ALGORITMO QUÂNTICO PARA A SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Lucas Queiroz Galvão[1]; JOÃO Marcelo Silva Souza[2]
[1] Bolsista; Iniciação Tecnológica – SENAI CIMATEC; lucas.queiroz@fbter.org.br
[2] Centro Universitário SENAI CIMATEC; Salvador-BA; joao.marcelo@fieb.org.br

RESUMO

Resolver sistemas lineares de equações é importante em diversas áreas da ciência e tecnologia, mas os algoritmos clássicos têm limitações em termos de complexidade computacional. Por isso, a pesquisa busca implementar algoritmos quânticos, como o HHL, que aceleram a solução de sistemas lineares. O HHL usa operações conhecidas na Computação Quântica, como Preparação de Estado, Estimativa de Fase Quântica e Rotação Controlada, o que permite uma aceleração exponencial. No entanto, o ruído em computadores quânticos impede que o HHL seja aplicado corretamente em curto prazo. O objetivo deste relatório de pesquisa é discutir as vantagens do HHL e analisar os resultados obtidos ao implementá-lo usando o pacote de desenvolvimento de softwares quânticos MyQLM e o supercomputador para simulação quântica KUATOMU para resolver sistemas de equações lineares.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas de Equações Lineares; Algoritmo Quântico; HHL.

1. INTRODUÇÃO

O avanço da tecnologia da computação permitiu a resolução de diversos problemas científicos e comerciais de forma mais simples devido à capacidade de processamento dos computadores modernos. No entanto, a desaceleração no seu desenvolvimento é uma possibilidade devido à inconsistência na Lei de Moore e à impossibilidade de reduzir o tamanho dos transistores[1]. Por outro lado, a Computação Quântica tem mostrado resultados promissores na superação dessas limitações[2,3]. Como exemplo, é possível destacar o desenvolvimento de algoritmos quânticos para acelerar a execução de tarefas em comparação com algoritmos clássicos, sendo o Algoritmo de Grover[4] e o Algoritmo de Shor[5] os mais famosos.

O algoritmo quântico desenvolvido por Harrow, Hassidim e Lloyd (2009), doravante chamado de Algoritmo HHL[6], é também um exemplo de algoritmo promissor na área, demonstrando uma aceleração exponencial na resolução de sistemas lineares ($Ax = b$) se comparado com os métodos clássicos. O HHL pode executar essa tarefa com complexidade $poly\ (log\ N,\ K)$ em comparação com a complexidade clássica de $O(N\sqrt{k})$, sendo N o número de equações lineares e k o número de condições para a matriz A, que pode ser calculado a partir da razão entre o maior e o menor autovalor dela. Outro fator de destaque do algoritmo HHL é usado em diversas aplicações de pesquisa, como máquinas vetoriais de suporte quântico, sistemas de recomendação quântica e limitação de valor singular quântico[7].

Atentando-se a essas potencialidades, o presente trabalho tem o objetivo de descrever a aplicação do algoritmo HHL para resolver conjuntos simples de equações lineares, explorando suas operações lógicas e executando-o no simulador do pacote para construção de softwares quânticos MyQLM e no supercomputador para simulação quântica KUATOMU do SENAI CIMATEC. Como resultado da pesquisa, o trabalho apresenta as operações lógicas e a aplicação do algoritmo em um exemplo numérico.

2. METODOLOGIA

A pesquisa foi desenvolvida através da implementação e execução do algoritmo HHL no computador local com o MyQLM e no supercomputador KUATOMU via SSH. O projeto foi realizado inteiramente de forma remota com o auxílio do computador. A etapa inicial do projeto concentrou-se no estudo de aspectos mais gerais da Computação Quântica, seguida pelo estudo do Algoritmo HHL em uma perspectiva de alto nível. Os trabalhos mais relevantes foram selecionados através da busca no Google Acadêmico usando as seguintes palavras-chave: HHL algorithm, linear systems e Quantum Computing. Para a implementação do código, foram essenciais os tutoriais da IBM[8] e dos artigos encontrados[6,7], além das ferramentas computacionais do Anaconda Navigator para a utilização do python em conjunto com o Jupyter Notebook. Assim, o produto final da pesquisa foi a execução do algoritmo utilizando um exemplo numérico a partir da biblioteca do QLM.

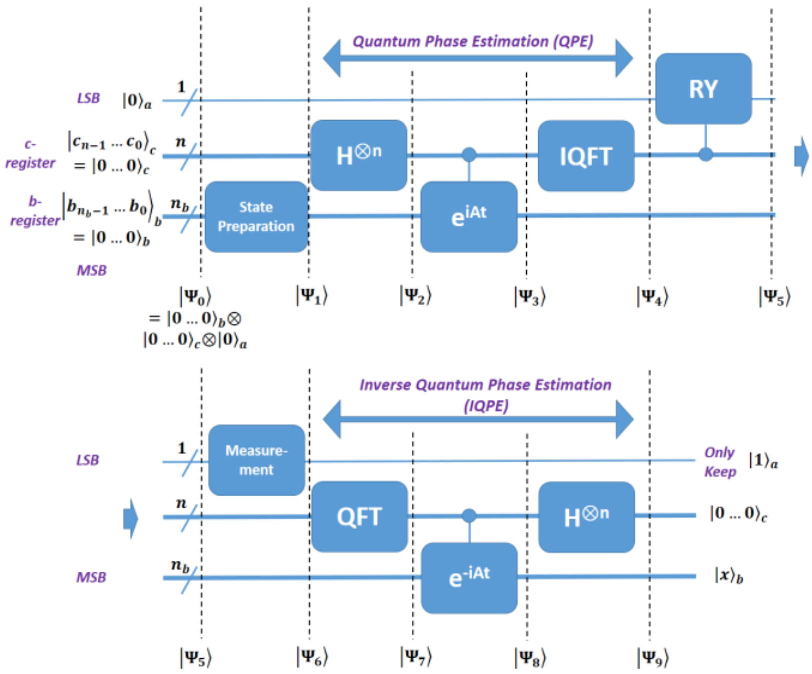
3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um sistema equações lineares pode ser representado pela igualdade entre o produto interno de uma matriz *A* com um vetor de componentes desconhecidas *x* e um vetor com as componentes conhecidas *b*, de modo que $Ax = b$. Como o resultado de interesse é o vetor *x*, temos que $x = A^{-1}b$. Assim, podemos representar tal equação como uma combinação linear dos autovalores (λ^{-1}_i) e autovetores (u_i) de *A* e o vetor *b* escrito na base de *A* (b_i):

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_i |u_i\rangle \tag{1}$$

Esse é o resultado buscado pelo HHL, sendo n_b o número de qubits que representam o vetor *b*. Para tanto, o algoritmo realiza um conjunto de operações quânticas já conhecidas na literatura[2,6,7] para a sua obtenção, tais quais: (i) Preparação de Estado (*State Preparation*) do vetor *b*, (ii) Estimação de Fase Quântica (Quantum Phase Estimation) para o cálculo dos autovalores da matriz *A*, (iii) Rotação Controlada e Medida do Qubit-Ancila e (iv) Estimação de Fase Quântica Inversa (Inverse QPE - IQPE) para a obtenção do resultado aproximado do vetor desejado.

Figura 1 - Representação do Circuito do Algoritmo HHL.



Fonte: Morrell e Wong (2021).

Na Figura 1, é possível visualizar o circuito do algoritmo, organizado do qubit menos significativo ao mais significativo (cima para baixo). Nela, estão presentes o qubit responsável por armazenar o valor de *b* e, posteriormente, o valor de *x* denominados de *b-qubits;* o qubit responsável por armazenar os autovalores da matriz *A* denominados *clock-qubits*; e o qubit ancila, responsável por fazer a rotação controlada no circuito[7].

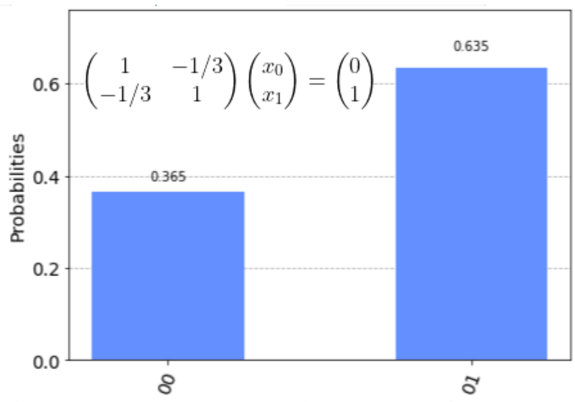
Com isso, temos o seguinte resultado analítico do circuito acima:

$$|\Psi_9\rangle = \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{\sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} |\frac{b_j C}{\lambda_j}|^2}} |x\rangle_b \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} |0\rangle_c^{\otimes n} |1\rangle_a \tag{3}$$

Sendo *C* uma constante associada à probabilidade do qubit ancila ser 1. Assim, descritas as etapas do algoritmo, será realizada a apresentação de um exemplo numérico, comumente encontrado na literatura, tendo em vista a sua facilidade em ser aplicado. Para fins de simplicidade, será abordado um circuito *2x2 (N=2)*, o que nos permite trabalhar com apenas 1 qubit para armazenar os valores das duas componentes de *b*. Segue abaixo as informações do sistemas, sendo (4) o valor analítico esperado pela aplicação do algoritmo e a Figura 2 o resultado obtido após a execução do circuito no KUATOMU:

$$|\Psi_9\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}(|0\rangle + 3|1\rangle)|00\rangle|1\rangle \tag{4}$$

Figura 2 – Resultado do algoritmo obtido no KUATOMU.



Desse modo, o valor obtido pelo HHL se mostra uma boa aproximação para o valor teórico da primeira componente de *x* no qubit *00*. Como sabemos que a segunda componente é igual a três vezes a primeira (4), também é possível obtermos um valor uma aproximação para a mesma, $x_2 = 3x_1 = 1{,}095$. Outrossim, o segundo qubit dá um valor proporcional a x_2, já que $x_2 = 2\,clock_2$. Logo, esses se mostram resultados promissores para a resolução do sistema.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em suma, o algoritmo quântico HHL para a resolução de sistemas lineares demonstra uma aceleração exponencial na resolução desses sistemas se comparado aos métodos clássicos, o que é fundamental para diversas aplicações científicas e comerciais. Além disso, o HHL tem se mostrado uma ferramenta promissora para a solução de uma variedade de problemas em áreas como máquinas vetoriais de suporte quântico, regressão linear quântica, sistemas de recomendação quântica, limitação de valor singular quântico, entre outras. Com a crescente evolução da computação quântica e a possibilidade de execução de algoritmos quânticos em processadores quânticos reais, o HHL tem sido objeto de estudos e pesquisas em diferentes instituições ao redor do mundo, demonstrando sua importância na pesquisa científica e tecnológica.

5. REFERÊNCIAS

[1] SINGH, Jasmeet; SINGH, Mohit. Evolution in quantum computing. In: 2016 **International Conference System Modeling & Advancement in Research Trends (SMART)**. IEEE, 2016. p. 267-270.
[2] NIELSEN, M.; CHUANG, I. **Quantum computation and quantum information**. 2002.
[3] Koch, D., Patel, S., Wessing, L., & Alsing, P. M. (2021). **Fundamentals in Quantum Algorithms**: A Tutorial Series using Qiskit Continued. arXiv preprint arXiv:2109.05748.
[4] GROVER, Lov K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. **Physical review letters**, v. 79, n. 2, p. 325, 1997.
[5] SHOR, Peter W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. **SIAM review**, v. 41, n. 2, p. 303-332, 1999.
[6] HARROW, Aram W; HASSIDIM, Avinatan; LLOYD, Seth (2008). "Quantum algorithm for solving linear systems of equations". **Physical Review Letters**. 103 (15): 150502.
[7] MORRELL JR, Hector Jose; WONG, Hiu Yung. Step-by-Step HHL Algorithm Walkthrough to Enhance the Understanding of Critical Quantum Computing Concepts. **arXiv preprint arXiv**:2108.09004, 2021.
[8] IBM Q. **Solving Linear Systems of Equations using HHL**. [S. l.], 2020. Disponível em: https://qiskit.org/textbook/ch-applications/hhl_tutorial.html. Acesso em: 24 mar. 2022.