

## **GEOGEBRA 3D E SUAS CONTRIBUIÇÕES NA CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS**

### **Resumo**

Este trabalho tem como objetivo apresentar as experiências e resultados obtidos através de uma proposta de ensino que utilizou o *software Geogebra 3D* no estudo dos gráficos de Funções de Duas Variáveis. A pesquisa foi realizada a partir do minicurso: Funções de Duas Variáveis, Geogebra e Materiais Manipuláveis: Uma Viagem pelos Três Mundos da Matemática, ministrado para 16 alunos dos cursos superiores do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais - Campus Januária (IFNMG- Januária) que já cursaram a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II. Para obtenção de dados foram utilizados como instrumento de coleta de dados: a observação e o questionário. Os dados coletados revelam que essa proposta de ensino foi satisfatória, visto que os alunos mostraram grande avanço na construção de gráficos de algumas funções e, além disso, todos os participantes da pesquisa foram unânimes em afirmar que essa proposta trouxe contribuições para sua aprendizagem. Por isso, sugere-se que os professores busquem utilizar esse tipo de proposta de ensino durante as aulas de Cálculo Diferencial e Integral, conforme a realidade e a necessidade de seus alunos.

**Palavras-chave:** Funções de Duas Variáveis; Geogebra; gráficos; proposta de ensino.

### **Introdução**

O conteúdo de Função de Duas Variáveis faz parte da ementa da Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais-campus Januária.

O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina que está presente na matriz curricular de diversos cursos de graduação, visto a sua grande aplicabilidade (IMAFUKU, 2008). Todavia, observa-se que muitas universidades têm enfrentando o fracasso do ensino do Cálculo, dificuldade esta que tem gerado um número elevado de reprovações e desistências (MIRANDA, 2010).

Além disso, de acordo com Imafuku (2008), percebe-se um problema ainda maior em relação ao ensino de Cálculo de Várias Variáveis, visto que até mesmo alunos que foram bem sucedidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com apenas uma variável, sentem dificuldades na transição para o Cálculo de Várias Variáveis, principalmente em relação aos tópicos que envolvem representação gráfica, interpretação do seu significado, estudos de limites, derivadas parciais, dentre outros.

Diante dessa situação, realizou-se uma proposta de ensino que utilizou o *software Geogebra 3D* no estudo dos gráficos de funções de duas variáveis. Essa proposta buscou verificar as contribuições que esse tipo de abordagem poderia trazer para o processo de ensino e aprendizagem dos acadêmicos, uma vez que Miranda (2010, p. 29, grifo do autor) afirma que “pesquisadores da área estudam as diversas utilidades das mídias para o ensino da Matemática. Particularmente, no ensino superior, a utilização de muitos *softwares* matemáticos vem crescendo progressivamente, no ensino de Cálculo”. O potencial das Tics (Tecnologia de Informação e Comunicação) é evidenciado nas obras de Machado (2008), Oliveira (2014) e Miranda (2010), visto que os softwares gráficos permitem aos estudantes visualizar verdades matemáticas que muitas vezes não ficam tão claras utilizando apenas as mídias “papel e caneta”.

## Material e métodos/ Metodologia

A pesquisa foi realizada a partir do minicurso: Funções de Duas Variáveis, *Geogebra* e Materiais Manipuláveis: Uma Viagem pelos Três Mundos da Matemática, ministrado para 16 alunos dos cursos superiores do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais - Campus Januária (IFNMG- Januária) que já cursaram a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II. Quanto ao procedimento, essa pesquisa se enquadra como uma pesquisa-ação, pois de acordo com Gil (2008) esse tipo de pesquisa se caracteriza pelo envolvimento do pesquisador e dos pesquisados durante a pesquisa. Para obtenção de dados foram utilizados como instrumento de coleta de dados: a observação e o questionário.

Inicialmente foi aplicado um teste inicial, no qual era pedido para que os alunos construíssem gráficos dos paraboloides elípticos e hiperbólicos; logo após foram realizados encontros nos quais foi trabalhado o conteúdo de funções de duas variáveis com o auxílio do *software Geogebra 3D* e no último encontro foi aplicado um teste final que novamente pedia para que os alunos construíssem os gráficos de paraboloides elípticos e hiperbólicos.

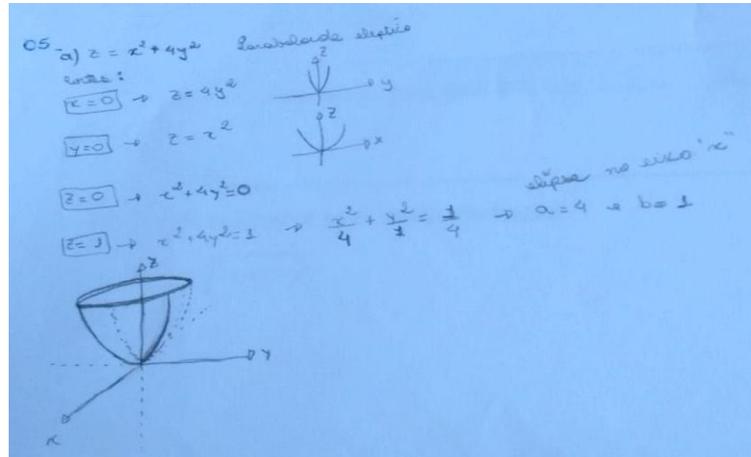
## Resultados e discussão

No teste inicial foi pedido que os participantes esboçassem as funções  $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$  e  $g(x, y) = \frac{x^2}{4} - y^2$  que representam respectivamente, um parabolóide elíptico e um parabolóide hiperbólico. Quanto ao esboço do parabolóide elíptico, foi possível verificar que a maioria dos alunos teve muita dificuldade nessa questão, visto que onze alunos não responderam e apenas dois deles responderam corretamente.

Em relação ao esboço do gráfico do parabolóide hiperbólico, o resultado é ainda mais alarmante, pois nenhum dos participantes conseguiu fazer, e dentre os que fizeram, grande parte apenas desenhou duas parábolas com as concavidades em sentidos opostos.

Nos encontros seguintes foram trabalhados temas como superfícies quádricas, domínio da função, curvas de nível, intersecção da função com os eixos ordenados e assim utilizando todas essas informações iniciou-se a construção dos gráficos da função. Dessa forma foram esboçados gráficos de funções que representavam: um parabolóide elíptico, um parabolóide hiperbólico e um cone. Foi possível perceber que todos estavam atentos à aula e sempre questionavam quando tinham dúvidas. Durante todo o processo, os gráficos também eram feitos no *software Geogebra 3D*.

E por fim, no teste final, foi pedido o esboço das funções  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$  e  $g(x, y) = \frac{y^2}{4} - x^2$ . Doze alunos conseguiram esboçar corretamente a primeira função, o que revela que os alunos tiveram um progresso surpreendente. Na Fig. 1 é apresentada a resolução de um desses alunos.

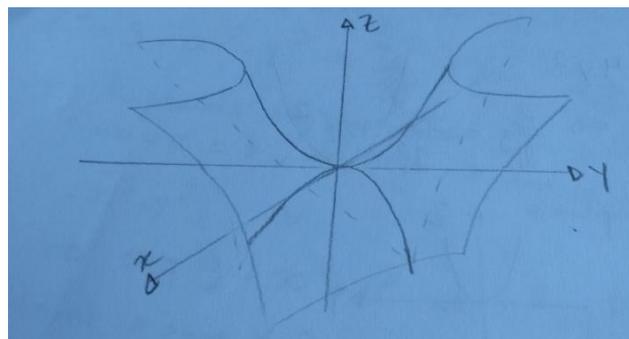


**Figura 1-** Esboço correto do paraboloide elíptico – Teste Final

**Fonte:** Dados da Pesquisa

Pela Figura acima, verifica-se que o acadêmico seguiu todos os passos, que foram trabalhados durante o minicurso, para fazer o esboço do gráfico, inicialmente ele identificou que a função representava um paraboloides elíptico, depois encontrou as intersecções com os eixos coordenados e por fim encontrou as curvas de nível. O aluno interpretou incorretamente a equação reduzida da elipse em que  $z = 1$ , todavia, isso não o impediu de construir o esboço do gráfico.

E quanto ao paraboloides hiperbólico novamente é perceptível a grande evolução dos alunos, dado que no teste inicial nenhum dos alunos havia conseguido esboçar corretamente o gráfico dessa função e agora oito deles conseguiram fazer, o que representa 50% dos participantes. O avanço foi menor do que o do paraboloides elíptico, mas deve-se levar em consideração que o paraboloides hiperbólico é considerado mais difícil de ser esboçado. Na Fig. 2 está o esboço de um desses alunos que acertaram essa questão.



**Figura 2-** Esboço correto do paraboloides hiperbólico – Teste Final

**Fonte:** Dados da Pesquisa

Como é identificado na Fig. 2, o aluno conseguiu esboçar o gráfico de forma bem clara e nítida.

Além disso, foi questionado aos participantes se a utilização do *software Geogebra 3D* trouxe contribuições para sua aprendizagem e todos responderam que sim. Dois alunos justificaram sua resposta da seguinte forma: “Contribui e muito, pois possibilitou uma melhor visualização sobre o esboço das funções, o domínio e como ocorre o comportamento de cada função” e

“Através do programa podemos visualizar melhor as funções e ver o que realmente acontece.” Por intermédio dessas falas é possível perceber como a utilização do *software Geogebra 3D* foi importante na visão dos alunos. Essas respostas confirmam a fala de Machado (2008, p. 8) “acredita-se que a ferramenta computacional contribui para que os estudantes possam visualizar esses conceitos de função de maneira eficaz”.

### Considerações finais

Tendo em vista os resultados apresentados anteriormente, percebe-se que essa proposta de ensino se mostrou bem-sucedida, uma vez que os alunos apresentaram um grande avanço no esboço dos gráficos, ao compararmos o teste inicial e o teste final. Além disso, os próprios participantes concordaram que essa proposta trouxe contribuições para sua aprendizagem, uma vez que permitiu uma melhor visualização.

Assim sendo, sugere-se que os professores busquem utilizar propostas de ensino que usam a tecnologia como aliada durante as aulas de Cálculo Diferencial e Integral, pois elas podem contribuir para uma melhor visualização dos acadêmicos e conseqüentemente uma melhor aprendizagem.

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao IFNMG - campus Januária, por incentivar a realização deste trabalho e aos participantes da pesquisa.

### Referências

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6.ed. São Paulo: Atlas, 2008.

IMAFUKU, Roberto Seidi. **Sobre a passagem do estudo de uma variável real para o caso de duas variáveis**. 2008. 235 f. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MACHADO, Rosa Maria. **A Visualização na Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral no Ambiente Computacional MPP**. 2008. 289f. Tese (Doutorado)- Universidade Federal de Campinas, Faculdade de educação. Campinas, São Paulo.

MIRANDA, Anderson Melhor. **As tecnologias da informação no estudo do cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa**. 2010.152f. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

OLIVEIRA, Fábio Luiz de. **A produção de conhecimento matemático acerca de funções de duas Variáveis em um coletivo de seres-humanos-com-mídias**. 2014.151f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.