidade de espaços amostrais. Entretanto, debruçamo-nos sobre outro extrato da história da probabilidade que pode oferecer substanciais contribuições à aprendizagem deste campo: o experimento da agulha de Buffon, sobre um enfoque frequentista para quantificar probabilidades e, cuja cereja do bolo é nada mais, nada menos, que uma estimativa para  $\pi$ . George-Louis Leclerc, o conde de Buffon, foi um matemático e naturalista francês do século XVIII. Buffon propôs o jogo *Franc Carreau*, que versava sobre o lançamento de uma moeda em um piso ladrilhado com lajotas iguais (que podiam possuir qualquer formato). A aposta consistia em acertar a posição que a

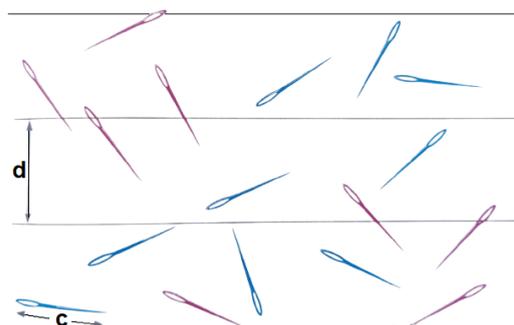
moeda assumiria após o lançamento, entre ficar completamente na região interior de uma única lajota (quando ocorria o *Franc Carreau*) e a possibilidade de cruzar os limites entre duas lajotas (QUEIROZ; COUTINHO, 2007).

Similarmente ao feito no *Franc Carreau*, em 1733 Buffon realizou um experimento, mas desta vez utilizando agulhas: caso uma agulha caia em meio a uma série de linhas paralelas equidistantes, o que se pode afirmar sobre a probabilidade de que cruze uma destas linhas? O experimento da agulha de Buffon, como ficou popularizado, foi um dos cálculos inaugurais de probabilidades (WARSI, 2020) e a utilização de elementos geométricos para este cálculo nos estudos de Buffon, configuram-no como pioneiro no desenvolvimento da probabilidade geométrica.

Buffon conseguiu, por meio do experimento com agulhas, obter uma aproximação para o número real  $\pi$  ( $\pi$ ). Ele verificou que, deixando cair, muitas vezes, uma agulha de comprimento  $c$  sobre uma série de linhas paralelas equidistantes a uma distância  $d$  ( $d \geq c$ ), se a proporção de vezes que a agulha cruzou uma das linhas em relação ao total de tentativas (frequência relativa) foi  $p$ , então  $p$  era uma aproximação para a probabilidade de a agulha cruzar uma das linhas (tão melhor quanto maior o número de tentativas) e uma estimativa para  $\pi$  poderia ser dada por

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{c}{dp} = 2 \cdot \frac{\text{comprimento da agulha}}{\text{distância entre as linhas}} \cdot \frac{\text{número total de tentativas}}{\text{número de agulhas que cruzam}}$$

Figura 1 – Experimento da agulha de Buffon.



Fonte: Warsi (2020)

Uma vez que “estudos de simulação tentam reproduzir num ambiente controlado o que se passa com um problema real” (BUSSAB; MORETTIN, 2002, p. 231), surge o interesse nas simulações computacionais para reproduzir o experimento da agulha de Buffon com estudantes da Educação Básica. Para isso, consideramos as

construções do ambiente GeoGebra com este fim, dado o potencial deste para o ensino e a aprendizagem de tópicos da Matemática. Portanto, o objetivo deste estudo é analisar a contribuição dos materiais didáticos do site GeoGebra, referentes ao experimento da agulha de Buffon, ao ensino e à aprendizagem da probabilidade.

### **Metodologia**

A presente pesquisa, com abordagem qualitativa e caráter descritivo e exploratório, analisou parte das construções disponibilizadas no site GeoGebra<sup>2</sup>. Utilizando o descritor “Buffon” na aba de pesquisa da plataforma e aplicando o filtro “Qualquer tipo de material”, entre os resultados, selecionamos aqueles que estivessem de acordo com os seguintes critérios de inclusão: 1) Não possuir erros conceituais, ambiguidades ou *bugs* (falhas) na programação; 2) Apresentar um *layout* de fácil compreensão e manipulação pelos estudantes; 3) Realizar, dinamicamente, o cálculo das estimativas para a probabilidade e para  $\pi$ ; e 4) Ser fundamental que os estudantes manipulem os valores e participem do experimento. Em seguida, listamos os materiais selecionados e descrevemos o funcionamento de algumas atividades, nas quais identificamos, entre todas, um conjunto de elementos e características que se mostraram um diferencial durante as simulações. Por meio destas atividades, refletimos sobre as potencialidades destas construções para o ensino e a aprendizagem da probabilidade.

### **Resultados e discussão**

A busca no site GeoGebra utilizando o descritor “Buffon” apresentou 92 resultados. Dentre estes, havia arquivos idênticos postados pelo mesmo autor ou por autores diferentes (a política do site permite que cópias sejam realizadas). Entretanto, apenas seis materiais envolviam o experimento da agulha de Buffon e estavam em conformidade com os critérios previamente adotados. O Quadro 1 lista estes materiais. Identificamos uma grande quantidade de arquivos com construções muito similares, mesmo texto de apoio e mesma programação, variando apenas alguns elementos do design, como as cores. A hipótese é de que foram fruto de uma atividade coletiva em algum curso formativo. Para estes trabalhos, selecionamos apenas um único material para indicar no Quadro 1: o *Buffon*, de Miguel Ángel.

---

<sup>2</sup> <https://www.geogebra.org/>

Quadro 1 – Trabalhos selecionados.

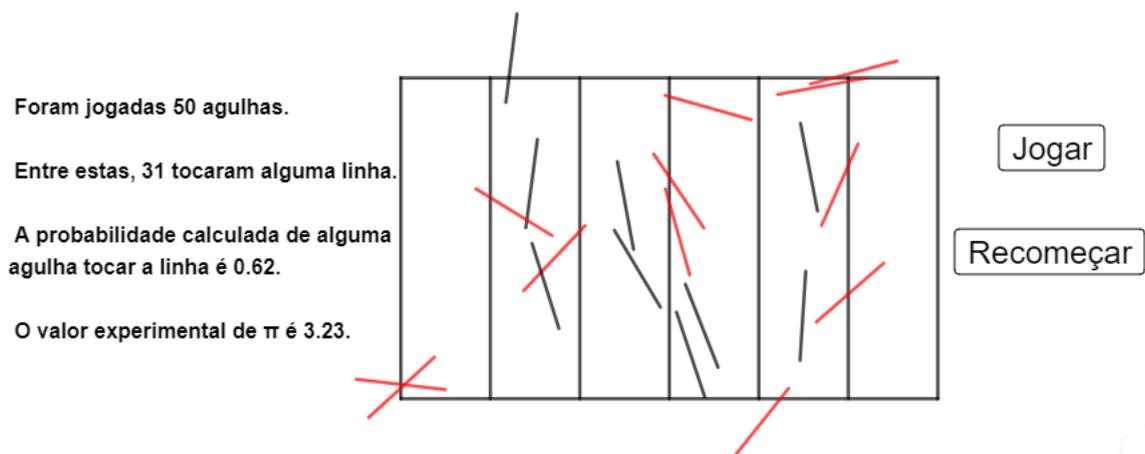
Título	Link de acesso	Autoria	Data da Postagem
Agujas de Buffon	<a href="https://www.geogebra.org/m/aajuGzxw">https://www.geogebra.org/m/aajuGzxw</a>	Minor Rojas Garcia	08/08/2013
Simulation lancers d'aiguilles de Buffon	<a href="https://www.geogebra.org/m/F5FNe6RQ">https://www.geogebra.org/m/F5FNe6RQ</a>	Nicolas ERDRICH	14/12/2013
La aguja de Buffon	<a href="https://www.geogebra.org/m/zFueEU2f">https://www.geogebra.org/m/zFueEU2f</a>	Sebas Tirapu	09/05/2016
Aguja Buffon	<a href="https://www.geogebra.org/m/MKDvk7v5">https://www.geogebra.org/m/MKDvk7v5</a>	ismaelsolanomora	17/04/2018
Buffon	<a href="https://www.geogebra.org/m/mhfnGEJH">https://www.geogebra.org/m/mhfnGEJH</a>	Miguel Ángel	17/05/2018
Agulha de Buffon	<a href="https://www.geogebra.org/m/eh6pwzcu">https://www.geogebra.org/m/eh6pwzcu</a>	ExpoMat EACH	22/05/2022

Fonte: O autor (2023)

Dos seis materiais selecionados, apenas um é em português: o *Agulha de Buffon*, da ExpoMat EACH. Entretanto, o fato dos demais materiais estarem em outro idioma não compromete as experimentações. Todos os seis materiais permitem o cálculo da probabilidade de a agulha cruzar uma das linhas por um enfoque frequentista, pois “se baseia na estabilidade das frequências relativas e no fato de podermos, hipoteticamente, repetir um experimento várias vezes” (BUSSAB; MORETTIN, 2002, p. 121). O cálculo destas probabilidades ocorre de maneira dinâmica, assim como o simulador calcula, simultaneamente, uma aproximação para  $\pi$ .

Dentre os seis materiais, destacamos dois: o *Agulha de Buffon*, da ExpoMat EACH (Figura 2) e o *Agujas de Buffon*, de Minor Rojas Garcia (Figura 3). A simulação da ExpoMat EACH, além de ser totalmente em português, apresenta um design simples e agradável, indicando as estimativas de forma objetiva e diferenciando as agulhas que cruzam e as que não cruzam as linhas com cores diferentes (Figura 2).

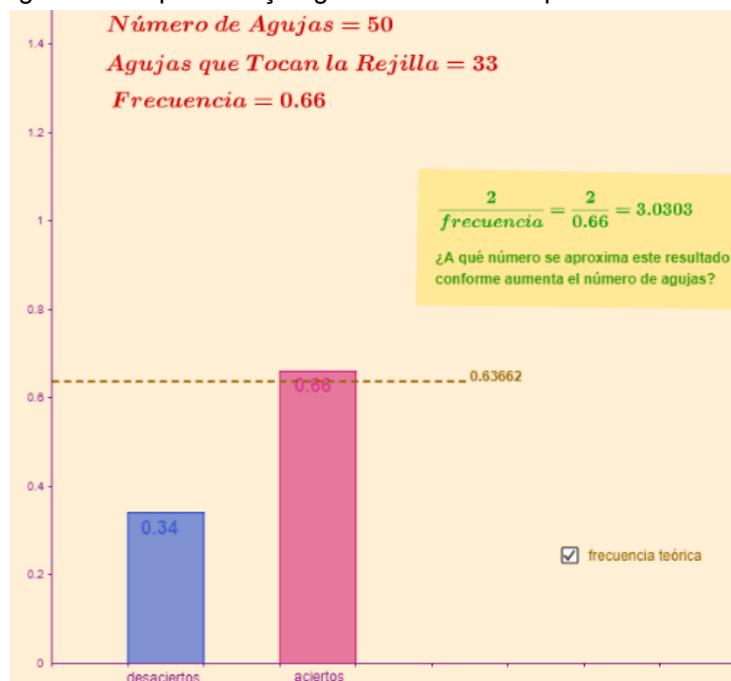
Figura 2 – Simulação computacional do experimento da agulha de Buffon.



Fonte: O autor (2023)

A simulação de Minor Rojas Garcia apresenta como diferencial um gráfico de colunas para as frequências relativas de acertos (agulhas que cruzam as linhas) e desacertos (agulhas que não cruzam as linhas), permitindo uma excelente representação visual. Possui também a possibilidade de exibir a frequência teórica de acertos esperada (para quando o comprimento da agulha e a distância entre as linhas é a mesma), ou seja,  $\frac{2}{\pi} \approx 0,63662$ .

Figura 3 – Representação geométrica das frequências relativas.



Fonte: O autor (2023)

### Conclusões

Todos os materiais identificados operam com o significado frequentista da probabilidade por meio de simulações computacionais, possibilitando a ampliação das compreensões sobre o acaso e a aleatoriedade inerentes ao lançamento das agulhas e expandindo as noções sobre a probabilidade. Estes materiais têm muito a contribuir ao ensino e à aprendizagem da probabilidade, desde que empregados adequadamente pelos professores e professoras. Um dos produtos deste trabalho é um quadro com acesso direto a seis destes materiais, resultados de uma curadoria minuciosa realizada no site GeoGebra. Esperamos, por meio desse quadro e das reflexões tecidas, contribuir com o planejamento e a execução das aulas dos professores e das professoras que ensinam Matemática.

Além disso, o cálculo das estimativas para o valor de  $\pi$  se configura como uma curiosidade a mais para o estudante, podendo despertar ainda mais o seu interesse pelo experimento. Aponta, também, para as interseccionalidades entre diferentes campos da Matemática, como a probabilidade e a geometria, coerente com o fato de Buffon ter sido precursor nos estudos de probabilidade geométrica.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

- BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Relime**, México, v. 8, n. 3, p. 247 – 263, jul./set. 2005. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2096616>. Acesso em: 26 out. 2021.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_sit\\_e.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_sit_e.pdf). Acesso em: 26 out. 2021.
- BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2002.
- GAL, I. Towards ‘probability literacy’ for all citizens. In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2005, p.43-71. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/227065116\\_Towards\\_Probability\\_Literacy\\_for\\_all\\_Citizens\\_Building\\_Blocks\\_and\\_Instructional\\_Dilemmas](https://www.researchgate.net/publication/227065116_Towards_Probability_Literacy_for_all_Citizens_Building_Blocks_and_Instructional_Dilemmas). Acesso em: 03 set. 2022.
- QUEIROZ, C.; COUTINHO, S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?. **REVEMAT-Revista Eletrônica de Matemática**, v. 2, n. 1, p. 50-67, 2007. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/24767/>. Acesso em: 10 fev. 2023.
- WARSI, K. (ed.). **O livro da matemática**. 1.ed. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.