UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO FRACIONÁRIA CONSIDERANDO A LEI DE FICK MODIFICADA

Anderson da Silva Palmeira[1]; Paulo Henrique Farias Xavier[2]; André Luiz Santos da Soledade[2]; Davidson Martins Moreira[2]

[1] Centro Universitário SENAI CIMATEC (Mestrando em 2017, Bolsista); Tipo de projeto (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB)); andersonpalmeira@icloud.com; pahenfax@gmail.com; soledadeandre@hotmail.com

[2] Formação; Centro Universitário SENAI CIMATEC; Salvador-Ba; davidson.moreira@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se uma solução analítica para equação de difusão-advecção bidimensional fracionária considerando-se o modelo evolutivo bi-fluxo. A solução é obtida com a combinação do método da decomposição por Laplace e perturbação por homotopia, obtendo-se uma solução genérica da equação dependente da função de Mittag-Leffler, a qual é intrínseca as soluções de equações diferenciais fracionárias. Os resultados mostram uma rápida convergência e uma boa concordância com dados experimentais

PALAVRAS-CHAVE: transformada de Laplace; equação de difusão-advecção; derivada fracionária; modelo evolutivo bi-fluxo.

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, vários métodos têm sido propostos para obtenção da solução da equação da difusão-advecção, tal como o método das diferenças finitas (Debnath, 1997), método da decomposição de Adomian (Adomian, 2001), método iterativo variacional (Golbabai; Javidi, 2007), transformada integral (Biazer; Ghazvini, 2009), método da decomposição por Laplace (Khan; Austion, 2010). Os processos que regem o transporte e difusão dos poluentes são numerosos e muito complexos, sendo que seria inviável descrevê-los sem auxílio de modelos matemáticos, os quais normalmente são descritos pela equação de difusão-advecção. Através deles é possível descrever, interpretar, administrar liberações acidentais, avaliar áreas de risco, identificar fontes poluidoras, corrigir e controlar as concentrações de poluentes na atmosfera (Moreira; Tirabassi, 2004).

Entretanto, normalmente as soluções analíticas da equação de difusão são em função da tradicional Lei de Fick. De um modo diferente, neste trabalho, adota-se a equação de difusão-advecção considerando-se uma nova aproximação na lei de Fick, o processo de difusão bi-fluxo (Bevilacqua et all., 2015). O processo bi-fluxo consiste no fluxo simultâneo de dois conjuntos de partículas espalhadas com duas velocidades distintas. O primeiro conjunto obedece à lei clássica de Fick, o chamado fluxo primário, enquanto o segundo, denominado de fluxo secundário, segue uma nova lei, chamada de retenção. A equação da quarta ordem fornece uma abordagem consistente por levar em consideração a energia rotacional que, de outro modo, não seria possível com a teoria clássica (Bevilacqua et all., 2015). Nesse trabalho, propõe-se a solução da equação de difusão-advecção considerando-se o processo bi-fluxo, utilizando-se a metodologia chamada de método da decomposição por Laplace e perturbação por homotopia (He, 2008a, 2008b). A ideia essencial desse método é combinar a transformada de Laplace e o método de perturbação homotopia. Este método conduz a uma solução sem nenhuma discretização, evitando com isso os erros de aproximação dos métodos numéricos. O resultado dessa combinação mostra um procedimento elegante que fornece uma solução fechada, obtida através de uma série que converge rapidamente.

2. METODOLOGIA

A difusão por bi-fluxo consiste no fluxo simultâneo de dois conjuntos de partículas espalhando-se com duas velocidades distintas, sendo modelada através de uma equação diferencial linear de 2ª e 4ª ordem:

$$u\frac{\partial^\alpha c}{\partial x^\alpha}(x,z) = \beta k_1 \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}(x,z) - \beta(1-\beta)k_2 \frac{\partial^4 c}{\partial z^4}(x,z) \tag{1}$$

para $0 < z < h,\ x > 0$, onde h é a altura da camada limite atmosférica (CLA), u é a velocidade longitudinal do vento médio e α é um parâmetro de ordem fracionária. Além disto, c é a concentração de poluentes, z é a variável espacial na direção vertical, x é a distância longitudinal da fonte, β representa um parâmetro de controle da retenção e difusão e, por simplicidade, considera-se os coeficientes de difusão k_1 e $k_2$constantes.

Para obter-se a solução da equação (1) é necessário especificar as condições de contorno:

$$k_z\frac{\partial \mathrm{c}}{\partial \mathrm{z}} = 0 \quad \text{em } z = h \tag{2}$$

$$k_z\frac{\partial \mathrm{c}}{\partial \mathrm{z}} = 0 \quad \text{em } z = 0 \tag{3}$$

Além disso, assume-se uma condição de fonte com emissão constante Q na altura da fonte:

$$uc(0,z) = Q\delta(z - H_s) \quad em \quad x = 0 \tag{4}$$

onde $\delta(z - H_s)$é a função delta de Dirac e H_s é a altura da fonte. A função delta de Dirac pode ser aproximada pela expressão:

$$\delta(z - H_s) = \frac{1}{h}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} cos(\lambda_n z)cos(\lambda_n H_s)\right] \tag{5}$$

onde $\lambda_n = \frac{n\pi}{h}$, são os autovalores. Portanto, a condição de fonte (4) pode ser reescrita como:

$$c(0,z) = \frac{Q}{uh}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} cos(\lambda_n z)cos(\lambda_n H_s)\right] \tag{6}$$

Para a solução da equação (1), aplica-se a transformada de Laplace na variável x, usando a definição da derivada de Caputo, obtendo-se:

$$us^{\alpha}\hat{c}(s,\ z) - us^{\alpha-1}c(0,z) = L\left[\beta k_1 \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}(x,z)\right] - L\left[\beta(1-\beta)k_2 \frac{\partial^4 c}{\partial z^4}(x,z)\right] \tag{7}$$

Onde L representa a transformada de Laplace. Rearranjando-se a equação (7), obtém-se:

$$\hat{c}(s,z) = \frac{c(0,z)}{s} + \frac{\beta k_1}{us^{\alpha}} L\left[\frac{\partial^2 \mathrm{c}}{\partial \mathrm{z}^2}(x,z)\right] - \frac{\beta(1-\beta)k_2}{us^{\alpha}} L\left[\frac{\partial^4 \mathrm{c}}{\partial \mathrm{z}^4}(x,z)\right] \tag{8}$$

Aplicando-se a inversa da transformada de Laplace na Equação (8), resulta:

$$L^{-1}[\hat{c}(s,z)] = L^{-1}\left[\frac{c(0,z)}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{\beta k_1}{us^{\alpha}} L\left[\frac{\partial^2 \mathrm{c}}{\partial \mathrm{z}^2}(x,z)\right]\right] - L^{-1}\left[\frac{\beta(1-\beta)k_2}{us^{\alpha}} L\left[\frac{\partial^4 c}{\partial z^4}(x,z)\right]\right] \tag{9}$$

Portanto,

$$\mathrm{c}(x,z) = c_0 + L^{-1}\left[\frac{\beta k_1}{us^{\alpha}} L\left[\frac{\partial^2 \mathrm{c}}{\partial \mathrm{z}^2}(x,z)\right]\right] - L^{-1}\left[\frac{\beta(1-\beta)k_2}{us^{\alpha}} L\left[\frac{\partial^4 \mathrm{c}}{\partial \mathrm{z}^4}(x,z)\right]\right] \tag{10}$$

Pelo método da homotopia, a solução geral pode der escrita como:

$$c(x,z) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \tag{11}$$

onde:

$$c_0 = \frac{Q}{uh}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} cos(\lambda_n z)cos(\lambda_n H_s)\right] \tag{12}$$

e os demais termos:

$$c_{i+1}(x,z) = L^{-1}\left[\frac{\beta k_1}{us^{\alpha}} L\left[\frac{\partial^2 c_i}{\partial \mathrm{z}^2}(x,z)\right]\right] - L^{-1}\left[\frac{\beta(1-\beta)k_2}{us^{\alpha}} L\left[\frac{\partial^4 c_i}{\partial \mathrm{z}^4}(x,z)\right]\right],\ \mathrm{i} = 0,1,2,3, \ldots \tag{13}$$

Seguindo-se a metodologia, calculam-se as derivadas que serão utilizadas nos termos c_i. Por simplicidade, tomando-se em (10), $A_1 = \beta k_1$ e $A_2 = \beta\,(1-\beta)k_2$, resulta:

$$c_1 = \frac{2Qx^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)uh}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2{}_n\, cos(\lambda_n z)\, cos\,(\lambda_n H_s)(A_1 + A_2\lambda_n^2) \tag{14}$$

$$c_2 = \frac{2Qx^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)uh}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^4{}_n\, cos(\lambda_n z)\, cos\,(\lambda_n H_s)(A_1 + A_2\lambda_n^2)^2 \tag{15}$$

onde Γ é a função Gama. Portanto, agrupando-se estes primeiros termos, a solução final é dada por:

$$c(x,z) = \frac{Q}{uh} + \frac{2Q}{uh}\sum_{n=1}^{\infty} cos(\lambda_n z)\, cos\,(\lambda_n H_s\,) E_{\alpha}[-x^{\alpha}\lambda_n^2(A_1 + A_2\lambda_n^2) \tag{16}$$

Segue que a equação (16) é mais geral, no sentido que, se $k_2 = 0,(A_2 = 0)$e $\alpha = 1$, obtém-se a solução para difusão normal. Cabe ressaltar que Eα é a função de Mittag-Leffler, a qual é intrínseca as soluções com derivadas fracionárias.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para investigar o funcionamento da solução obtida contrapõem-se os dados obtidos pelo modelo com os dados obtidos nos experimentos de Copenhagen. Os experimentos de dispersão em Copenhagen, retratado no artigo Gryning e Lyck (1984), consiste na liberação do traçador SF6 (hexafluoreto de enxofre). Neste experimento, a concentração integrada lateralmente foi normalizada pela taxa de emissão (c / Q).

Na figura 1 a seguir é mostrada concentração ao nível do solo considerando-se os dados do experimentais de Copenhagen.

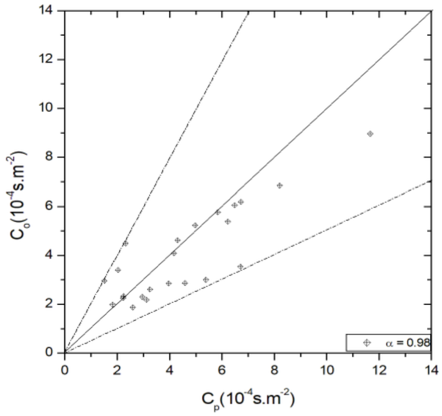

Figura 1: Gráfico de espalhamento da concentração observada Co em função da concentração predita pelo modelo para $\alpha = 0.98$. Os pontos entre as linhas têm um fator de 2.

A figura mostra que a concentração integrada lateralmente a partir do modelo com k1 constante, em condições moderadamente instáveis do experimento de Copenhagen, apresenta bons resultados. Entretanto, o melhor resultado foi para $\alpha = 0.98$ onde quase todos os pontos estão entre as linhas pontilhadas, as quais representam um fator de 2. A próxima análise será uma avaliação estatística das simulações do modelo para verificar qual valor de α apresenta os melhores resultados.

A Tabela 1 mostra os resultados estatísticos do modelo representado pela equação (23), considerando diferentes valores de α e de vento medidos a 115 m de altura (U_{115}).

Tabela 1: Índices estatísticos dos resultados do modelo.

U(115)	NMSE	COR	FA2	FB	FS
$\boldsymbol{\alpha} = 0.98$	0.11	0.860	1.000	0.117	0.269

Dentro do contexto de dispersão de poluentes na atmosfera, os resultados mostram uma boa concordância com os dados experimentais.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi demonstrado que o método de decomposição por Laplace e perturbação por homotopia pode ser utilizado para resolver a equação difusão bi-fluxo fracionária, obtendo-se uma solução mais geral. Esta metodologia é simples e direta, apresentando uma rápida convergência na série. Ressalta-se que esta é a primeira vez na literatura que esta equação tem uma solução obtida com a utilização de derivadas fracionárias.

Agradecimentos: Os autores agradecem ao SENAI CIMATEC e a FAPESB pelo apoio financeiro.

5. REFERÊNCIAS

[1] D. MOREIRA e T. TIRABASSI, “Modelo matemático de dispersão de poluentes na Atmosfera: um instrumento técnico para a gestão ambiental”, Ambiente & Sociedade – Vol. 7, pp. 160-161, n. 2, 2004.
[2] G. ADOMIAN, “Solution of physical problems by decomposition”, Computers & Science and Engineering, East-West Press, 2001.
[3] L. BEVILACQUA, M. JIANG, A. SILVA NETO, A.C.R.N. GALEÃO, “An Evolutionary Model of Bi Flux Diffusion Processes”, The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, pp. 987-992, 2015.
[4] GRYNING, S.E. e LYCK, E. “Atmospheric Dispersion from elevated sources in an urban area: Comparison between tracer experiments and model calculations”, Journal of Climate and Applied Meteorology, vol. 23(4) pp.651 – 660, 1984.
[5] J.H. HE, “New interpretation of homotopy perturbation. Addendum”, International Journal of Modern Physics B, vol. 20, n. 2, pp. 205-209, 2008.
[6] J.H. HE, “Recent development of the homotopy perturbation method”, Topological methods in Nonlinear Analysis, vol. 31, n. 2, pp. 205-209, 2008.
[7] Y. KHAN AND F. AUSTION, “Application of the Laplace decomposition method for nonlinear homogenous and non-homogenous advection equations”, Zeitschrift fluer Naturforschung A, vol. 65, n. 2, pp. 1-5, 2010.
[8] L. DEBNATH, “Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers”, Birkhauser, 1997.
[9] A. GOLBABAI AND M. JAVIDI, “A variational iteration method for solving parabolic partial deferential equations”, Computers & Matematics with Applications, vol. 54, n. 7-8, PP. 987-992, 2007.