

Utilizando o GeoGebra 3D como Ferramenta Tecnológica no Ensino Aprendizagem de Funções de Duas Variáveis

Ramina Samoa Silva Camargo¹, Kelen Gomes de Souza²

¹Faculdade Martha Falcão – Wyden
Manaus - AM, 69057-090

²Universidade do Amazonas - Parfor

{raminasamoa, kelen.souza3103}@gmail.com

Abstract. *This paper deals with an experience involving activities that were carried out in engineering and computer science courses in the calculus II discipline of the Center for Analysis and Technological Innovation and Research - FUCAPI in Manaus. These activities can be analyzed in order to analyze the functions of two variables using GeoGebra 3D software as a teaching and learning tool. The result of the experiment contributed to the students' interest in the construction of graphs, as well as allowing interconnected applications linked to algebraic development and its calculations, helping to improve the performance of the study studied and contributing to more diversified and specific classes.*

Resumo. *Este artigo aborda a experiência envolvendo atividades que foram realizadas nos cursos de engenharia e ciências da computação na disciplina de cálculo II da Fundação Centro de Análise e Pesquisa e Inovação Tecnológica – FUCAPI em Manaus. Essas atividades tiveram como objetivo analisar as funções de duas variáveis utilizando o software GeoGebra 3D como ferramenta de ensino e aprendizagem. O resultado do experimento contribuiu para o interesse dos alunos na construção de gráficos, bem como, possibilitou interligar aplicações atreladas ao desenvolvimento algébrico e seus cálculos, garantindo melhor compreensão do conteúdo estudado e contribuindo para que as aulas ficassem mais diversificadas e interessantes.*

1 Introdução

Este relato de experiência apresenta o uso do GeoGebra 3D na versão Clássico 5 como ferramenta de estudo na disciplina de cálculo II cuja ementa se constitui em estudar as funções de várias variáveis no conjunto dos números reais. Essa componente curricular é eletiva para os cursos das engenharias e ciência da computação no segundo período na Fundação Centro de Análise e Pesquisa e Inovação Tecnológica – FUCAPI, instituição de ensino superior localizada na cidade de Manaus no Estado do Amazonas.

O ensino da matemática nos últimos anos vem se constituindo em um grande desafio para os professores, esse desafio é pautado na resistência que os alunos vêm apresentando a cada ano. Para Lorenzato (2006) os conceitos matemáticos de espaço, número e forma devem ser mostrados de diferentes maneiras aos alunos com o objetivo de desenvolver diversos processos mentais básicos para a aprendizagem matemática. Dentre esses processos, destacam-se a correspondência, a comparação e a classificação.

2 Desenvolvimento

2.1 Ensino de Matemática e as Tecnologias como Ferramentas de Ensino Aprendizagem

Segundo Nasser (2000) a teoria dos Van-Hiele apresenta cinco níveis de aprendizado: reconhecimento das formas, análise comparativa, argumentação lógica formal, dedução das demonstrações e estabelecimento formal de teoremas. De acordo com essa teoria, o processo de ensino passa a ser efetivo quando é seguida a sequência listada anteriormente. E dessa forma o discente irá expandir seu conhecimento partindo da observação informal das figuras e evoluindo até entender os sistemas axiomáticos da Geometria.

Conforme Piaget (1967) comenta, todo conhecimento é ligado à ação de conhecer um objeto ou evento e assimilá-lo a um esquema de ação. Isto é verdade do mais elementar nível sensorio motor ao mais elevado nível de operações lógico-matemáticas.

Para Gravina e Santarosa (1998) salientam em sua pesquisa que no decorrer dos anos, as tecnologias digitais aplicadas em sala de aula vem contribuindo para ressignificar o ensino das ciências e têm evoluído e se tornado uma excelente ferramenta para o professor. Gravina e Santarosa (1998) analisaram a contribuição dos ambientes informatizados na aprendizagem matemática, verificando que nesses ambientes as ferramentas dos softwares demonstravam grande potencial frente aos obstáculos atrelados ao processo de aprendizagem. A grande vantagem é a possibilidade de alterar os limites entre o concreto e o formal. Nessa pesquisa Hebenstrein (1987) destaca que “o computador permite criar um novo tipo de objeto – os objetos ‘concretos-abstratos’. Concreto porque existe na tela do computador e abstrato por se tratar de realizações feitas a partir de construções mentais”. Logo a utilização dessas ferramentas produziu excelente resultado. Fato observado de imediato quando a ferramenta foi utilizada em consonância com o conteúdo ministrado.

Estudantes de todos os níveis de escolaridade, como bem se sabe, apresentam dificuldades de aprendizagem nos conteúdos matemáticos. Encontramos na literatura estudos que buscam entender as razões dessas dificuldades e, ao mesmo tempo, procuram encontrar alternativas para o ensino desses conteúdos (CURY, 2007; POCHULU, 2004; FERREIRA & BRUMATTI, 2009). Uma possível resposta para esse baixo nível de desempenho é a falta de interesse dos alunos. Isso se estende aos estudantes de cálculo. Uma vez que o conteúdo é trabalhado de forma exageradamente teórica, com poucas aplicações práticas, o aluno é conduzido ao desinteresse, não conseguindo visualizar e assimilar uma finalidade para o assunto. A partir disso, estes discentes sentirão dificuldades para resolver problemas práticos de outras disciplinas, uma vez que a importante ferramenta do cálculo não foi contemplada de uma maneira

que despertasse neles o entendimento correto de como aplicar esse conhecimento. O aluno conhece a ferramenta, porém não sabe como utilizá-la de maneira prática.

O avanço tecnológico ocorrido nas últimas décadas tem pressionado a sociedade e, em especial, o setor educacional, a promover transformações no processo de ensino, de modo a preparar cidadãos capazes para enfrentar os desafios da nova realidade (TAJRA, 2008).

As primeiras experiências com o uso de computadores na educação apareceram em meados da década de 50, limitando-se a atividades relacionadas ao armazenamento de informações em uma determinada sequência, para posteriormente, transmiti-las ao aluno (VALENTE, 1999).

O ensino de Cálculo que é uma disciplina chave do núcleo básico em matemática nos cursos de engenharia e ciência da computação, mas apesar disto, nota-se que há um distanciamento entre o conteúdo ensinado em sala de aula e sua aplicação na prática, causando certa dificuldade na aprendizagem do conteúdo, uma vez que segundo Celestino (2000), a álgebra linear e cálculo introduzem uma linguagem e um raciocínio abstrato com os quais os alunos que estudam pela primeira vez não estão acostumados a lidar.

Portanto, a utilização do software GeoGebra 3D como instrumento utilizado em sala de aula está respaldada com as ideias desenvolvidas nos parágrafos anteriores. Esse software foi desenvolvido para proporcionar aos estudantes a sensação de um instrumento real, contribuindo com o processo cognitivo da aprendizagem.

O nome GeoGebra emergiu da aglutinação das palavras Geometria e Álgebra. É um software de matemática dinâmica que combina conceitos de Geometria e Álgebra em uma única interface. Sua distribuição é livre, nos termos da *General Public License* (GNU), desenvolvido em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. Dentre as ferramentas que o software proporciona como recurso pode-se destacar: tabelas, gráficos, probabilidades, estatísticas e cálculo simbólicos em um único ambiente.

Uma característica importante do GeoGebra 3D é que todo elemento geométrico construído na janela de visualização tem sua representação algébrica mostrada na janela de Álgebra, assim como toda representação algébrica de um elemento na caixa de entrada tem a representação geométrica na janela de visualização.

2.2 Funções de duas Variáveis

O propósito dessa seção é apresentar brevemente as definições das ferramentas estudadas em Cálculo de funções de duas variáveis.

As funções de várias variáveis podem ser aplicadas em várias situações do nosso cotidiano, como por exemplo: para calcular volumes (determinar o volume de uma piscina); estimar derramamentos de óleo em corpos d'água; calcular a pressão de um determinado gás; calcular as variações de preço de algum produto; entre outros. Reconhecer que o cálculo no que se refere à organização de dados e obtenção de informações facilita o trabalho desempenhado nos eixos científicos e tecnológicos. Encontra-se assim, em diversos eixos profissionais a necessidade de competências matemáticas adequadas. Uma delas, muito utilizada nos mais variados meios de

produção científica e tecnológica, é a aplicação do Cálculo diferencial e Integral. As definições e exemplos estão conforme Lima (2009) cita no livro Cálculo de várias variáveis.

2.3 Funções de duas variáveis

Definição 3.1.1 Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa cada par ordenado de números reais (x, y) de um subconjunto D do \mathbb{R}^2 , um único número real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o *domínio* de f e a sua *imagem* é o conjunto dos valores possíveis de $f(x, y)$, ou seja, $\{f(x, y) : (x, y) \in D\}$. O gráfico de f é o conjunto de pontos do \mathbb{R}^3 dado por $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$ e ele representa uma superfície no espaço. Se f for dada por uma fórmula e seu domínio não for especificado, estará implícito que ele é o conjunto de todos os (x, y) para os quais a regra está bem definida, no sentido que ela nos dê um número real.

Exemplo 3.1 Encontre o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{x + y}$.

Solução Como a função raiz quadrada só está definida para números reais não negativos devemos ter $x + y \geq 0$, o que geometricamente é a região do plano xy que está acima a reta $y = -x$, incluindo a própria reta.

O gráfico de uma função $f(x, y)$ é uma superfície que representa o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (domínio) e $z = f(x, y)$ (Figura 1).

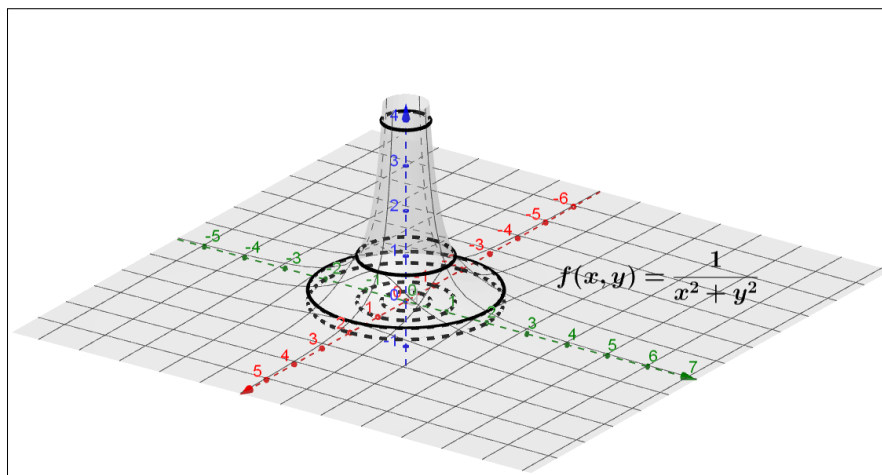


Figura 1. Exemplo de representação gráfica da função $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

Fonte: Próprio autor, 2018.

Gráficos nos fornecem uma maneira de visualizarmos funções de duas variáveis. Uma outra maneira de visualizarmos tais funções é desenhar suas curvas de nível, as quais serão definidas abaixo.

Definição 3.1.2 Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis e k um número real. O conjunto de pontos (x, y) no domínio de f para os quais $f(x, y) = k$ é chamado de uma *curva de nível* de f . Ela contém os pontos do domínio de f para os quais o gráfico de f tem altura k . Ao esboçarmos a curva de nível no plano xy , devemos associar a ela o seu correspondente valor de k .

Exemplo 3.2 As curvas de nível da função $f(x, y) = x^2 + y^2$, são as curvas $x^2 + y^2 = k$, onde $k \geq 0$. Devemos ter $k \geq 0$, pois $x^2 + y^2 \geq 0$. As curvas de níveis são circunferências

concêntricas na origem de raios \sqrt{k} . Quando $k = 0$, a curva de nível degenera-se no ponto $(0, 0)$.

Definição 3.1.3 Se f é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções f_x e f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

e

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Resumindo, embora tenhamos introduzido um conceito novo, sob o ponto de vista operacional, não há nada de novo. Mais precisamente, para calcularmos $f_x(x, y)$, na expressão de $f(x, y)$ olhamos para y como se fosse uma constante e calculamos a derivada de uma função de uma variável apenas, ou seja, da variável x . De maneira análoga, o problema de calcular $f_y(x, y)$ reduz-se ao cálculo da derivada de uma função apenas da variável y , ou seja, na expressão de $f(x, y)$ tratamos x como se fosse uma constante.

Em resumo, podemos interpretar as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ como sendo os coeficientes angulares das retas T_1 e T_2 , que são as tangentes às curvas obtidas pelas interseções de S com os planos $y = b$ e $x = a$, respectivamente, no ponto $(a, b, f(a, b))$ (Ver Figura 2).

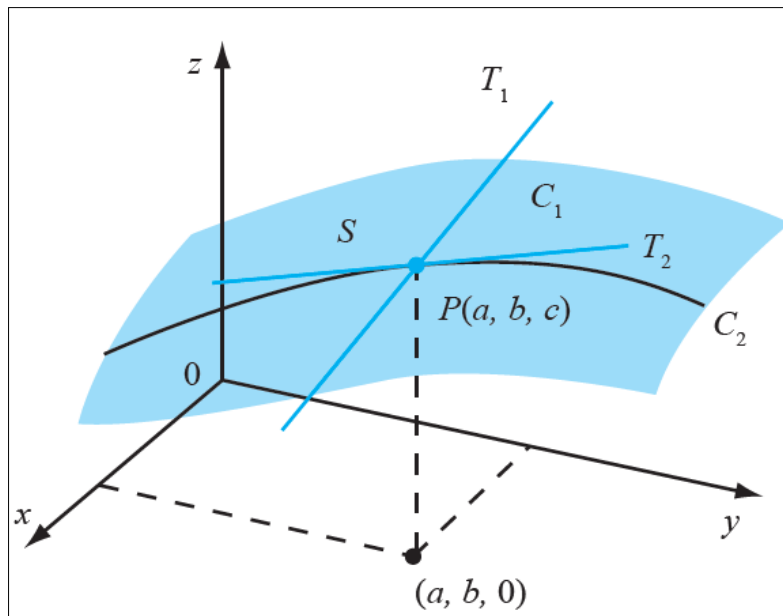


Figura 2. Interpretação geométrica das derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$
 Fonte: Próprio auto, 2018.

3 Metodologia

Primeiramente o professor que ministra disciplina de cálculo I e II planeja o curso utilizando o software GeoGebra iniciando os trabalhos com uma breve revisão das funções no espaço bidimensional e com a ferramenta de Janela de Visualização em 3D

expandiu-se todos os gráficos das funções em uma variável real para o espaço tridimensional. Esse primeiro contato com o software teve como objetivo principal a ambientação dos estudantes com o software, escolhendo primeiramente as funções polinomiais por serem as mais elementares e depois as funções transcendentais. Cada classe foi dividida em grupos de quatro alunos e cada grupo ficou responsável por apresentar as funções polinomiais e suas características gráficas iniciando com as de grau zero e chegando até as funções racionais, após esse momento de ambientação com o software deixou-se que os estudantes utilizassem sua criatividade. Também nessa atividade pediu-se toda a sequência de comandos utilizada na construção do material, bem como as dificuldades encontradas com o software.

Uma das atividades motivadoras feitas como os discentes foi de construir alguns gráficos de funções utilizando o comando Controle Deslizante fazendo com que a atividade se torna dinâmica, pois, a observação da variação dos valores dos coeficientes nas funções utilizando o comando animar, possibilitou uma melhor análise do comportamento das funções.

No segundo momento do experimento os estudantes sob os comandos orientados pelo docente, inicia o estudo das funções de várias variáveis e como no GeoGebra 3D existe a possibilidade de apresentar simultaneamente, a função de duas variáveis na Janela de Visualização 3D bem como a representação do domínio de uma função de duas variáveis na Janela de Visualização 2D e também sua representação algébrica na Janela de Álgebra, o docente incentiva os discentes a refazerem o estudo das funções de várias variáveis realizados em sala de aula utilizando o software na sala do laboratório de informática, ressignificando todo o aprendizado, conforme apresentado na Figura 3.



Figura 3. Representação gráfica de uma função de duas variáveis e seu domínio
Fonte: Próprio autor, 2018.

Essa ressignificação do aprendizado foi desenvolvida nos laboratórios de informática da Fucapi com objetivo geral estudar as funções de duas variáveis e objetivos específicos: determinar o conjunto domínio de uma função de duas variáveis, desenhar o gráfico do domínio, plotar a superfície da função de duas variáveis no \mathbb{R}^3 .

Uma das atividades propostas no laboratório utilizado o software foi de fazer o estudo do gráfico da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, primeiramente realizando os cálculos das derivadas parciais e o determinar a equação do plano tangente ao gráfico no ponto $(1, 1, f(1, 1))$ no caderno e depois mostrar utilizando as ferramentas do Geogebra, na Figura 4 mostra uma das respostas feitas pelos discentes.

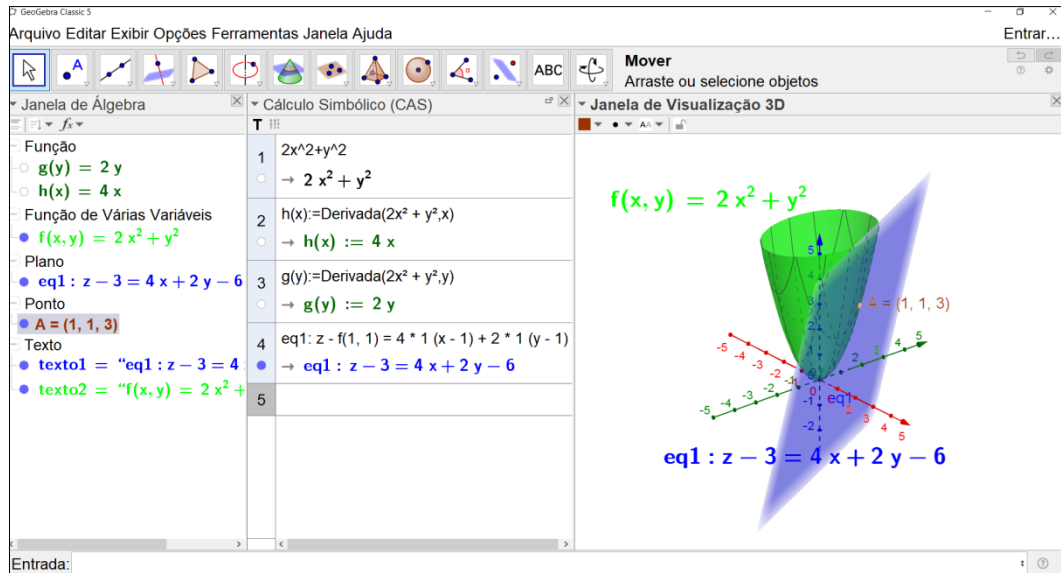


Figura 4. Representação gráfica de uma função de duas variáveis e plano tangente no ponto dado.

Fonte: Próprio autor, 2018.

A primeira dificuldade exposta pelos estudantes foi com relação a sintaxe relacionada a escrita do conjunto, pois para alguns estudantes era uma forma de escrita nova, necessitando de alguns contatos para ocorrer a apropriação da linguagem. Utilizamos o comando inserir texto e selecionamos o comando Fórmula LaTeX (uma linguagem matemática utilizada na escrita de textos matemáticos), que no decorrer da aula com algumas orientações do docente a respeito da sintaxe do LaTeX foi solucionada.

Na proposta da atividade de construção das curvas de nível da função $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Sugerimos que os alunos esboquem as curvas de níveis para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$. Na Figura 5 mostra uma das respostas que o discente desenvolveu utilizando o Geogebra 3D. Observamos também que fizeram o uso das opções de Propriedades, como mudança de cor para cada curva de nível e superfície da função.

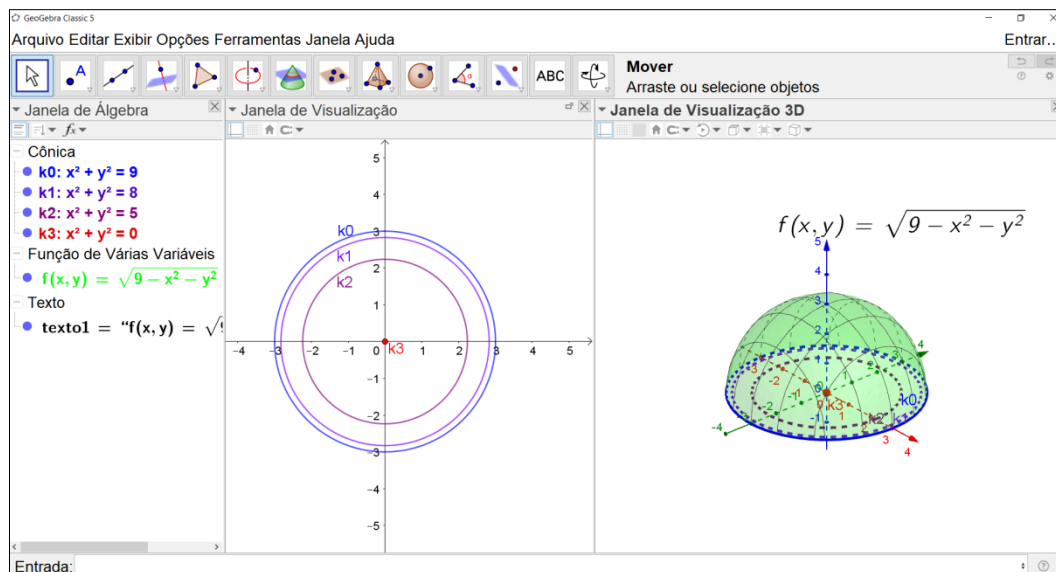


Figura5. Representação gráfica de uma função de duas variáveis e as Curvas de Nível
Fonte: Próprio autor, 2018.

Durante o desenvolvimento das atividades, notou-se o entusiasmo e o interesse dos alunos com as aulas, apesar de apresentarem algumas dificuldades. Para retratar essa situação, citamos a fala de alguns alunos: “*O GeoGebra auxilia muito na interpretação dos gráficos*”, “*É possível ver em vários ângulos a superfície da função no Geogebra*”, “*O Geogebra ajuda na compreensão das superfícies*” e “*É excelente usar o software para estudar funções de várias variáveis, gostaria de ter conhecido este software desde o primeiro período*”.

4. Considerações Finais

Este relato de experiência apresentou que o software GeoGebra 3D na versão Clássico5 contribuiu com a ressignificação do aprendizado dos estudantes que estão cursando o curso de cálculo II e que traz em sua ementa estudo das funções de várias variáveis reais.

A componente curricular de cálculo II necessita de um grau de abstração por parte dos alunos já que seu aporte teórico se constitui no espaço tridimensional e observa-se que a maioria dos estudantes não apresenta essa habilidade cognitiva desenvolvida. Essa observação foi fruto de diversas conversas informais entre os professores que ministram a componente curricular de cálculo II e, foi partindo desse pressuposto que os professores de cálculo II recorreram ao GeoGebra 3D como objeto de aprendizagem, reforço e para o aprimoramento das habilidades cognitivas dos estudantes que estão cursando essa componente curricular.

Os resultados indicaram que cerca de 77 % dos estudantes desenvolveram as atividades de forma correta, conjecturando que o software utilizado como metodologia de ensino nas aulas de cálculo II contribuiu com o aprimoramento e compreensão do conteúdo.

O software GeoGebra também contribuiu com a evolução e desenvolvimento das atividades de ensino, haja vista, que muitos dos estudantes passaram a ter motivação em desenvolver as atividades que foram passadas pelos professores pois, com a

visualização das funções de várias variáveis e com a ajuda do software, as habilidades cognitivas foram ressignificadas e contribuíram com o ensino aprendizagem dos discentes que cursam a disciplina cálculo II na FUCAPI.

A integração do conteúdo, tecnologia e pedagogia pode propiciar práticas inovadoras no ensino de Cálculo diferencial e integral. Entendemos que apenas a inserção do recurso tecnológico não proporciona uma nova prática, sendo assim necessária uma reflexão de como os recursos propostos podem ser aplicados em sala de aula de forma a potencializar a aprendizagem dos alunos. Entretanto, muitas vezes o professor não utiliza a tecnologia em sala de aula por desconhecer a ferramenta.

A exploração das representações na Janela de álgebra, Janela de Visualização 3D e na Janela CAS que o Geogebra ofereceu e a coordenação dessas representações, favorecida pela capacidade do Software em apresentar simultaneamente as duas representações visuais, permitiu, ao discente, conectar conhecimentos, contribuindo assim, para uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos. Para Borba (1999), com mídias informáticas, a ênfase algébrica dada ao estudo das funções pode ser transformada numa atenção maior à coordenação entre as diferentes representações para uma mesma função, propiciando a produção de conhecimentos mais abrangentes a respeito do tema.

Os resultados desse experimento mostram, também, que o computador é uma ferramenta de motivação, e que é importante inovar nas aulas para torná-las mais atrativas e dinâmicas. Assim, espera-se que o relato desse artigo possua reflexões e discussões sobre novas práticas no ensino de Cálculo com uso de tecnologias educacionais.

Referências

- Borba, Marcelo de Carvalho. (1999) Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectiva*. São Paulo: Unesp. cap. 16. p. 285-295.
- Celestino, M. R. (2000) Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90. São Paulo, PUC.
- Cury, H. N. (2007). Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.
- Ferreira, D. H. L.; Brumatti, R. N. M. (2009). Dificuldades em Matemática em um curso de Engenharia Elétrica. Horizontes, v.27, n.1, p.51-60.
- Gravina, M. A.; Santarosa, L. M. (1998). A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. In *IV Congresso RIBIE (Rede Iberoamericana de Informática Educativa)*, 4., 1998, Brasília. Brasília. **Anais...** Brasília: IV Congresso RIBIE, pp. 1-16.
- Hebenstrein, J. (1987) Simulation e Pédagogie, unerecontredutroisièmetype. GifSur Yvette: École Supérieure d'Électricité.

Lorenzato, S. (2006) Educação Infantil e Percepção Matemática. São Paulo: Autores associados. Nasser, Lílian, et al. (2000) Geometria segundo a Teoria de Van Hiele. Rio de Janeiro: UFRJ, Projeto Fundação IM/UFRJ.

Piaget, Jean. (1967) Biologie et Connaissance. Paris: Gallimard.

Lima, Paulo Cupertino. (2009) Cálculo de várias variáveis / Paulo Cupertino de Lima. – Belo Horizonte: Editora UFMG.

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Revista Iberoamericana de Educación, v. 35, n. 4.

Tajra, Sanmya Feitosa. Informática na Educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade. 8. ed. São Paulo: Érica, 2008.

Valente, José Armando. O Computador na Sociedade do Conhecimento. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999. Disponível em: <<http://pan.nied.unicamp.br/?q=content/o-computador-na-sociedade-do-conhecimento>>. Acesso em: 01 out. de 2019.